Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2023

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. L. Chen, Tim Kretz

Erste Klausur: Lösung
Abgabe: 19.2.2024, ca. 20 Uhr

Vorname:
Familienname:

E-Mail-Adresse:

Matrikelnummer:
+ selbstgewählte Verschlüsselungsnummer (unbedingt merken!):
= Nummer, mit der wir das Ergebnis öffentlich zeigen:

Studienfach:

Tutorgruppe: **Versuch:** erster zweiter

A1 (20 Punkte)	a)	b)	c)	d)		
A2 (20 Punkte)	a)(6P)	b)(4P)	c)(6P)	d)(4P)		
A3 (20 Punkte)	a)(4P)	b)(6P)	c)(6P)	d)(4P)		
A4 (20 Punkte)	a)(4P)	b)(2P)	c)(4P)	d)(4P)	e)(6P)	
A5 (20 Punkte)	a)(8P)	b)(7P)	c)(5P)			
A6 (20 Punkte)	a)(3P)	b)(3P)	c)(4P)	d)(2P)	e)(4P)	f)(4P)
Σ (120 Punkte)						

Lesen Sie den folgenden Text zu Beginn der Klausur bitte sorgfältig durch!
Bitte schreiben Sie oben in jedes Kästchen maximal einen Buchstaben oder eine Ziffer. Schreiben Sie nichts in die Punktetabelle, sie dient der Korrektur. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch. Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen. Bitte kennzeichnen Sie die Endergebnisse der Teilaufgaben deutlich, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Wenn Sie mehr Papier brauchen, heben Sie bitte die Hand.
Legen Sie bitte zu Beginn der Klausur Ihre Studentenausweise neben sich auf den Tisch; sie werden während der Klausur kontrolliert. Wer seinen Studentenausweis vergessen hat, verwendet einen anderen Lichtbildausweis.
Die Benutzung elektronischer Geräte (Taschenrechner, Mobiltelefone, Tablet-Computer,...) oder anderer Hilfsmittel (Fachbücher, Aufzeichnungen, ältere Geschwister...) ist nicht gestattet.
Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Es ist erlaubt, die bearbeitete Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit von 2 Zeitstunden abzugeben und den Raum zu verlassen. Jedoch: In den letzten 20 Minuten der Bearbeitungszeit darf niemand mehr den Raum verlassen!
Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite. (Die Klausuraufsicht hilft beim Klammern; die Verantwortung für die Vollständigkeit der

eingereichten Klausur liegt jedoch bei Ihnen.) Die übrigen Seiten der Aufgabenstellung müssen nicht abgegeben werden. Bitte schreiben Sie auch keine Lösungen auf den Aufgabenzettel. Es gibt keine Punkte auf richtiges Rechnen mit falschem Ansatz! **Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 60 Punkte.** Empfehlung: Lesen Sie unbedingt vor der Bearbeitung der Aufgaben die **Formelsammlung** am Ende durch, damit Sie auf die richtigen Ideen kommen. Sie dürfen sich ohne Beweis auf diese Formeln beziehen.

Aufgabe 1: Verständnisfragen (20 Punkte)
Kreuzen Sie die richtigen Antworten an, es ist in jeder Teilfrage mindestens eine Antwort richtig. Korrekte Kreuze geben zwei Punkte, falsch gesetzte Kreuze geben -2 Punkte. Ist die Summe aller Punkte von Aufgabe 1 negativ, so werden 0 Punkte verbucht. Begründungen für die Antworten sind nicht erforderlich.

a) Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschreibt ...

- [ ] ... eine Drehspiegelung um die z-Achse mit Winkel 45°,
- [ ] ... eine Drehung um die z-Achse mit Winkel 45°,
- [ ] ... eine Drehung um die z-Achse mit Winkel 180°,
- [X] ... eine Drehung um eine Achse, die in der (x, y)-Ebene liegt, mit Winkel 180°.

b) Eine Masse m bewegt sich im erdnahen Schwerefeld mit $\ddot{\vec{r}} = -g\vec{e}_z$, $g =$ const., und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_{x0}, 0, v_{z0})^T$, wobei $v_{x0} > 0$, $v_{z0} > 0$ ist.

- [X] Die Bahnkurve ist eine Parabel, die sog. Wurfparabel.
- [X] Die Masse übt auf die (als ∞-schwer angenommene) Erde die Kraft $\vec{F}_{\text{Erde}} = mg\vec{e}_z$ aus. *(actio = reactio)*
- [ ] Die z-Komponente der auf m wirkenden Kraft nimmt zunächst stetig im Betrag ab, wechselt im Scheitelpunkt der Bahnkurve das Vorzeichen und nimmt dann im Betrag wieder zu.
- [X] Die potentielle Energie von m ist am Punkt der Bahnkurve maximal, an dem $v_z = 0$ ist.

c) Die Corioliskraft......

- [X] ... führt auf der Nordhalbkugel zu einer Kreisbewegung von Tiefdruckgebieten im Gegenuhrzeigersinn,
- [X] ... lenkt die von Norden oder Süden auf den Äquator strömende Luft nach Westen ab (Passatwind),
- [ ] ... lenkt die von Norden oder Süden auf den Äquator strömende Luft nach rechts ab (Passatwind),
- [X] ... existiert in rotierenden Bezugssystemen und steht senkrecht auf der Rotationsachse.

d) Ein zeitunabhängiges Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ habe in jedem Punkt $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ die Eigenschaft $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Dann gilt:

- [ ] $\vec{F}$ ist Zentralkraft, also $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(|\vec{r}|)$.
- [X] Es gibt ein Potential $V(\vec{r})$ mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$.
- [X] Für Bewegungen im Kraftfeld gilt Energieerhaltung.
- [X] Die geleistete Arbeit $W[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ hängt von den Endpunkten des Weges $\mathcal{C}$, aber nicht von seinem Verlauf ab.

Aufgabe 2: Reibungskraft (20 Punkte)
Zur Erforschung einer neuen viskosen Flüssigkeit soll das in ihr geltende Reibungsgesetz erforscht werden. Für den Betrag der Reibungskraft wird der Ansatz $F_R = \alpha v^\beta$ mit $\alpha, \beta > 0$ gewählt, wobei v der Betrag der Geschwindigkeit ist. Um α und β zu bestimmen, wird eine Kugel der Masse m aus der Höhe h senkrecht (mit Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$) fallen gelassen und ihre Geschwindigkeit gemessen. $v(t)$ erfüllt also die Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = mg - \alpha v^\beta. \tag{1}$$

Diese Gleichung kann man i.A. nicht analytisch lösen.
a) (6 Punkte) Für $t \to \infty$ strebt v gegen eine Grenzgeschwindigkeit v_G. Bestimmen Sie v_G und eliminieren Sie α und m zugunsten von v_G, d.h. drücken Sie $\dot{v}$ durch g, v_G und β aus. Benutzen Sie diese Formel in allen folgenden Teilaufgaben.
Hinweis: Zur Vermeidung von Flüchtigkeitfehlern überprüfen sie am besten Ihre Formel für $v = 0$ und für $v = v_G$.

Es gilt $v = v_G$ für $\dot{v} = 0$. 2 Punkte
Gl. (1) $\Rightarrow$ $mg - \alpha v_G^\beta = 0,\ v_G = \left(\frac{mg}{\alpha}\right)^{1/\beta}$ 2 Punkte

$$\dot{v} = g\left[1 - \left(\frac{v}{v_G}\right)^\beta\right].$$ 2 Punkte

b) (4 Punkte) Um auch β zu bestimmen benötigen wir eine zweite Messung. Dazu studieren wir die Bewegung für große Zeiten, zu denen

$$w := 1 - \frac{v}{v_G} \tag{2}$$

klein ist, und zwar $0 < w \leq 0.1$. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für w.

$v = v_G(1 - w)$ 1 Punkt
$\dot{v} = -v_G\dot{w}$ 1 Punkt
$\dot{w} = -\frac{\dot{v}}{v_G} = -\frac{g}{v_G}\left[1 - (1 - w)^\beta\right]$ 2 Punkte

c) (6 Punkte) Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung in w zur ersten Ordnung, sodass Sie eine lineare Differentialgleichung finden. Lösen Sie diese Gleichung, wobei Sie die Integrationskonstante durch $w_0 := w(t_0)$ ausdrücken.

$$\dot{w} \overset{\text{F}}{=} -\frac{g}{v_G}\left[1 - (1-\beta w) + \mathcal{O}(w^2)\right] = -\frac{g\beta}{v_G} w \qquad \text{2 Punkte}$$

$$w(t) = Ce^{-\frac{g\beta}{v_G}t} \qquad \text{2 Punkte}$$

$$w(t) = w(t_0)e^{-\frac{g\beta}{v_G}(t-t_0)} \qquad \text{2 Punkte}$$

Es ist nicht nötig, Zwischenschritte wie $\ln w(t) = C' + t$ anzugeben.

d) (4 Punkte) Für $v_G = 9,8\frac{m}{s}$ misst man, dass sich die fallende Kugel in $\Delta t = 0,23\,s$ von $0{,}9\,v_G$ auf $0{,}95\,v_G$ beschleunigt. Bestimmen Sie aus dieser Information β.

$$w(t_0) = 0,1, \qquad w(t_0+\Delta t) = 0,05, \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\frac{w(t_0+\Delta t)}{w(t_0)} = \frac{1}{2} = e^{-\frac{g\beta}{v_G}\Delta t} \qquad \text{1 Punkt}$$

$$-\frac{g\beta}{v_G}\Delta t = -\ln 2$$

$$\beta = \frac{v_G \ln 2}{g\Delta t} \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\overset{D}{=} \frac{0.69\,s}{0.23\,s} = 3,0. \qquad \text{1 Punkt}$$

Aufgabe 3: Corioliskraft (20 Punkte)
Der Ort $\vec{r}$ eines Fahrzeugs sei durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Fahrzeug fahre auf der Nordhalbkugel der Erde mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = v_{\text{Süd}}\vec{e}_\theta + v_{\text{Ost}}\vec{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.

a) (4 Punkte) Beweisen Sie die Beziehung

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta. \tag{3}$$

Mit Gleichung B gilt

$$\vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta = \begin{pmatrix}\sin\theta\,\cos\phi\\ \sin\theta\,\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\cos\theta - \begin{pmatrix}\cos\theta\,\cos\phi\\ \cos\theta\,\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\sin\theta = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \cos^2\theta + \sin^2\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{e}_z\,.$$

Es gibt entweder 4 oder 0 Punkte.

b) (6 Punkte) Berechnen Sie die Coriolisbeschleunigung

$$\vec{a}_C = -\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}, \tag{4}$$

die auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten, also in der Form $\vec{a}_C = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\phi\vec{e}_\phi$ an.

Wir berechnen mit Gl. C:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= -\omega(\vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta)\times(v_{\text{Süd}}\vec{e}_\theta + v_{\text{Ost}}\vec{e}_\phi)\\ &= -\omega(v_{\text{Süd}}\cos\theta\vec{e}_\phi - v_{\text{Ost}}\cos\theta\vec{e}_\theta - v_{\text{Ost}}\sin\theta\vec{e}_r)\ .\end{aligned}$$

Also ist $a_r = \omega v_{\text{Ost}}\sin\theta$, $a_\theta = \omega v_{\text{Ost}}\cos\theta$ und $a_\phi = -\omega v_{\text{Süd}}\cos\theta$ jeweils 2 Punkte.

c) (6 Punkte) Betrachten Sie den Fall, dass das Fahrzeug sich nach Süden bewegt. Durch die Coriolisbeschleunigung wird es in West-Ost-Richtung abgelenkt. Berechnen Sie $v_{\text{Ost}}(t)$, wobei Sie $v_{\text{Süd}}$, θ und $\vec{e}_{r,\theta,\phi}$ als zeitlich konstant annehmen dürfen. Berechnen Sie $s(t) = \int_0^t dt' v_{\text{Ost}}(t')$. Wird das Fahrzeug nach Westen oder Osten abgelenkt?

Es ist (2 Punkte)

$$v_{\text{Ost}}(t) = \int_0^t \mathrm{d}\,t'\vec{a}_C\cdot\vec{e}_\phi = -\omega\,t\,v_{\text{Süd}}\,\cos\theta\ ,$$

Und damit ist (3 Punkte)

$$s(t) = \int_0^t \mathrm{d}\,t' v_{\text{Ost}}(t') = -\frac{1}{2}\omega\,t^2\,v_{\text{Süd}}\,\cos\theta\ .$$

Das Auto wird also nach Westen abgelenkt (1 Punkt).

d) (4 Punkte) Betrachten Sie das Zahlenbeispiel mit $v_{\text{Süd}} = 40\frac{m}{s}$, $\theta = 45°$ und $\omega = \frac{3}{4}\cdot 10^{-4}\frac{1}{s}$: Wie groß ist $s(t)$ für $t = 60\,s$, d.h. wie weit kommt das Fahrzeug in einer Minute aus der Spur?
Es reicht aus, wenn Sie das Ergebnis auf zwei signifikante Stellen angeben.

Das Fahrzeug weicht etwa 3,8 m ab. (Es gibt entweder 4 oder 0 Punkte.)

Aufgabe 4: Aufzug (20 Punkte)
Ein Aufzug verbindet Bahnhofshalle bei $z = 0$ mit einem Bahnsteig bei $z = h$. Die Steuerung ist so programmiert, dass der Aufzug mit kleiner Geschwindigkeit v_{z0} losfährt und ankommt, und zwar gemäß

$$|\dot{z}| = \alpha z(h-z) + v_{z0}, \qquad \text{mit } \alpha, v_{z0} > 0. \tag{5}$$

a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Koeffizienten A und B der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\alpha z(h-z)+v_{z0}} = \frac{A}{z-z_A} + \frac{B}{z-z_B} \quad \text{mit } z_A = \frac{h}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{v_{z0}}{\alpha h^2}}\right),\quad z_B = \frac{h}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{v_{z0}}{\alpha h^2}}\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{A}{z-z_A} + \frac{B}{z-z_B} &= \frac{(A+B)z - Bz_A - Az_B}{(z-z_A)(z-z_B)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\alpha z(h-z)+v_{z0}}\\ \Rightarrow \qquad & A = -B \qquad \text{1 Punkt}\\ \text{und} \qquad & A = \frac{1}{(z_B-z_A)\alpha} \qquad \text{3 Punkte}\end{aligned}$$

Es ist erlaubt, aber nicht notwendig, hier $z_B - z_A$ durch $h\sqrt{1+4\frac{v_{z0}}{\alpha h^2}}$ auszudrücken.

b) (2 Punkte) Welche Vorzeichen haben $z - z_A$ und $z_B - z$ für $z \in [0, h]$?

$$\begin{aligned} z_A < 0 \quad &\Rightarrow \quad (z - z_A) > z \geq 0 \qquad \text{1 Punkt} \\ z_B > h \quad &\Rightarrow \quad (z_B - z) > (h - z) \geq 0 \qquad \text{1 Punkt} \end{aligned}$$

Die Punkte gibt es für die richtige Antwort, die gezeigte Herleitung ist nicht erforderlich.

c) (4 Punkte) Ab jetzt betrachten wir einen aufwärts fahrenden Aufzug, $\dot{z} > 0$. Bestimmen Sie $z(t)$ aus Gl. (5) für $z(0) = 0$. Achten Sie darauf, dass Argumente von Logarithmen positiv sind. Verwenden Sie A, z_A und z_B, sie brauchen diese Größen nicht durch α, h und v_{z0} auszudrücken.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{z}}{alz(h-z) + v_{z0}} &= 1 \\ \left[\frac{A}{z - z_A} - \frac{A}{z - z_B}\right]\dot{z} &= 1 \\ \int_0^z \left[\frac{A}{z' - z_A} - \frac{A}{z' - z_B}\right] dz' &= t \qquad \text{1 Punkt} \end{aligned}$$

Der Punkt wird auch gegeben, wenn ein unbestimmtes Integral angegeben wird und die Integationskonstante später aus $z(0) = 0$ bestimmt wird.

$$\begin{aligned} t &= \int_0^z \left[\frac{A}{z' - z_A} - \frac{A}{z' - z_B}\right] dz' = A\left[\ln\frac{z' - z_A}{z_B - z'}\right]_0^z \\ &= A\left[\ln\frac{z - z_A}{z_B - z} - \ln\frac{-z_A}{z_B}\right] \\ &= A\ln\frac{zz_B - z_Az_B}{zz_A - z_Az_B} \qquad \text{1 Punkt} \qquad \text{Gl. (Lsg-4c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{A}}(zz_A - z_Az_B) &= zz_B - z_Az_B \\ z\left(e^{\frac{t}{A}}z_A - z_B\right) &= z_Az_B\left(e^{\frac{t}{A}} - 1\right) \\ \Rightarrow \qquad z &= -z_Az_B\frac{e^{\frac{t}{A}} - 1}{z_B - z_Ae^{\frac{t}{A}}} \qquad \text{2 Punkte} \end{aligned}$$

d) (4 Punkte) Zu welcher Zeit T erreicht der Aufzug den Bahnsteig? Hinweis: $h = z_A + z_B$.

Gl. (Lsg-4c) für $t = T$ und $z = h$:

$$T = A\ln\frac{(h - z_A)z_B}{(h - z_B)z_A} \qquad \text{3 Punkte}$$

$$\text{Verwende } z_A + z_B = h: \qquad T = A\ln\frac{z_B^2}{(-z_A)^2} = 2A\ln\frac{z_B}{-z_A} \qquad \text{1 Punkt}$$

Achtung: Die Lösung $T = 2A \ln \frac{z_B}{z_A}$ ist wegen $z_B/z_A < 0$ falsch, da der Logarithmus dann einen Imaginärteil $\neq 0$ hat.

e) (6 Punkte) Wir betrachten den Fall $v_{z0} < \alpha h^2/2$. Für welche z wird die Beschleunigung $\ddot{z}$ minimal bzw. maximal?

$$\text{Gl. (5)} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{z} &= \alpha\dot{z}(h-z) - \alpha z\dot{z} \\ &= \alpha\dot{z}(h-2z) \qquad \text{1 Punkt} \\ &\stackrel{(5)}{=} \alpha(h-2z)\left[\alpha z(h-z) + v_{z0}\right] \qquad \text{1 Punkt} \qquad \textit{Gl. (Lsg} - \textit{4e)} \end{aligned}$$

Es ist natürlich auch korrekt, diese Formeln aus $\dot{z} = A(z-z_A)(z-z_B)$ abzuleiten:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= A\dot{z}(z-z_B) + A\dot{z}(z-z_A) \;=\; A\dot{z}(2z-z_A-z_B) \\ &= A^2(z-z_A)(z-z_B)(2z-z_A-z_B). \end{aligned}$$

Minimum/Maximum von $\ddot{z}$:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \frac{d}{dz}\ddot{z} = 6\alpha^2 z^2 - 6\alpha^2 hz + \alpha^2 h^2 - 2\alpha v_{z0} \qquad \text{1 Punkt} \\ \text{alternativ:} \quad 0 &= A^2\left(6z^2 - 6z(z_A+z_B) + z_A^2 + 4z_Az_B + z_B^2\right) \end{aligned}$$

Nullstellen liefern Extrema:

$$z_{\text{extr}\,1} = \frac{h}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{1+4v_{z0}/(h^2\alpha)}{3}}\right], \qquad z_{\text{extr}\,2} = \frac{h}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{1+4v_{z0}/(h^2\alpha)}{3}}\right] \qquad \text{2 Punkte}$$

$$\text{alternativ:} \quad z_{\text{extr}\,1,2} = \frac{z_A+z_B}{2} \mp \frac{z_B-z_A}{2\sqrt{3}}$$

Nun ist wegen $v_{z0} < \alpha h^2/2$ die Bedingung $z_{\text{extr}\,1} > 0$ erfüllt und wegen $z_{\text{extr}\,2} = h - z_{\text{extr}\,1}$ liegen also beide Extrema im Intervall $[0,h]$. D.h. Fahrgäste im Aufzug erfahren tatsächlich diese extremalen Beschleunigungen. Für die alterntive Lösung findet man das Ergbnis so: $z_B - z_A = h\sqrt{1+4\frac{v_{z0}}{\alpha h^2}} < h\sqrt{1+2} = h\sqrt{3} = (z_A+z_B)\sqrt{3}$, also

$$z_{\text{extr}\,1} > \frac{z_A+z_B}{2} - \frac{z_A+z_B}{2} = 0$$

Die Verifizierung $z_{\text{extr}\,1,2} \in [0,h]$ war nicht gefragt in der Aufgabe, daher gibt es hier weder Punkte noch Punktabzug. (Verletzt man die Bedingung $v_{z0} < \alpha h^2/$, so sind die extremalen Beschleunigungen der Aufzugfahrt bei $z=0$ und $z=h$.)
Aus Gl. (Lsg-4e) lesen wir ab, dass $\ddot{z} > 0$ ist für $0 \leq z < h/2$ und $\ddot{z} = 0$ bei $z = h/2$. Außerdem ist $z_{\text{extr}\,1} < \frac{h}{2}$. Damit kann $z_{\text{extr}\,1}$ kein Minimum von $\ddot{z}$ sein, denn $\ddot{z}(z_{\text{extr}\,1}) > \ddot{z}(h/2) = 0$. Also

$$\ddot{z}_{\text{max}} \text{ bei } \quad z = z_{\text{extr}\,1}, \qquad \ddot{z}_{\text{min}} \text{ bei } \quad z = z_{\text{extr}\,2}. \qquad \text{1 Punkt}$$

Aufgabe 5: Schwingungsdifferentialgleichung (20 Punkte)

Die Lösung von

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x \;=\; F_0\,\theta(t) e^{-\alpha t} \tag{6}$$

für $m, \omega, \alpha > 0$ und $F_0 \in \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$, wobei $x_h(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist, und $x_i(t)$ mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion

$$G(t-t') \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } t \le t', \\ \frac{1}{m\omega}\sin\left[\omega(t-t')\right] & \text{für } t \ge t', \end{cases}$$

für $t \geq 0$ als $x_i(t) = \int_0^t dt'\, G(t-t')\, F_0\, e^{-\alpha t'}$ bestimmt werden kann.

a) (8 Punkte) Berechnen Sie $x_i(t)$.

Hinweise: (i) $\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i)$, (ii) Fassen Sie die Terme so zusammen, dass im Ergebnis alle Summanden reell sind, (iii) Überprüfen Sie $x_i(0) = 0$ in Ihrer Lösung.

$$x_i(t) = \frac{F_0}{2m\omega i}\int_0^t dt' \left[e^{i\omega t} e^{(-i\omega-\alpha)t'} - e^{-i\omega t} e^{(i\omega-\alpha)t'}\right] \qquad \text{2 Punkte}$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega i}\left[e^{i\omega t}\left[\frac{e^{(-i\omega-\alpha)t'}}{-i\omega-\alpha}\right]_0^t - e^{-i\omega t}\left[\frac{e^{(i\omega-\alpha)t'}}{i\omega-\alpha}\right]_0^t\right] \qquad \text{2 Punkte}$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega i}\left[e^{-\alpha t}\frac{1}{-i\omega-\alpha} - e^{-\alpha t}\frac{1}{i\omega-\alpha} - \frac{e^{i\omega t}}{-i\omega-\alpha} + \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega-\alpha}\right]$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega i}\left[e^{-\alpha t}\frac{2i\omega}{\omega^2+\alpha^2} - \frac{(i\omega-\alpha)e^{i\omega t} - (-i\omega-\alpha)e^{-i\omega t}}{\omega^2+\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{F_0}{m\omega}\left[e^{-\alpha t}\frac{\omega}{\omega^2+\alpha^2} - \frac{\omega\cos(\omega t) - \alpha\sin(\omega t)}{\omega^2+\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{F_0}{m\omega}\,\frac{\omega e^{-\alpha t} + \alpha\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)}{\omega^2+\alpha^2} \qquad \text{4 Punkte}$$

b) (7 Punkte) Bestimmen Sie nun F_0 und α für vorgegebenes ω, A und B so, dass unsere Schwingung für $t \to \infty$ verschwindet, d.h. $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Welche Bedingung müssen die Vorzeichen von A und B erfüllen, damit es eine solche Lösung gibt?

$$x(t) \;=\; x_h(t) + x_i(t) \;= \frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\,e^{-\alpha t} + \left[\frac{F_0}{m\omega(\omega^2+\alpha^2)}\alpha + A\right]\sin(\omega t) \;+\; \left[-\frac{F_0}{m\omega(\omega^2+\alpha^2)}\omega + B\right]\cos(\omega t) \qquad \text{2 Punkte}$$

Die Schwingung verschwindet genau dann für $t \to \infty$, wenn

$$A = -\frac{F_0}{m\omega(\omega^2+\alpha^2)}\alpha, \qquad B = \frac{F_0}{m\omega(\omega^2+\alpha^2)}\omega = \frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}. \qquad \text{2 Punkte}$$

Also:

$$\frac{A}{B} = -\frac{\alpha}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\omega\frac{A}{B} \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\text{und} \quad F_0 = m(\omega^2+\alpha^2)B \qquad \text{1 Punkt}$$

Wegen $\alpha, \omega > 0$ müssen A und B entgegengesetzte Vorzeichen haben, also $AB < 0$. 1 Punkt

c) (5 Punkte) Bestimmen Sie für die in Teilaufgabe (b) gefundene Lösung die Energie der schwingenden Masse $E(t) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right)$ für $t \geq 0$, ausgedrückt durch F_0, α und ω.

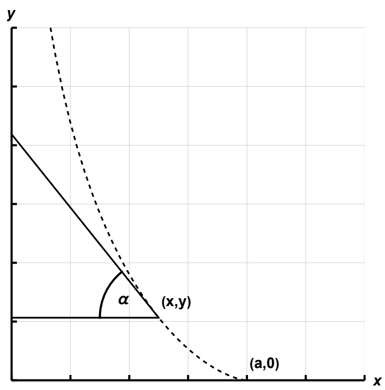
$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}e^{-\alpha t}$$

$$\dot{x} = -\frac{F_0\alpha}{m(\omega^2+\alpha^2)}e^{-\alpha t}, \qquad \text{1 Punkt}$$

$$E(t) = \frac{m}{2}\left(\frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\right)^2 e^{-2\alpha t}\left(\alpha^2+\omega^2\right) = \frac{F_0^2}{2m(\omega^2+\alpha^2)}e^{-2\alpha t} \qquad \text{4 Punkte}$$

Aufgabe 6: Traktrix (20 Punkte)

Ein Mensch geht auf der y-Achse von $y = 0$ in Richtung $y > 0$ und zieht einen auf rauer Fläche liegenden Gegenstand an einem Seil mit Länge a hinter sich her. Das Seil spannt sich also tangential zur Kurve $(x, y(x))$, die der Gegenstand durchläuft.



a) (3 Punkte) Drücken Sie $\frac{dy}{dx}$ durch $\tan\alpha$ sowie x durch a und $\cos\alpha$ aus. Hinweis: Welches Vorzeichen hat dy?

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\tan\alpha \qquad \text{2 Punkte} \qquad\qquad x = a\cos\alpha \qquad \text{1 Punkt}$$

b) (3 Punkte) Drücken Sie $\frac{dy}{dx}$ durch x und a aus.

Mit $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ findet man

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\tan\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\left(\frac{x}{a}\right)} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \qquad \text{3 Punkte} \qquad \text{Gl. (Lsg-6b)}$$

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie $y(x)$ zu $y(a) = 0$.

$$y(x) \;=\; \int_a^x \mathrm{d}x' \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x'} \;=\; -\int_a^x \mathrm{d}x' \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x'}{a}\right)^2}}{\left(\frac{x'}{a}\right)}, \qquad \text{2 Punkte}$$

Substitution $z = x'/a$ liefert das Integral aus H:

$$y(x) = -\sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+1\right) + a\ln\frac{x}{a}. \qquad \text{2 Punkte}$$

d) (2 Punkte) Wir betrachten nun den zeitabhängigen Weg $(0, Y_M(t))$ des Menschen mit $Y_M(0) = 0$ und $Y_M(t) \geq 0$. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}(Y_M - y) = \frac{d}{dt}\sqrt{a^2-x^2}$$

Pythagoras:

$$\left(Y_M - y\right)^2 + x^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y_M - y\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{a^2-x^2} \qquad \text{2 Punkte} \qquad \text{Gl. (Lsg-6d)}$$

e) (4 Punkte) Drücken Sie (für $t > 0$) $\dot{y}$ durch $\dot{Y}_M$, x und a aus. Hinweis: $\dot{y} = \dot{x}\frac{dy}{dx}$.

Mit Gl. (Lsg-6d):

$$\dot{y} \;=\; \dot{Y}_M + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\overset{(\text{Lsg}-6\text{b})}{=} \;\dot{Y}_M - \frac{x\dot{y}}{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \;=\; \dot{Y}_M - \dot{y}\frac{x^2}{a^2-x^2} \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\dot{y}\left(1+\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) \;=\; \dot{Y}_M,$$

also

$$\dot{y} = \frac{a^2-x^2}{a^2}\dot{Y}_M. \qquad \text{2 Punkte}$$

f) (4 Punkte) Berechnen Sie $\dot{x}$ und $v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, ausgedrückt durch $\dot{Y}_M$, x und a. Geben Sie $v/\dot{Y}_M$ für $Y_M = 0$ und $Y_M \to \infty$ an.

$$\dot{x} \;=\; \dot{y}\frac{dx}{dy} \;=\; -\frac{a^2-x^2}{a^2}\dot{Y}_M\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\;=\; -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\dot{Y}_M \qquad \text{1 Punkt}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \;=\; \dot{Y}_M\sqrt{\frac{x^2(a^2-x^2)}{a^4}+\frac{(a^2-x^2)^2}{a^4}} \;=\; \dot{Y}_M\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad \text{2 Punkte}$$

Für $Y_M = 0$ ist $x = a$ und somit $v = 0$. Für $Y_M \to \infty$ strebt $x \to 0$ und $v \to \dot{Y}_M$. 1 Punkt

Formelsammlung

A: Heaviside-Funktion: $\theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases}$

B: $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta \, \cos\phi \\ \sin\theta \, \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \, \cos\phi \\ \cos\theta \, \sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$

C: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi, \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$

D: $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ldots, \qquad \cos 180^\circ = -1, \qquad \ln 2 = 0.69\ldots$

E: $\mathrm{tr}\, R(\vec{\phi}) = 1 + 2\cos\phi$

F: $(1+x)^b = 1 + bx + \mathcal{O}(x^2).$

G: Fallbeschleunigung in Erdnähe: $g = 9,8\,\frac{m}{s}$.

H: $\int_1^b \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\, dz = \sqrt{1-b^2} - \ln\left(\sqrt{1-b^2} + 1\right) + \ln b$

Nächste Termine:

- Termin und Ort der **Klausureinsicht** ist der 21. Februar von 14:00 - 16:00 Uhr im Seminarraum 6/1.
- Die **mündlichen Prüfungen** der Studierenden, die zweimal die schriftliche Prüfung nicht bestanden haben, werden am 29.2.2024 und 1.3.2024 im Büro 11/14 stattfinden. Sie bekommen per E-Mail eine Uhrzeit zugewiesen.

Alle Räume sind im Gebäude CS30.23. Achten Sie auf Änderungen der Termine im ILIAS!