Karlsruhe Institute of Technology

Wintersemester 2024/25
Theorie A - Klausur 1

Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

6.3.2025

Tragen Sie bitte leserlich Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in den dafür vorgesehenen Feldern auf der hier vorliegenden Titelseite ein und geben Sie dieses Blatt nach Beendigung der Klausur mit ab. Schreiben Sie auch auf jedes von Ihnen beschriebene Blatt leserlich Ihre Matrikelnummer. Die Klausuraufgaben sind nach Beendigung der Klausur mit abzugeben.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt ist als Hilfsmittel zugelassen. Verwenden Sie nur ausgegebenes Papier. Falls Sie mehr Papier benötigen melden Sie sich. Verwenden Sie weder Bleistifte noch rote Stifte.

Wir wünschen viel Erfolg!

Bitte auf dieser Seite ab hier nichts mehr ausfüllen!

Aufgabe	1)	2)	3)	4)	5)	Summe
Punkte	/14	/7	/6	/5	/8	
Kürzel						

Aufgabe 1: Warm-up $\boxed{\textbf{14P}}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen in wenigen Sätzen und Formeln.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Gegeben seien die Vektoren $\vec{r} = (3, 2)$ und $\vec{a} = (1, 2)$ im $\mathbb{R}^2$. Zerlegen Sie $\vec{r}$ in Parallel- und Senkrechtkomponenten bzgl. $\vec{a}$.
Schreiben Sie also $\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$ mit $\vec{r}_\parallel \parallel \vec{a}$ und $\vec{r}_\parallel \perp \vec{r}_\perp$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante für die Transformation von kartesischen zu Polarkoordinaten und berechnen Sie damit die Fläche eines Kreises mit Radius R.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Wie lässt sich die Bogenlänge s einer Bahnkurve $\vec{r}(t)$ bestimmen?

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ die ersten drei Terme der Taylorentwicklung um $x = 0$.

(e) $\boxed{\text{2P}}$ Zeigen Sie, dass der Drehimpuls erhalten ist, wenn auf eine Masse m lediglich eine Zentralkraft wirkt, also falls $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$.

(f) $\boxed{\text{1P}}$ Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit wie möglich:
$\epsilon_{ijk} a_i a_j b_k + \delta_{ij}\delta_{jk} a_i b_k$

(g) $\boxed{\text{2P}}$ Zeigen Sie die trigonometrische Identität
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

(h) $\boxed{\text{2P}}$ Skizzieren Sie für den gedämpften, getriebenen harmonischen Oszillator die Abhängigkeit der Amplitude $|A(\omega)|$ sowie Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ von der Anregungsfrequenz ω. Zeichnen Sie in beiden Diagrammen jeweils zwei Kurven für unterschiedliche Werte der Dämpfung β und beschriften Sie diese entsprechend.

(i) $\boxed{\text{1P}}$ Ein eindimensionales System $\Phi(x, t)$ werde durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass der Lösungsansatz $\Phi = A\cos(\omega t - kx)$ die Differentialgleichung erfüllt. Wie hängen die Konstanten c, k und ω zusammen?

Aufgabe 2: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ 7P

$R = R(\vec{\phi})$ bezeichne die Matrix einer Drehung um die Achse $\vec{n} = \vec{\phi}/\phi$ mit dem Winkel $\phi \neq 0$.

(a) 2P Welche der folgenden Eigenschaften ist erfüllt?
i) $R^T R = \mathbb{1}$, ii) $R^T = R$, iii) $R(-\vec{\phi}) = [R(\vec{\phi})]^{-1}$, iv) $\det R = 0$,
v) Der i-te Spaltenvektor steht senkrecht auf dem j-ten Spaltenvektor für $i \neq j$.
Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich.

(b) 1P Bergründen Sie, weshalb $(R - R^T)\vec{n} = 0$ gilt.

Betrachten Sie im Folgenden die Drehmatrix:

$$R(\vec{\phi} = \phi\vec{n}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(c) 2P Bestimmen Sie $\vec{n}$.

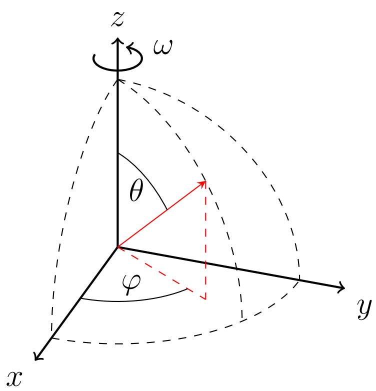
(d) 2P Bestimmen Sie ϕ.

Hinweis:

ϕ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\phi$	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Aufgabe 3: Zentrifugal- und Corioliskraft 6P

Der Ort $\vec{r}$ eines Fahrzeugs auf der Erdoberfläche wird duch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Fahrzeug fahre mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = v_s\vec{e}_\theta + v_o\vec{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.



(a) 1P Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta.$$

(b) 2P Berechnen Sie die Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}},$$

die durch die Erdrotation auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten an.

(c) 2P Berechnen Sie die Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

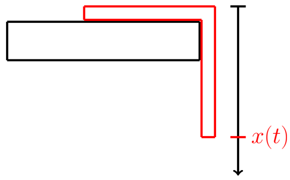
die durch die Erdrotation auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie das Ergebnis wieder in Kugelkoordinaten an.

(d) 1P Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung muss das Fahrzeug fahren, damit sich die beiden Kräfte gerade aufheben?

Hinweis: Es gilt: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi$, $\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$.

Aufgabe 4: Seil über Tischkante $\boxed{\textbf{5P}}$

Ein Seil der Länge l und Masse m gleite über die Tischkante reibungsfrei ab, wobei es anfänglich mit der Länge x_0 über die Tischkante hänge. Es wirkt die Gewichtskraft auf den nach unten hängenden Teil des Seiles.



(a) $\boxed{\text{3P}}$ Parametrisieren Sie die Masse $m(t)$ des nach unten hängenden Teiles als Funktion von $x(t)$ und zeigen Sie, dass für die Gewichtskraft $F(t) = m\frac{g}{l}x(t)$ gilt. Zeigen Sie, dass dies auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l}x(t)$$

führt. Lösen Sie die Gleichung unter den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn das Ende des Seils gerade über die Kante rutscht?

Hinweis: Die Hyperbelfunktionen sind hier hilfreich:
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Aufgabe 5: Kraftfeld $\boxed{\textbf{8P}}$

Gegeben sei das Kraftfeld ($\vec{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = (by^2 - 2ax^2)\vec{e}_x + 4axy\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z\,.$$

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Welche Bedingung müssen Sie an die Konstanten a und b stellen, damit ein Potential $\phi(\vec{r})$ existiert, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ gilt? Nutzen Sie die Bedingung, um b zu eliminieren.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie das zu $\vec{F}(\vec{r})$ zugehörige Potential $\phi(\vec{r})$ mit eliminierter Konstante b gemäß Teilaufgabe (a).

(c) $\boxed{\text{4P}}$ Bestimmen Sie (für die Konstanten aus Aufgabenteil (a)) durch explizite Rechnung der Wegintegrale die geleistete Arbeit entlang der Wege:

- C_1: Auf direktem Weg von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 0)$.
- C_2: In einem Viertelkreis um die x-Achse von $(1, 1, 0)$ nach $(1, 0, 1)$.

Hinweis: $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Nutzen Sie nun, dass das Kraftfeld konservativ ist und überprüfen Sie mit Hilfe des Potentials $\phi(\vec{r})$ Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (c).