Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Klassische Theoretische Physik I, Einführung - Klausur 1, WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl

Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

23.02.2023

LÖSUNGEN

1. Warm-up [10 Punkte]

(a) [2 Punkte] Nennen Sie jeweils den Namen einer konservativen und einer nicht-konservativen Kraft.

LÖSUNG:

Konservativ: Anziehungskraft, elektrostatische Kraft, Federkraft, ... **[1 Punkt]**

Nicht konservativ: Reibungskraft/Luftwiderstand, ... **[1 Punkt]**

(b) [2 Punkte] Der Ort eines Teilchens mit der Masse m ist zum Zeitpunkt t durch den Vektor

$$\mathbf{r}(t) = t^3\,\hat{\mathbf{e}}_x + \mathrm{e}^{2t}\,\hat{\mathbf{e}}_z$$

gegeben. Bestimmen Sie die auf das Teilchen einwirkende Kraft $\mathbf{F}$ bei $t = 0$.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= 3t^2\,\hat{\mathbf{e}}_x + 2\mathrm{e}^{2t}\,\hat{\mathbf{e}}_z \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ \Longrightarrow \mathbf{a}(t) &= 6t\,\hat{\mathbf{e}}_x + 4\mathrm{e}^{2t}\,\hat{\mathbf{e}}_z \\ \Longrightarrow \mathbf{F}(t=0) &= 4m\hat{\mathbf{e}}_z. \quad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

(c) [2 Punkte] Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} a^2x^2 \\ \ln(y^3) \\ -\cos(az) \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Bestimmen Sie alle Werte von a, sodass $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ bei $\mathbf{r} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{\pi}{a}\right)^{\mathrm{T}}$ divergenzfrei ist.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 2a^2x + \frac{3}{y} + a\sin(az) \quad \textbf{[0,5 Punkte]} \\ &= 0 \quad \text{bei} \quad \left(1, \frac{3}{2}, \frac{\pi}{a}\right) \quad \textbf{[0,5 Punkte]} \\ \Longrightarrow 2a^2 + 2 &= 0 \\ \Longrightarrow a_1 &= \mathrm{i}, \quad \textbf{[0,5 Punkte]} \\ a_2 &= -\mathrm{i}. \quad \textbf{[0,5 Punkte]} \end{aligned}$$

(d) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ eines durch eine Zentralkraft beschleunigten Objektes erhalten bleibt.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad \textbf{[0,5 Punkte]} \\ &= m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, weil $\dot{\mathbf{r}}$ zu sich selbst parallel ist. **[0,5 Punkte]**

$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, weil $\mathbf{r}$ und $\ddot{\mathbf{r}}$ für eine Zentralkraft zueinander parallel sind. **[0,5 Punkte]**

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \textbf{[0,5 Punkte]}$$

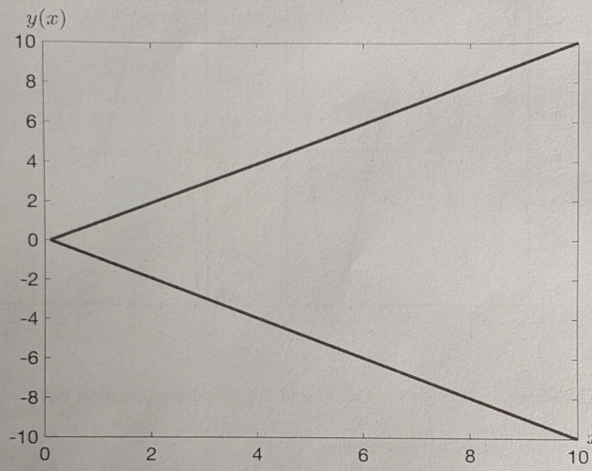
(e) [2 Punkte] Eine Differentialgleichung sei gegeben durch

$$y e^{\ln(x)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2, \quad x > 0.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0$ erfüllen. Skizzieren Sie diese Lösungen.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} y\,\mathrm{d}y &= x\,\mathrm{d}x \quad \textbf{[0,5 Punkte]} \\ \Longrightarrow\ y^2 &= x^2 \\ \Longrightarrow\ y &= \pm x. \quad \textbf{[0,5 Punkte]} \end{aligned}$$



[0,5 Punkte] jeweils für $y < 0$ **und** $y > 0$. (Es wurde gegeben, dass $x > 0$).

2. 1D Potential [10 Punkte]

Ein Teilchen der Masse m und Gesamtenergie E bewege sich in folgendem 1D Potential, wobei a, b Konstanten seien

$$V(x) = ax^2 + bx^4.$$

(a) [3 Punkte] Skizzieren Sie das Potential für die Fälle i) $a < 0, b > 0$ und ii) $a > 0, b < 0$. Berechnen Sie hierfür zuerst die Nullstellen und Extremwerte, damit der Verlauf qualitativ korrekt ist.

LÖSUNG:

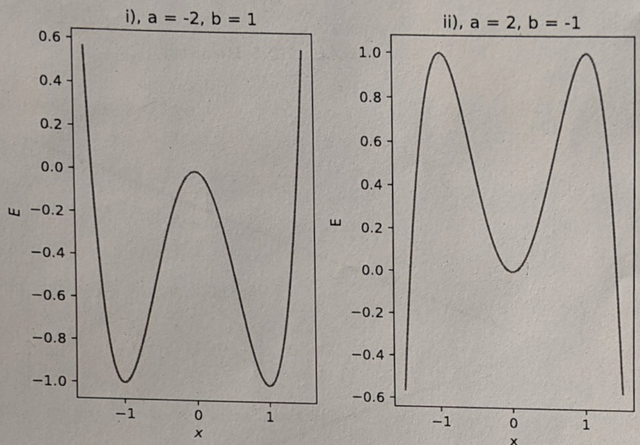


Abbildung 1: Skizzen für Fall i) und ii). Wendepunkte sind bei $x = \pm 1$.

Zunächst berechnen wir Nullstellen

$$x^2(a + bx^2) \rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{a}{b}}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

und Extrempunkte

$$x(2a + 4bx^2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{a}{2b}}, \quad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

Die Extrema begrenzen das Intervall, in dem der quadratische Anteil dominiert. Damit ergeben sich die Skizzen in 1 (jeweils [**1 Punkt**])).

(b) [2 Punkte] Geben Sie für die Fälle i) und ii) jeweils die erlaubten Energie- und Ortsbereiche an, in denen das Teilchen gebunden ist und sich also *nicht* bis ins Unendliche bewegen kann. **LÖSUNG:**

i) Jede endliche Energie führt zu einem gebundenen Zustand. Die obere Grenze ist demnach $E < \infty$ und die untere Grenze wegen $E = T + V$, $T > 0$ für $T = 0$ gegeben durch die Minima des Potentials. Diese werden an den Extrema angenommen, also $V_e = V(\pm\sqrt{-\frac{a}{2b}})$.

$$E < \infty \qquad \textbf{[0.25 Punkte]}$$
$$E \geq V_e \qquad \textbf{[0.25 Punkte]}$$
$$x \in (-\infty, \infty) \qquad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

ii) Die Energie muss im Potentialtopf liegen und damit

$$E \geq V(0) \qquad \textbf{[0.25 Punkte]}$$
$$E \leq V_e \qquad \textbf{[0.25 Punkte]}$$
$$x \in [-\sqrt{-\frac{a}{2b}}, \sqrt{-\frac{a}{2b}}] \qquad \textbf{[0.5 Punkte]}$$

(c) [2 Punkte] Geben Sie für Fall ii) die Geschwindigkeit eines gebundenen Teilchens in Abhängigkeit seines Ortes an und skizzieren Sie diese. Beachten Sie, dass die Gleichung für die Geschwindigkeit *zwei* Lösungen hat.

LÖSUNG:

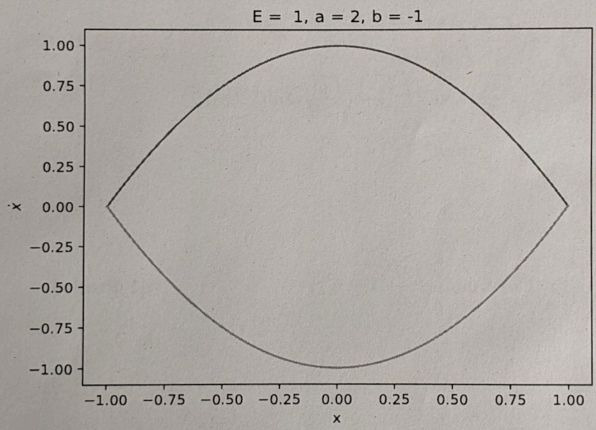


Abbildung 2: Skizze für die Geschwindigkeit. Schnittpunkte sind bei $x = \pm 1$

Aus $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ folgt

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2/m[E - V(x)]}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Das positive (negative) Vorzeichen entspricht einer Bewegung parallel (antiparallel) zur x-Achse. Für gebundende Zustände springt das Teilchen zwischen den Schnittpunkten mit dem Potential hin und her und $\dot{x}$ wechselt bei jedem Sprung das Vorzeichen. Die Wurzelfunktion ist monoton, daher enspricht das Steigungsverhalten von $\dot{x}$ dem von $E - V(x)$ im Bereich zwischen den Schnittpunkten. Insbesondere gibt es damit nur ein Extremum von $\dot{x}$ bei $x = 0$.

Zusammenfassend ist $\dot{x}$ extremal bei $x = 0$, verschwindet bei den Schnittpunkten und zeigt einen Vorzeichenwechsel zwischen den Schnittpunkten. Damit ergibt sich die Skizze in 2 [**1 Punkt**].

(d) [3 Punkte] Berechnen Sie nun für Fall ii) die Lösung $x(t)$ für $a = -2b$ und $E = -b$ zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) > 0$. Sie dürfen annehmen, dass $|x| < 1$.
Hinweis: Hilfreich ist die folgende Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh(x) = 1 - \tanh^2(x)$$

und eine Substitution der Form $\tanh(u) = x$.

LÖSUNG:
Wegen der positiven Anfangsgeschwindigkeit wählen wir die positive Wurzel und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
t(x') &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x'} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} && \text{[1 Punkt]} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x'} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 + x^4}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x'} \mathrm{d}x \frac{1}{1 - x^2} && \text{[1 Punkt]} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{\tanh^{-1}(x_0)}^{\tanh^{-1}(x')} \mathrm{d}u \cdot 1 && \text{[1 Punkt]} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2E}} \tanh^{-1}(x') - \sqrt{\frac{m}{2E}} \tanh^{-1}(x_0) \\
&= \sqrt{\frac{m}{2E}} \tanh^{-1}(x') + K
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$x'(t) = \tanh\left[\sqrt{\frac{2E}{m}}(t - K)\right]. \qquad \text{[1 Punkt]}$$

3. Kettenlinie [10 Punkte]

Die Bogenlänge s einer Kurve $y(x)$ in der xy-Ebene sei gegeben durch

$$s = \int_a^b |\mathrm{d}\mathbf{r}|, \quad x \in [a, b],$$

wobei $\mathbf{r} = (x, y)^{\mathrm{T}}$.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$s = \int_a^b \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{d}\mathbf{r}| &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \\
\Longrightarrow \quad s &= \int_a^b \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.
\end{aligned}$$

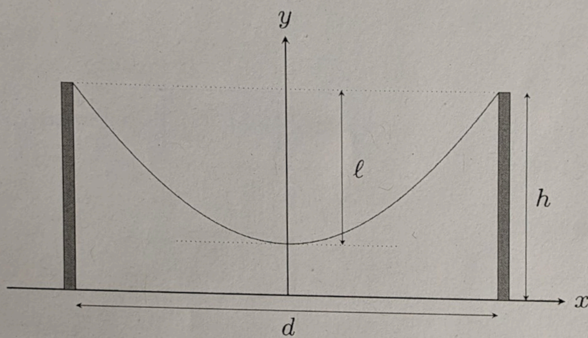
(b) Die natürliche Form einer hängenden Kette ist als Kettenlinie bekannt und wird beschrieben durch die Gleichung

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0,$$

wobei

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ein physikalisches Beispiel wird in der folgenden Abbildung gezeigt. Sie stellt eine Kettenlinie mit Tiefe ℓ zwischen zwei Säulen dar. Die Säulen haben jeweils eine Höhe h und einen Abstand d voneinander. Die Enden der Kette sind ganz oben an den Säulen befestigt.



(i) [1 Punkt] Welchem Punkt der Kettenlinie entspricht der Parameter a?

LÖSUNG: a entspricht dem Minimum der Kette $(0, a)$. **[1 Punkt]**

(ii) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass die Bogenlänge der in der Abbildung dargestellten Kettenlinie durch

$$s = 2a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right)$$

gegeben ist.
Hinweis: Die folgenden Identitäten könnten hilfreich sein: $\mathrm{d}(\cosh x)/\mathrm{d}x = \sinh x$, $\mathrm{d}(\sinh x)/\mathrm{d}x = \cosh x$ *und* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \textbf{[1 Punkt]} \\
\Longrightarrow \; s &= \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}x \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} \\
&= \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}x \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \left[a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-d/2}^{d/2} \\
&= a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right) - a \sinh\left(\frac{-d}{2a}\right) \\
&= 2a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right). \quad \textbf{[1 Punkt]}
\end{aligned}$$

(iii) [4 Punkte] Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Säulen, sodass die Länge der Kette zweimal so groß wie ihre Tiefe ist.

LÖSUNG: Länge = 2 × Tiefe, also

$$
\begin{aligned}
s &= 2\ell \\
\implies 2a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right) &= 2\ell \\
\implies a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right) &= \ell. \quad \textbf{[1 Punkt]}
\end{aligned}
$$

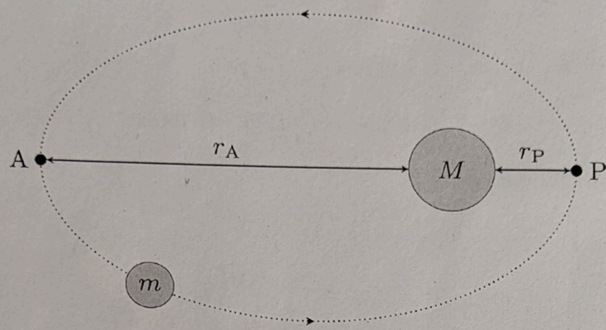
Wir wissen aber, dass

$$
\begin{aligned}
y\left(\pm\frac{d}{2}\right) &= h \\
&= a\cosh\left(\frac{d}{2a}\right) \\
&= a + \ell \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= a + a\sinh\left(\frac{d}{2a}\right) \\
&= a\left[1 + \sinh\left(\frac{d}{2a}\right)\right] \\
&= a\left[1 + \sqrt{\cosh^2\left(\frac{d}{2a}\right) - 1}\right] \qquad \textbf{[1 Punkt]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \cosh\left(\frac{d}{2a}\right) &= \left[1 + \sqrt{\cosh^2\left(\frac{d}{2a}\right) - 1}\right] \\
\implies \cosh^2\left(\frac{d}{2a}\right) - 2\cosh\left(\frac{d}{2a}\right) + 1 &= \cosh^2\left(\frac{d}{2a}\right) - 1 \\
\implies \cosh\left(\frac{d}{2a}\right) &= 1 \\
\implies d &= 0. \quad \textbf{[1 Punkt]}
\end{aligned}
$$

4. Planetenbahnen [10 Punkte]

Ein Planet mit der Masse m bewege sich auf einer Umlaufbahn um die Sonne mit der Masse M. Der sonnenfernste Punkt (das Aphel) befindet sich bei A und der sonnennächste Punkt (das Perihel) bei P. Beim Aphel (Perihel) hat der Planet eine Entfernung r_A (r_P) zur Sonne.



(a) [1 Punkt] Zeigen Sie mithilfe des Energieerhaltungssatzes, dass

$$\mu\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)=\frac{1}{2}\left(v_A^2-v_P^2\right),$$

wobei v_A und v_P jeweils die Geschwindigkeiten des Planeten beim Aphel und Perihel sind und $\mu = GM$, wobei G die Gravitationskonstante ist.

LÖSUNG:

$$\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{\mu m}{r_A}=\frac{1}{2}mv_P^2-\frac{\mu m}{r_P} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$
$$\Longrightarrow \mu\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)=\frac{1}{2}\left(v_A^2-v_P^2\right)$$

(b) [1 Punkt] Nutzen Sie die Drehimpulserhaltung, um r_P als Funktion von r_A, v_A und v_P zu bestimmen.

LÖSUNG: Bei A und P, sind r und v senkrecht zu einander, deswegen gilt

$$r_A v_A = r_P v_P \quad \textbf{[0,5 Punkte]}$$
$$\Longrightarrow r_P=\frac{r_A v_A}{v_P}. \quad \textbf{[0,5 Punkte]}$$

(c) [3 Punkte] Zeigen Sie unter der Annahme, dass $r_P \neq r_A$ und mithilfe der in a) und b) bestimmten Gleichungen, dass

$$v_P=\frac{2\mu}{r_A v_A}-v_A.$$

LÖSUNG:

$$r_P=\frac{r_A v_A}{v_P} \quad \text{in} \quad \mu\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)=\frac{1}{2}\left(v_A^2-v_P^2\right) \quad \text{einsetzen :}$$

$$\mu\left(\frac{1}{r_A} - \frac{v_P}{r_A v_A}\right) = \frac{1}{2}\left(v_A^2 - v_P^2\right) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}v_P^2 - \frac{\mu}{r_A v_A} v_P + \left(\frac{\mu}{r_A} - \frac{v_A^2}{2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow v_P = \frac{\mu}{r_A v_A} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{r_A v_A}\right)^2 - 2\left(\frac{\mu}{r_A} - \frac{v_A^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\mu}{r_A v_A} \pm \sqrt{\frac{(\mu - r_A v_A^2)^2}{r_A^2 v_A^2}} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \frac{1}{r_A v_A}(\mu \pm (\mu - r_A v_A^2)).$$

Explizite Erklärung, dass $v_P = v_A$ eine Lösung der Gleichung ist aber muss ausgeschlossen werden, weil $r_P \neq r_A$. **[1 Punkt]**

$$\Longrightarrow v_P = \frac{2\mu}{r_A v_A} - v_A.$$

Es sei nun für Teile d) und e) gegeben, dass $r_A = 2r_P$.

(d) [2 Punkte] Die Entfernung des Planeten zur Sonne sei gegeben durch

$$r = \frac{K}{1 + \epsilon \cos\phi}, \quad K = \text{const.},$$

wobei ϵ die Exzentrizität der Umlaufbahn ist und $0 \leq \phi < 2\pi$.

Bestimmen Sie ϵ.

LÖSUNG:

$$r_P = r(\phi = 0) \quad \text{und} \quad r_A = r(\phi = \pi) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\Longrightarrow \frac{K}{1-\epsilon} = \frac{2K}{1+\epsilon}$$

$$\Longrightarrow \epsilon = \frac{1}{3}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(e) [3 Punkte] Die Exzentrizität kann als

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{4EK}{m r_A v_A (v_A + v_P)}},$$

geschrieben werden, wobei E die Gesamtenergie des Planten ist.

Nutzen Sie diese Gleichung und zeigen Sie, dass

$$E = -m v_A^2.$$

LÖSUNG:

$$r_{\mathrm{A}} = \frac{K}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3K}{2}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Von b):

$$\begin{aligned}
r_{\mathrm{P}} &= \frac{2 r_{\mathrm{P}} v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{P}}} \\
\Longrightarrow v_{\mathrm{P}} &= 2 v_{\mathrm{A}} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\
\Longrightarrow \frac{1}{3} &= \sqrt{1 + \frac{4EK}{m \cdot (3K/2) \cdot 3 v_{\mathrm{A}}^2}} \\
&= \sqrt{1 + \frac{8E}{9 m v_{\mathrm{A}}^2}} \\
\Longrightarrow -\frac{8}{9} &= \frac{8E}{9 m v_{\mathrm{A}}^2} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\
\Longrightarrow E &= -m v_{\mathrm{A}}^2.
\end{aligned}$$

5. Wurf mit Luftwiderstand [10 Punkte]

Ein Teilchen mit der Masse m am Ort $\mathbf{r}(t)$ fällt senkrecht nach unten in die $-\hat{\mathbf{e}}_z$ Richtung unter dem Einfluss der Luftwiderstandskraft $\mathbf{F}_\mathrm{L}$, wobei

$$\mathbf{F}_\mathrm{L} = -\gamma\dot{\mathbf{r}}$$

und $\gamma > 0$ eine Konstante sei.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die maximale Geschwindigkeit v_max des Teilchens durch

$$v_\mathrm{max} = \frac{mg}{\gamma}$$

gegeben ist. Begründen Sie Ihren Ansatz.

LÖSUNG: Um die maximale Geschwindigkeit zu erreichen, müssen sich die Anziehungskraft und die Kraft wegen des Luftwiderstands ausgleichen (keine Beschleunigung mehr). **[1 Punkt]**

Das heißt,

$$\begin{aligned} |-\gamma v_\mathrm{max}\hat{\mathbf{e}}_z| &= |-mg\hat{\mathbf{e}}_z| \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ \Longrightarrow \gamma v_\mathrm{max} &= mg \\ \Longrightarrow v_\mathrm{max} &= \frac{mg}{\gamma}. \end{aligned}$$

Das gleiche Teilchen (wieder unter dem Einfluss von Luftwiderstand) wird nun mit dem Anfangswinkel θ in der xz-Ebene geworfen.

(b) [2 Punkte] Schreiben Sie **komponentenweise** die Bewegungsgleichungen des Teilchens auf.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} -\gamma\dot{x} &= m\ddot{x}. \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ -\gamma\dot{z} - mg &= m\ddot{z}. \quad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

(c) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{g}{v_\mathrm{max}},$$

wobei v_x die x-Komponente der Geschwindigkeit des Teilchens sei.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{mg}{v_\mathrm{max}} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ \Longrightarrow -\frac{mg}{v_\mathrm{max}}\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \Longrightarrow \ddot{x} &= -\frac{g}{v_\mathrm{max}}\dot{x} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\frac{g}{v_\mathrm{max}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} &= -\frac{g}{v_\mathrm{max}}. \end{aligned}$$

(d) [4 Punkte] Die Gleichung in Teil (c) kann wie folgt formuliert werden:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{v_{\max}} x = v_0 \cos(\theta),$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens sei.

Indem Sie beide Seiten dieser neuen Gleichung mit dem Faktor

$$I = \exp\left(\frac{g}{v_{\max}} t\right)$$

multiplizieren und die Anfangsbedingung $x(t=0) = 0$ nutzen, zeigen Sie, dass

$$x(t) = \frac{v_0 v_{\max}}{g} \cos(\theta) \left[1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\max}} t\right)\right].$$

LÖSUNG:

$$\exp\left(\frac{g}{v_{\max}} t\right) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{v_{\max}} \exp\left(\frac{g}{v_{\max}} t\right) x = \exp\left(\frac{g}{v_{\max}} t\right) v_0 \cos(\theta)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x \exp\left(\frac{g}{v_{\max}} t\right)\right] = \exp\left(\frac{g}{v_{\max}} t\right) v_0 \cos(\theta) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\Longrightarrow x \exp\left(\frac{g}{v_{\max}} t\right) = \frac{v_0 v_{\max}}{g} \exp\left(\frac{g}{v_{\max}} t\right) \cos(\theta) + C, \quad C = \text{const.} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$x(0) = 0 \Longrightarrow C = -\frac{v_0 v_{\max}}{g} \cos(\theta) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{v_0 v_{\max}}{g} \cos(\theta) \left[1 - \exp\left(-\frac{g}{v_{\max}} t\right)\right].$$