# Wintersemester 2024/25
# Theorie A - Musterlösung Klausur 1

Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

6.3.2025

## Aufgabe 1: Warm-up 14P

Beantworten Sie die folgenden Fragen in wenigen Sätzen und Formeln.

(a) 2P Gegeben seien die Vektoren $\vec{r} = (3,2)$ und $\vec{a} = (1,2)$ im $\mathbb{R}^2$. Zerlegen Sie $\vec{r}$ in Parallel- und Senkrechtkomponenten bzgl. $\vec{a}$.
Schreiben Sie also $\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$ mit $\vec{r}_\parallel \parallel \vec{a}$ und $\vec{r}_\parallel \perp \vec{r}_\perp$.

(b) 2P Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante für die Transformation von kartesischen zu Polarkoordinaten und berechnen Sie damit die Fläche eines Kreises mit Radius $R$.

(c) 1P Wie lässt sich die Bogenlänge $s$ einer Bahnkurve $\vec{r}(t)$ bestimmen?

(d) 1P Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ die ersten drei Terme der Taylorentwicklung um $x = 0$.

(e) 2P Zeigen Sie, dass der Drehimpuls erhalten ist, wenn auf eine Masse $m$ lediglich eine Zentralkraft wirkt, also falls $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$.

(f) 1P Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit wie möglich:
$\epsilon_{ijk} a_i a_j b_k + \delta_{ij}\delta_{jk} a_i b_k$

(g) 2P Zeigen Sie die trigonometrische Identität
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

(h) 2P Skizzieren Sie für den gedämpften, getriebenen harmonischen Oszillator die Abhängigkeit der Amplitude $|A(\omega)|$ sowie Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ von der Anregungsfrequenz $\omega$. Zeichnen Sie in beiden Diagrammen jeweils zwei Kurven für unterschiedliche Werte der Dämpfung $\beta$ und beschriften Sie diese entsprechend.

(i) 1P Ein eindimensionales System $\Phi(x,t)$ werde durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass der Lösungsansatz $\Phi = A\cos(\omega t - kx)$ die Differentialgleichung erfüllt. Wie hängen die Konstanten $c, k$ und $\omega$ zusammen?

## Lösung der Aufgabe 1

(a) 2P Der Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$ ist $\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. Die Parallelkomponente ist dann gegeben durch $\vec{r}_\parallel = (\vec{r}\cdot\vec{e}_a)\vec{e}_a = \frac{7}{\sqrt{5}}\vec{e}_a = (\frac{7}{5}, \frac{14}{5})$.
Als Orthogonalkomponente erhalten wir $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_\parallel = (3,2) - (\frac{7}{5}, \frac{14}{5}) = (\frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$.

(b) 2P Die Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Determinante ist dann

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Das Flächenelement ist somit $dA = dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$, und wir erhalten die Kreisfläche:

$$A = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r = \frac{1}{2}R^2 \cdot 2\pi = \pi R^2.$$

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Die Bogenlänge zwischen 2 Bahnpunkten $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ und $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ ist gegeben durch

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt.$$

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Für die Funktion und ihre ersten Ableitungen an der Stelle $x = 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{1+0} = 1, \\ f'(0) &= -\left.\frac{1}{(1+x)^2}\right|_{x=0} = -1, \\ f''(0) &= 2\left.\frac{1}{(1+x)^3}\right|_{x=0} = 2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Taylorentwicklung

$$f(x) = \ln(1+x) \approx \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

(e) $\boxed{\text{2P}}$ Der Drehimpuls ist definiert durch $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$. Leiten wir diesen nach der Zeit ab, erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \underset{m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}(\vec{r})}{=} F(r)\underbrace{\vec{r} \times \vec{e}_r}_{=0} = 0.$$

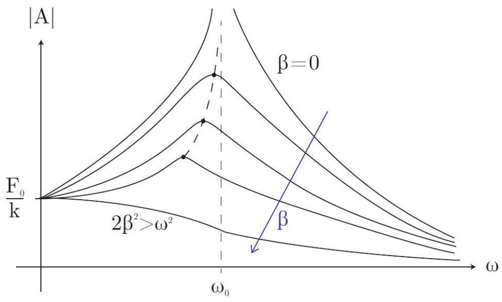
Der Drehimpuls ist somit erhalten.

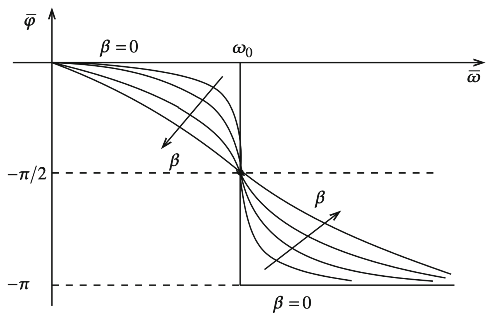
(f) $\boxed{\text{1P}}$ $\epsilon_{ijk}a_i a_j b_k + \delta_{ij}\delta_{jk}a_i b_k = a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}$

(g) $\boxed{\text{2P}}$

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \text{Im}(e^{2ix}) = \text{Im}(e^{ix}e^{ix}) \\ &= \text{Im}((\cos x + i\sin x) \cdot (\cos x + i\sin x)) \\ &= 2\cos x \sin x \end{aligned}$$

(h) $\boxed{2\text{P}}$




(i) $\boxed{1\text{P}}$ Wir setzen den Ansatz in die Differentialgleichung ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\
\rightarrow \quad -k^2 A\cos(\omega t - kx) &= -\frac{1}{c^2}\omega^2 A\cos(\omega t - kx) \\
\rightarrow \quad k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}
\end{aligned}
$$

Der Ansatz erfüllt also die Differentialgleichung, falls $k^2 = \frac{\omega^2}{c}$, bzw. $|k| = |\frac{\omega}{c}|$.

**Aufgabe 2: Drehungen im $\mathbb{R}^3$** $\boxed{\textbf{7P}}$

$R = R(\vec{\phi})$ bezeichne die Matrix einer Drehung um die Achse $\vec{n} = \vec{\phi}/\phi$ mit dem Winkel $\phi \neq 0$.

(a) $\boxed{2\text{P}}$ Welche der folgenden Eigenschaften ist erfüllt?
i) $R^T R = \mathbb{1}$, ii) $R^T = R$, iii) $R(-\vec{\phi}) = [R(\vec{\phi})]^{-1}$, iv) $\det R = 0$,
v) Der $i$-te Spaltenvektor steht senkrecht auf dem $j$-ten Spaltenvektor für $i \neq j$.
Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich.

(b) $\boxed{1\text{P}}$ Bergründen Sie, weshalb $(R - R^T)\vec{n} = 0$ gilt.

Betrachten Sie im Folgenden die Drehmatrix.

$$
R(\vec{\phi} = \phi\vec{n}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
$$

(c) $\boxed{2\text{P}}$ Bestimmen Sie $\vec{n}$.

(d) $\boxed{2\text{P}}$ Bestimmen Sie $\phi$.

*Hinweis:*

| $\phi$ | 0 | $\pi/12$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\phi$ | 1 | $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |

**Lösung der Aufgabe 2**

(a) $\boxed{2\text{P}}$ (0,5P Abzug für jede falsche Antwort)
i) ja ii) nein iii) ja iv) nein v) ja

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Die Drehachse bleibt bei der Drehung unverändert und es gilt somit: $R\vec{n} = \vec{n}$. Außerdem erhalten wir $R(\vec{\phi})^T\vec{n} = R^{-1}(\vec{\phi})\vec{n} = R(-\vec{\phi})\vec{n} = \vec{n}$. Damit gilt $(R - R^T)\vec{n} = 0$.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Wir könnten die Drehachse aus der Eigenschaft $R\vec{n} = 0$ bestimmen. Noch etwas einfacher geht es mit der Relation aus Aufgabenteil b):

$$(R - R^T)\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die Bedingungen $n_1 = -n_2 = n_3$ und mit entsprechender Normierung die Drehachse

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $\boxed{\text{2P}}$ Wir wenden die Drehung auf einen Vektor $\vec{a}$ an, der Senkrecht auf $\vec{n}$ steht, also z.B. $\vec{a} = (1, 1, 0)$:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

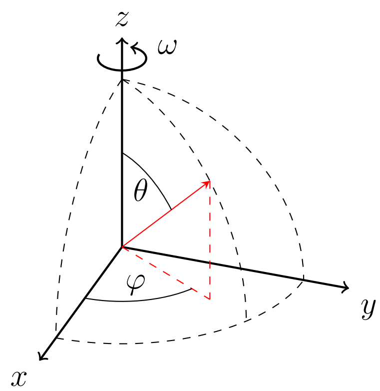
Der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{a}'$ ist dann der Drehwinkel $\phi$ und es gilt somit:

$$\vec{a} \cdot \vec{a}' = 1 = |\vec{a}|\,|\vec{a}'| \cos\phi = 2\cos\phi$$

Damit erhalten wir $\phi = \pi/3$.
Alternativ kann man auch die Relation $\mathrm{Sp}(R) = 1 + 2\cos\phi$ von Übungsblatt 5 verwenden.

## Aufgabe 3: Zentrifugal- und Corioliskraft $\boxed{\textbf{6P}}$

Der Ort $\vec{r}$ eines Fahrzeugs auf der Erdoberfläche wird duch die Kugelkoordinaten $r$, $\theta$, $\phi$ bestimmt. Das Fahrzeug fahre mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = v_s\vec{e}_\theta + v_o\vec{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.




(a) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta.$$

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}},$$

die durch die Erdrotation auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten an.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

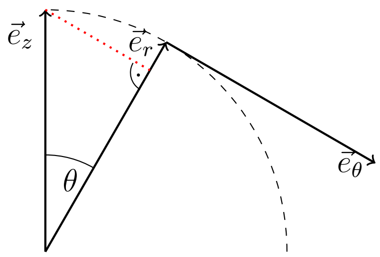
die durch die Erdrotation auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie das Ergebnis wieder in Kugelkoordinaten an.

(d) $\boxed{1\text{P}}$ Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung muss das Fahrzeug fahren, damit sich die beiden Kräfte gerade aufheben?

*Hinweis:* Es gilt: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi, \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta.$

**Lösung der Aufgabe 3**

(a) In der durch $\vec{e}_z$ und $\vec{e}_r$ aufgespannten Ebene erhalten wir:




Damit lässt sich $\vec{e}_z$ in Komponenten entlang $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\theta$ zerlegen:

$$\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta.$$

(b) Nutzen wir das Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe mit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ erhalten wir für die Corioliskraft:

$$\begin{aligned}\vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \\ &= -2m\omega(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) \times (v_s\vec{e}_\theta + v_o\vec{e}_\phi) \\ &= -2m\omega\cos\theta(v_s\vec{e}_\varphi - v_o\vec{e}_\theta) + 2m\omega\sin\theta v_o\vec{e}_r\end{aligned}$$

(c) Mit $\vec{\omega} = \omega(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ folgt

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega\sin\theta\vec{e}_\phi$$

und somit

$$\begin{aligned}\vec{F}_Z &= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= -m\omega^2 r\sin\theta(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) \times \vec{e}_\phi \\ &= -m\omega^2 r\sin\theta(-\cos\theta\vec{e}_\theta - \sin\theta\vec{e}_r) \\ &= m\omega^2 r\sin\theta(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r).\end{aligned}$$

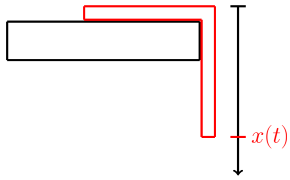
(d) Aus $\vec{F}_C + \vec{F}_Z = 0$ folgt:

- $v_s = 0$
- $v_o = -\frac{m\omega^2 r\sin\theta}{2m\omega} = -\frac{1}{2}\omega r\sin\theta$

Das Fahrzeug muss also nach Westen fahren.

## Aufgabe 4: Seil über Tischkante $\boxed{\textbf{5P}}$

Ein Seil der Länge $l$ und Masse $m$ gleite über die Tischkante reibungsfrei ab, wobei es anfänglich mit der Länge $x_0$ über die Tischkante hänge. Es wirkt die Gewichtskraft auf den nach unten hängenden Teil des Seiles.




(a) $\boxed{\text{3P}}$ Parametrisieren Sie die Masse $m(t)$ des nach unten hängenden Teiles als Funktion von $x(t)$ und zeigen Sie, dass für die Gewichtskraft $F(t) = m\frac{g}{l}x(t)$ gilt. Zeigen Sie, dass dies auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l}x(t)$$

führt. Lösen Sie die Gleichung unter den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn das Ende des Seils gerade über die Kante rutscht?

*Hinweis:* Die Hyperbelfunktionen sind hier hilfreich:
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

## Lösung der Aufgabe 4

(a) Die Masses des nach unten hängenden Teils des Seils ist im gegebenen Koordinatensystem offenbar einfach der Anteil $x(t)/l$ der Gesammtmasse $m$, also $m(t) = \frac{x(t)}{l}m$. Die Kraft ist damit gegeben durch $F = m(t)g$. Die Gewichtskraft wirkt genau in positive $x$-Richtung. Somit ergibt sich die eindimensionale Bewegungsgleichung

$$F = \frac{x(t)}{l}mg = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}(t)) = m\ddot{x}(t)$$

Man beachte, dass die gesamte beschleunigte Masse $m$ hier konstant ist. Dies liefert die gegebene Differentialgleichung

$$\ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0$$

Der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ liefert hier:

$$\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Somit erhalten wir als Lösungsansatz:

$$x(t) = Ae^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}.$$

Die Konstanten $A$ und $B$ werden wieder aus den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ bestimmt. Es folgt:

$$x(0) = A + B = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{g}{l}}(A - B) = 0\,.$$

Es folgt unmittelbar $A = B = \frac{x_0}{2}$ und damit

$$x(t) = x_0 \frac{1}{2} \left( e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t} \right) = x_0 \cosh \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

(b) Es bleibt die Geschwindigkeit zu ermitteln, die das Seil im Moment $x(T) = l$ hat. Es gilt also

$$x(T) = x_0 \cosh \left( \sqrt{\frac{g}{l}} T \right) = l$$

Es ist offenbar

$$\dot{x}(t) = x_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sinh \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) .$$

Man kann ohne Umstellen direkt das Ergebnis erhalten durch

$$\dot{x}(T) = x_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\cosh^2 \left( \sqrt{\frac{g}{l}} T \right) - 1} = x_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\left( \frac{l}{x_0} \right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{l^2 - x_0^2}$$

Wenn jemand nach $T$ aufgelöst hat, auch in Ordnung.

## Aufgabe 5: Kraftfeld **8P**

Gegeben sei das Kraftfeld ($\vec{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = (by^2 - 2ax^2)\vec{e}_x + 4axy\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z \,.$$

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Welche Bedingung müssen Sie an die Konstanten $a$ und $b$ stellen, damit ein Potential $\phi(\vec{r})$ existiert, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ gilt? Nutzen Sie die Bedingung, um $b$ zu eliminieren.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie das zu $\vec{F}(\vec{r})$ zugehörige Potential $\phi(\vec{r})$ mit eliminierter Konstante $b$ gemäß Teilaufgabe (a).

(c) $\boxed{\text{4P}}$ Bestimmen Sie (für die Konstanten aus Aufgabenteil (a)) durch explizite Rechnung der Wegintegrale die geleistete Arbeit entlang der Wege:

- $C_1$: Auf direktem Weg von $(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 0)$ nach $(1,\ 1,\ 0)$.
- $C_2$: In einem Viertelkreis um die $x$-Achse von $(1,\ 1,\ 0)$ nach $(1,\ 0,\ 1)$.

*Hinweis:* $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Nutzen Sie nun, dass das Kraftfeld konservativ ist und überprüfen Sie mit Hilfe des Potentials $\phi(\vec{r})$ Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (c).

## Lösung der Aufgabe 5

(a) Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung ist, dass die Rotation von $\vec{F}(\vec{r})$ verschwindet. Es gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 4ay - b2y \end{pmatrix} .$$

Somit muss in jedem Fall $b = 2a$ sein, damit ein Potential exisiteren kann. Den Beweis der Existenz des Potentials liefert dessen erfolgreiche Bestimmung in Teilaufgabe (b).

(b) Wir arbeiten nun mit $b = 2a$ und somit mit dem Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = 2a(y^2 - x^2)\vec{e}_x + 4axy\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z \,.$$

Das Potential kann durch getrennte Integration über $x$, $y$ und $z$ ermittelt werden. Es ist

$$\int dx(-F_x) = -2ay^2x + \frac{2}{3}ax^3 + C(y,z)$$

$$\int dy(-F_y) = -2ay^2x + C(x,z), \qquad \int dz(-F_z) = -z^2 + C(x,z) \,.$$

Die Resultate lassen sich erfolgreich kombinieren und es ist somit

$$\phi(\vec{r}) = \frac{2}{3}ax^3 - 2axy^2 - z^2 + C \,.$$

(c) Der direkte Weg von $(0,0,0)$ nach $(1,1,0)$ lässt sich parametrisieren durch

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, \qquad \dot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0,1]. \quad \text{Somit ist} \quad \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4at^2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit folgt für die verrichtete Arbeit

$$W_{C_1} = -\int_0^1 \vec{F} \cdot \dot{\vec{s}} dt = -\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4at^2 \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\int_0^1 4at^2 dt = -\left. \frac{4}{3}at^3 \right|_0^1 = -\frac{4}{3}a$$

Die Kreisbahn von $(1,1,0)$ nach $(1,0,1)$ lässt sich parametrisieren durch

$$\vec{s}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{s}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, \pi/2].$$

Damit folgt für die geleistete Arbeit

$$W_{C_2} = -\int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{s}) \cdot \dot{\vec{s}} d\varphi = -\int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 2a(\cos^2\varphi - 1) \\ 4a\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} dt$$

$$= -\int_0^{\pi/2} (2-4a)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = -\int_0^{\pi/2} (1-2a)\sin 2\varphi\, d\varphi \tag{1}$$

$$= (2a-1)\left[-\frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right]_0^{\pi/2} = 2a - 1 \tag{2}$$

(d) Für das Potential an den Endpunkten erhalten wir: $\phi_0 = \phi(0,0,0) = 0$, $\phi_1 = \phi(1,1,0) = -4/3a$, sowie $\phi_2 = \phi(1,0,1) = 2/3a - 1$. Damit erhalten wir $W_{C_1} = \phi_1 - \phi_0 = -4/3a$, $W_{C_2} = \phi_2 - \phi_1 = 2a - 1$ in Übereinstimmung mit Aufgabenteil (c).