Aufgabe 2: Reibungskraft (20 Punkte)
Zur Erforschung einer neuen viskosen Flüssigkeit soll das in ihr geltende Reibungsgesetz erforscht werden. Für den Betrag der Reibungskraft wird der Ansatz $F_R = \alpha v^\beta$ mit $\alpha, \beta > 0$ gewählt, wobei v der Betrag der Geschwindigkeit ist. Um α und β zu bestimmen, wird eine Kugel der Masse m aus der Höhe h senkrecht (mit Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$) fallen gelassen und ihre Geschwindigkeit gemessen. $v(t)$ erfüllt also die Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = mg - \alpha v^\beta. \tag{1}$$

Diese Gleichung kann man i.A. nicht analytisch lösen.

a) (6 Punkte) Für $t \to \infty$ strebt v gegen eine Grenzgeschwindigkeit v_G. Bestimmen Sie v_G und eliminieren Sie α und m zugunsten von v_G, d.h. drücken Sie $\dot{v}$ durch g, v_G und β aus. Benutzen Sie diese Formel in allen folgenden Teilaufgaben.
Hinweis: Zur Vermeidung von Flüchtigkeitfehlern überprüfen sie am besten Ihre Formel für $v = 0$ und für $v = v_G$.

b) (4 Punkte) Um auch β zu bestimmen benötigen wir eine zweite Messung. Dazu studieren wir die Bewegung für große Zeiten, zu denen

$$w := 1 - \frac{v}{v_G} \tag{2}$$

klein ist, und zwar $0 < w \leq 0.1$. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für w.

c) (6 Punkte) Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung in w zur ersten Ordnung, sodass Sie eine lineare Differentialgleichung finden. Lösen Sie diese Gleichung, wobei Sie die Integrationskonstante durch $w_0 := w(t_0)$ ausdrücken.

d) (4 Punkte) Für $v_G = 9{,}8\frac{m}{s}$ misst man, dass sich die fallende Kugel in $\Delta t = 0{,}23\,s$ von $0{,}9\,v_G$ auf $0{,}95\,v_G$ beschleunigt. Bestimmen Sie aus dieser Information β.

Aufgabe 3: Corioliskraft (20 Punkte)
Der Ort $\vec{r}$ eines Fahrzeugs sei durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Fahrzeug fahre auf der Nordhalbkugel der Erde mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = v_{\text{Süd}}\vec{e}_\theta + v_{\text{Ost}}\vec{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.

a) (4 Punkte) Beweisen Sie die Beziehung

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta. \tag{3}$$

b) (6 Punkte) Berechnen Sie die Coriolisbeschleunigung

$$\vec{a}_C = -\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}, \tag{4}$$

die auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten, also in der Form $\vec{a}_C = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\phi\vec{e}_\phi$ an.

c) (6 Punkte) Betrachten Sie den Fall, dass das Fahrzeug sich nach Süden bewegt. Durch die Coriolisbeschleunigung wird es in West-Ost-Richtung abgelenkt. Berechnen Sie $v_{\text{Ost}}(t)$, wobei Sie $v_{\text{Süd}}$, θ und $\vec{e}_{r,\theta,\phi}$ als zeitlich konstant annehmen dürfen. Berechnen Sie $s(t) = \int_0^t dt' v_{\text{Ost}}(t')$. Wird das Fahrzeug nach Westen oder Osten abgelenkt?

d) (4 Punkte) Betrachten Sie das Zahlenbeispiel mit $v_{\text{Süd}} = 40\frac{m}{s}$, $\theta = 45°$ und $\omega = \frac{3}{4} \cdot 10^{-4}\frac{1}{s}$: Wie groß ist $s(t)$ für $t = 60\,s$, d.h. wie weit kommt das Fahrzeug in einer Minute aus der Spur? Es reicht aus, wenn Sie das Ergebnis auf zwei signifikante Stellen angeben.

Aufgabe 4: Aufzug (20 Punkte)

Ein Aufzug verbindet Bahnhofshalle bei $z = 0$ mit einem Bahnsteig bei $z = h$. Die Steuerung ist so programmiert, dass der Aufzug mit kleiner Geschwindigkeit v_{z0} losfährt und ankommt, und zwar gemäß

$$|\dot{z}| = \alpha z(h-z) + v_{z0}, \qquad \text{mit } \alpha, v_{z0} > 0. \tag{5}$$

a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Koeffizienten A und B der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\alpha z(h-z)+v_{z0}} = \frac{A}{z-z_A} + \frac{B}{z-z_B}, \quad \text{mit } z_A = \frac{h}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{v_{z0}}{\alpha h^2}}\right), \quad z_B = \frac{h}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{v_{z0}}{\alpha h^2}}\right).$$

b) (2 Punkte) Welche Vorzeichen haben $z - z_A$ und $z_B - z$ für $z \in [0, h]$?

c) (4 Punkte) Ab jetzt betrachten wir einen aufwärts fahrenden Aufzug, $\dot{z} > 0$. Bestimmen Sie $z(t)$ aus Gl. (5) für $z(0) = 0$. Achten Sie darauf, dass Argumente von Logarithmen positiv sind. Verwenden Sie ab jetzt A, z_A und z_B, sie brauchen diese Größen nicht durch α, h und v_{z0} auszudrücken.

d) (4 Punkte) Zu welcher Zeit T erreicht der Aufzug den Bahnsteig? Hinweis: $h = z_A + z_B$.

e) (6 Punkte) Wir betrachten den Fall $v_{z0} < \alpha h^2/2$. Für welche z wird die Beschleunigung $\ddot{z}$ minimal bzw. maximal?

Aufgabe 5: Schwingungsdifferentialgleichung (20 Punkte)

Die Lösung von

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = F_0\,\theta(t)e^{-\alpha t} \tag{6}$$

für $m, \omega, \alpha > 0$ und $F_0 \in \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$, wobei $x_h(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist, und $x_i(t)$ mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion

$$G(t-t') = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le t', \\ \frac{1}{m\omega}\sin\left[\omega(t-t')\right] & \text{für } t \ge t', \end{cases}$$

für $t \ge 0$ als $x_i(t) = \int_0^t dt'\, G(t-t')\, F_0\, e^{-\alpha t'}$ bestimmt werden kann.

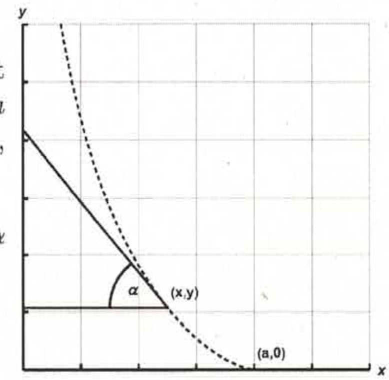
a) (8 Punkte) Berechnen Sie $x_i(t)$.

Hinweise: (i) $\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i)$, (ii) Fassen Sie die Terme so zusammen, dass im Ergebnis alle Summanden reell sind, (iii) Überprüfen Sie $x_i(0) = 0$ in Ihrer Lösung.

b) (7 Punkte) Bestimmen Sie nun F_0 und α für vorgegebenes ω, A und B so, dass unsere Schwingung für $t \to \infty$ verschwindet, d.h. $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Welche Bedingung müssen die Vorzeichen von A und B erfüllen, damit es eine solche Lösung gibt?

c) (5 Punkte) Bestimmen Sie für die in Teilaufgabe (b) gefundene Lösung die Energie der schwingenden Masse $E(t) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right)$ für $t \ge 0$, ausgedrückt durch F_0, α und ω.

Aufgabe 6: Traktrix (20 Punkte)



Ein Mensch geht auf der y-Achse von $y = 0$ in Richtung $y > 0$ und zieht einen auf rauer Fläche liegenden Gegenstand an einem Seil mit Länge a hinter sich her. Das Seil spannt sich also tangential zur Kurve $(x, y(x))$, die der Gegenstand durchläuft.

a) (3 Punkte) Drücken Sie $\frac{dy}{dx}$ durch $\tan\alpha$ sowie x durch a und $\cos\alpha$ aus. Hinweis: Welches Vorzeichen hat dy?

b) (3 Punkte) Drücken Sie $\frac{dy}{dx}$ durch x und a aus.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie $y(x)$ zu $y(a) = 0$.

d) (2 Punkte) Wir betrachten nun den zeitabhängigen Weg $(0, Y_M(t))$ des Menschen mit $Y_M(0) = 0$ und $Y_M(t) \geq 0$. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}(Y_M - y) = \frac{d}{dt}\sqrt{a^2 - x^2}$$

e) (4 Punkte) Drücken Sie (für $t > 0$) $\dot{y}$ durch $\dot{Y}_M$, x und a aus. Hinweis: $\dot{y} = \dot{x}\frac{dy}{dx}$.

f) (4 Punkte) Berechnen Sie $\dot{x}$ und $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, ausgedrückt durch $\dot{Y}_M$, x und a. Geben Sie $v/\dot{Y}_M$ für $Y_M = 0$ und $Y_M \to \infty$ an.

Formelsammlung

A: Heaviside-Funktion: $\theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

B: $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$

C: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi, \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$

D: $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ldots, \qquad \cos 180° = -1, \qquad \ln 2 = 0.69\ldots$

E: $\operatorname{tr} R(\vec{\phi}) = 1 + 2\cos\phi$

F: $(1+x)^b = 1 + bx + \mathcal{O}(x^2)$.

G: Fallbeschleunigung in Erdnähe: $g = 9,8\,\frac{m}{s}$.

H: $\int_1^b \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\,dz = \sqrt{1-b^2} - \ln\left(\sqrt{1-b^2}+1\right) + \ln b$

Nächste Termine:

- Termin und Ort der **Klausureinsicht** ist der 21. Februar von 14:00 - 16:00 Uhr im Seminarraum 6/1.
- Die **mündlichen Prüfungen** der Studierenden, die zweimal die schriftliche Prüfung nicht bestanden haben, werden am 29.2.2024 und 1.3.2024 im Büro 11/14 stattfinden. Sie bekommen per E-Mail eine Uhrzeit zugewiesen.

Alle Räume sind im Gebäude CS30.23. Achten Sie auf Änderungen der Termine im ILIAS!