



Wintersemester 2024/25
Theorie A - Klausur 2
 Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

26.3.2025

Tragen Sie bitte leserlich Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in den dafür vorgesehenen Feldern auf der hier vorliegenden Titelseite ein und geben Sie dieses Blatt nach Beendigung der Klausur mit ab. Schreiben Sie auch auf jedes von Ihnen beschriebene Blatt leserlich Ihre Matrikelnummer. Die Klausuraufgaben sind nach Beendigung der Klausur mit abzugeben.

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Ein einseitig, handbeschriebenes DIN A4 Blatt ist als Hilfsmittel zugelassen. Verwenden Sie nur ausgegebenes Papier. Falls Sie mehr Papier benötigen melden Sie sich. Verwenden Sie weder Bleistifte noch rote Stifte.

Wir wünschen viel Erfolg!

Bitte auf dieser Seite ab hier nichts mehr ausfüllen!

Aufgabe	1)	2)	3)	4)	5)	Summe
Punkte	10	7	8	7	8	
Kürzel						

Aufgabe 1: Warm-up**10P**

Beantworten Sie die folgenden Fragen in wenigen Sätzen und Formeln.

- (a) **1P** Was besagt das zweite Newtonsche Axiom?
- (b) **1P** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3, 1, 5)$ und $\vec{b} = (1, 1, 2)$. Die Komponenten des Vektors $\vec{c}$ sind durch $c_k = \epsilon_{ijk}(a_i b_j + a_j b_i)$ gegeben. Berechnen Sie $\vec{c}$.
- (c) **1P** Handelt es sich bei der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

um eine Drehmatrix? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (d) **1P** Zeigen Sie, dass $\vec{a}(t) \perp \dot{\vec{a}}(t)$ falls der Betrag $|\vec{a}(t)|$ nicht von der Zeit abhängt.
- (e) **2P** Zeigen Sie die trigonometrischen Identität $\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$.
- (f) **1P** Was wird durch eine Galilei-Transformation beschrieben?
- (g) **1P** Geben Sie die Namen und Formeln der Scheinkräfte an, die in rotierenden Bezugssystemen auftreten.
- (h) **1P** Bestimmen Sie die Richtung, in der das Feld $\Phi(x, y, z) = x e^y \cos(z)$ am Punkt $(2, 0, 0)$ am stärksten ansteigt.
- (i) **1P** Leiten Sie die Beziehung $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ zwischen Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehmoment $\vec{M}$ eines Körpers der Masse m her.

Aufgabe 2: Kurve**7P**

Gegeben ist eine mit dem dimensionslosen Parameter t parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t - 1 \\ \frac{t^2}{2} - t - 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- (a) **1P** den Tangenteneinheitsvektor $\hat{t}$.
- (b) **3P** die Krümmung κ und den Krümmungsradius ρ .
Hinweis: Es gilt $\kappa = \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \left| \frac{d\hat{t}}{dt} / \frac{ds}{dt} \right|$.
- (c) **3P** die Länge $s(t)$ der Kurve vom Punkt $t = 0$ aus gemessen.

Hinweise: Leiten Sie die Integrationsformel $\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh} t)$ durch eine geeignete Substitution her. Hierbei ist $\operatorname{arsinh} x$ die Umkehrfunktion des Sinus Hyperbolicus.

Für die Hyperbelfunktionen gilt:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

Aufgabe 3: Zentralkraft**8P**

Auf einen Massepunkt m wirke die Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$. Da es sich hierbei um eine Zentralkraft handelt, ist der Drehimpuls erhalten und die Bewegung findet somit in einer Ebene statt. Wir verwenden im Folgenden Zylinderkoordinaten $\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ und wählen das Koordinatensystem so, dass die Bewegung in der xy -Ebene stattfindet, also $z = 0$.

- (a) **1P** Zeigen Sie, dass die Kraft konservativ ist und bestimmen Sie das zugehörige Potential $V(\vec{r})$. *Hinweis:* Hier können Sie noch kartesische Koordinaten verwenden.
- (b) **1P** Zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit gilt:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

- (c) **2P** Berechnen Sie den Drehimpuls $\vec{L}$ in Zylinderkoordinaten und zeigen Sie, dass sich die Gesamtenergie schreiben lässt als

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{\gamma}{r^2} + \alpha r^2 \quad \text{und} \quad \alpha, \gamma > 0. \quad (1)$$

Drücken Sie die Konstanten α und γ durch k , m und $L = |\vec{L}|$ aus.

- (d) **1P** Skizzieren Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$. Tragen Sie eine Energie $E > \sqrt{4\alpha\gamma} = \min(V_{\text{eff}})$ in Ihre Skizze ein und erläutern Sie, welche Werte r für diese Energie annehmen kann.
- (e) **3P** Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $r(0) = r_0 = \sqrt{\frac{E}{2\alpha}}$. Nutzen Sie Gleichung (1) und berechnen Sie $r(t)$ mittels Separation der Variablen.
Hinweis: Die Substitution $u = r^2$ erweist sich als hilfreich. Außerdem gilt: $\int \frac{du}{\sqrt{c+bu-au^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2au-b}{\sqrt{b^2+4ac}}.$

Aufgabe 4: Kraftfelder**7P**

Betrachten Sie die beiden Kraftfelder

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 2x \cos^2(y) \\ -(x^2 + 1) \sin(2y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ z^{5/2} \end{pmatrix}.$$

- (a) **4P** Bestimmen Sie, ob die Kraftfelder konservativ sind und geben Sie wenn möglich jeweils ein Potential $V(\vec{r})$ an, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$.
Hinweis: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
- (b) **3P** Berechnen Sie für die beiden Kraftfelder die Arbeit, die bei einer Bewegung entlang der Bahnkurve $\vec{r}(t) = (\cos t, 2 \sin t, t)^T$ verrichtet wird, wobei der Parameter t das Intervall $t \in [0, 2\pi]$ durchlaufe.
Hinweis: $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$

Aufgabe 5: Oszillator mit äußerer Kraft**8P**

Betrachten Sie die Bewegung eines ungedämpften harmonischen Oszillators unter der Wirkung einer externen Kraft:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

- (a) **3P** Lösen Sie die Gleichung für die Kraft

$$f(t) = f_0 \theta(t) \theta\left(\frac{\pi}{4\omega_0} - t\right) = \begin{cases} f_0 & \text{wenn } 0 < t < \frac{\pi}{4\omega_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(t \leq 0) = 0$.

Hinweis: $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- (b) **5P** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für die Kraft

$$f(t) = f_0 e^{\lambda t} \cos(\omega t), \quad \text{mit } \omega \neq \omega_0.$$