



Aufgabe 1: Warm-up

10P

Beantworten Sie die folgenden Fragen in wenigen Sätzen und Formeln.

- (a) 1P Was besagt das zweite Newtonsche Axiom?
- (b) 1P Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3, 1, 5)$ und $\vec{b} = (1, 1, 2)$. Die Komponenten des Vektors $\vec{c}$ sind durch $c_k = \epsilon_{ijk}(a_i b_j + a_j b_i)$ gegeben. Berechnen Sie $\vec{c}$.
- (c) 1P Handelt es sich bei der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

um eine Drehmatrix? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (d) 1P Zeigen Sie, dass $\vec{a}(t) \perp \dot{\vec{a}}(t)$ falls der Betrag $|\vec{a}(t)|$ nicht von der Zeit abhängt.
- (e) 2P Zeigen Sie die trigonometrischen Identität $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.
- (f) 1P Was wird durch eine Galilei-Transformation beschrieben?
- (g) 1P Geben Sie die Namen und Formeln der Scheinkräfte an, die in rotierenden Bezugssystemen auftreten.
- (h) 1P Bestimmen Sie die Richtung, in der das Feld $\Phi(x, y, z) = xe^y \cos(z)$ am Punkt $(2, 0, 0)$ am stärksten ansteigt.
- (i) 1P Leiten Sie die Beziehung $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ zwischen Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehmoment $\vec{M}$ eines Körpers der Masse m her.

Lösung der Aufgabe 1

- (a) 1P Die Änderung des Impulses ist gleich der auf den Körper wirkenden Kraft: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.
- (b) 1P Übertragen in Vektornotation erhalten wir $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = 0$.
- (c) 1P A ist keine Drehmatrix. Am einfachsten sieht man dies daran, dass z.B. die Spaltenvektoren nicht orthogonal zueinander sind.
- (d) 1P Wenn der Betrag $|\vec{a}|$ konstant ist, gilt

$$0 = \frac{d}{dt}|\vec{a}| = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}}.$$

Hieraus folgt $\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = 0$ und somit $\vec{a} \perp \dot{\vec{a}}$.

(e) 2P

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \operatorname{Re}(e^{i(x-y)}) = \operatorname{Re}(e^{ix} \cdot e^{-iy}) \\ &= \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x) \cdot (\underbrace{\cos(-y)}_{=\cos y} + i \underbrace{\sin(-y)}_{=-\sin y})) \\ &= \operatorname{Re}(\cos x \cos y - i^2 \sin x \sin y + i \sin x \cos y - i \cos x \sin y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y\end{aligned}$$

(f) 1P Eine Galilei-Transformation beschreibt den Übergang zwischen zwei Inertialsystemen, die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit zueinander bewegen, wobei die Newtonschen Bewegungsgesetze unverändert bleiben.

(g) 1P In einem Bezugssystem, das mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ relativ zu einem Inertialsystem rotiert, treten die folgenden Scheinkräfte auf:

- Zentrifugalkraft: $\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r})$
- Corioliskraft: $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$
- Eulersche Kraft (Azimutalkraft): $\vec{F}_{az} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$

(h) 1P Die Richtung des stärksten Anstiegs ist durch den Gradienten des Felds gegeben:

$$\operatorname{grad} \Phi = \nabla \Phi = \begin{pmatrix} e^y \cos z \\ x e^y \cos z \\ -x e^y \sin z \end{pmatrix}$$

Am Punkt $(2, 0, 0)$ erhalten wir somit die Richtung $(1, 2, 0)$.

(i) $\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$

Aufgabe 2: Kurve

7P

Gegeben ist eine mit dem dimensionslosen Parameter t parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t - 1 \\ \frac{t^2}{2} - t - 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- (a) 1P den Tangenteneinheitsvektor $\hat{t}$.
- (b) 3P die Krümmung κ und den Krümmungsradius ρ .
Hinweis: Es gilt $\kappa = \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \left| \frac{d\hat{t}}{dt} / \frac{ds}{dt} \right|$.
- (c) 3P die Länge $s(t)$ der Kurve vom Punkt $t = 0$ aus gemessen.

Hinweise: Leiten Sie die Integrationsformel $\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh} t)$ durch eine geeignete Substitution her. Hierbei ist $\operatorname{arsinh} x$ die Umkehrfunktion des Sinus

Hyperbolicus.

Für die Hyperbelfunktionen gilt:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

Lösung der Aufgabe 2

- (a) 1P Wir leiten $\vec{r}(t)$ nach t ab und erhalten $\dot{\vec{r}}(t) = (t+1, t-1)$. Der Tangenteneinheitsvektor ergibt sich durch Normierung mit $|\dot{\vec{r}}| = \dot{s} = v = \sqrt{(t+1)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+t^2}$:

$$\hat{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{(t+1, t-1)}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}}$$

- (b) 3P Die Krümmung ist gegeben durch $\kappa = \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \left| \frac{d\hat{t}}{dt} / \frac{ds}{dt} \right|$. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{1+t^2} - (t+1)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}, \frac{\sqrt{1+t^2} - (t-1)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}} \left(\frac{1+t^2 - t(t+1)}{t^2+1}, \frac{1+t^2 - t(t-1)}{t^2+1} \right) = \frac{(1-t, 1+t)}{\sqrt{2}(1+t^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Mit $\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{2}\sqrt{1+t^2}$ erhalten wir:

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{t}}{dt} / \frac{ds}{dt} \right| = \sqrt{\left| \frac{(1-t, 1+t)}{2(1+t^2)^2} \right|^2} = \sqrt{\frac{1}{2(1+t^2)^3}}.$$

Der Krümmungsradius ist somit $\rho = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{2(1+t^2)^3}$.

- (c) 3P Die Länge der Kurve ist gegeben durch

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}| dt' = \int_0^t \sqrt{2}\sqrt{1+t'^2} dt'$$

Das Integral lässt sich lösen, indem wir $t = \sinh x$ substituieren:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2} dt &= \int \sqrt{1+\sinh^2 x} \cosh x dx = \int \cosh^2 x dx \\ &= \int \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 dx = \int \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x) \\ &= \frac{1}{4}(\sinh(2x) + 2x) = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x) = \frac{1}{2}(\sinh x \sqrt{1+\sinh^2 x} + x) \\ &= \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh} t) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Bogenlänge

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh} t).$$

Aufgabe 3: Zentralkraft**8P**

Auf einen Massepunkt m wirke die Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$. Da es sich hierbei um eine Zentralkraft handelt, ist der Drehimpuls erhalten und die Bewegung findet somit in einer Ebene statt. Wir verwenden im Folgenden Zylinderkoordinaten $\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ und wählen das Koordinatensystem so, dass die Bewegung in der xy -Ebene stattfindet, also $z = 0$.

- (a) **1P** Zeigen Sie, dass die Kraft konservativ ist und bestimmen Sie das zugehörige Potential $V(\vec{r})$. *Hinweis:* Hier können Sie noch kartesische Koordinaten verwenden.
- (b) **1P** Zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit gilt:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

- (c) **2P** Berechnen Sie den Drehimpuls $\vec{L}$ in Zylinderkoordinaten und zeigen Sie, dass sich die Gesamtenergie schreiben lässt als

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{\gamma}{r^2} + \alpha r^2 \quad \text{und} \quad \alpha, \gamma > 0. \quad (1)$$

Drücken Sie die Konstanten α und γ durch k , m und $L = |\vec{L}|$ aus.

- (d) **1P** Skizzieren Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$. Tragen Sie eine Energie $E > \sqrt{4\alpha\gamma} = \min(V_{\text{eff}})$ in Ihre Skizze ein und erläutern Sie, welche Werte r für diese Energie annehmen kann.

- (e) **3P** Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $r(0) = r_0 = \sqrt{\frac{E}{2\alpha}}$. Nutzen Sie Gleichung (1) und berechnen Sie $r(t)$ mittels Separation der Variablen.

Hinweis: Die Substitution $u = r^2$ erweist sich als hilfreich. Außerdem gilt: $\int \frac{du}{\sqrt{c+bu-au^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2au-b}{\sqrt{b^2+4ac}}$.

Lösung der Aufgabe 3

- (a) **1P** Das Potential ist einfach zu finden: $\Phi = \frac{1}{2}k\vec{r}^2 = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Da ein Potential existiert ist die Kraft konservativ.
- (b) **1P** In Zylinderkoordinaten gilt (mit $z = 0$): $\vec{r} = r\vec{e}_r$ und somit $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Für die Ableitung des Einheitsvektors $\vec{e}_r$ gilt:

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

- (c) **2P** Für den Drehimpuls erhalten wir:

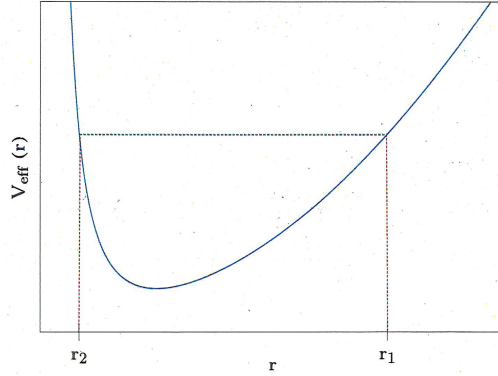
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m(r\dot{r} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=0} + r^2\dot{\varphi} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z}) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z.$$

Damit lässt sich die Gesamtenergie folgendermaßen umformen:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \frac{L^2}{m^2r^4} + \frac{1}{2}kr^2,$$

woraus sich die Konstanten $\gamma = \frac{L^2}{2m}$, $\alpha = k/2$ ablesen lassen.

(d) 1P



Da die Energie E nicht kleiner als V_{eff} sein kann, findet für gegebenes E die Bewegung zwischen den beiden Punkten r_1 und r_2 statt.

(e) 3P Stellen wir die Gleichung nach $\dot{r}$ um, finden wir

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}$$

und Separation der Variablen liefert:

$$\frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} dt.$$

Dies können wir integrieren, wobei wir die Integrationsgrenzen gemäß der Bedingung $r(0) = r_0 = \sqrt{\frac{E}{2\alpha}}$ wählen:

$$\int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{E r'^2 - \gamma - \alpha r'^4}} = \int_0^t dt' \sqrt{\frac{2}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

Wie angegeben können wir hier $u = r'^2$ substituieren und erhalten für das Integral auf der linken Seite:

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{E r'^2 - \gamma - \alpha r'^4}} &= \int_{r_0^2}^u \frac{\frac{1}{2} du'}{\sqrt{E u' - \gamma - \alpha u'^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left[\arcsin \frac{2\alpha u - E}{\sqrt{E^2 - 4\alpha\gamma}} \right]_{u=r_0^2=\frac{E}{2\alpha}}^{u=r^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \arcsin \frac{2\alpha r^2 - E}{\sqrt{E^2 - 4\alpha\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t. \end{aligned}$$

Auflösen der Gleichung nach r liefert:

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left[\sqrt{E^2 - 4\alpha\gamma} \sin \left(2\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} t \right) + E \right]}$$

Aufgabe 4: Kraftfelder

7P

Betrachten Sie die beiden Kraftfelder

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 2x \cos^2(y) \\ -(x^2 + 1) \sin(2y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ z^{5/2} \end{pmatrix}.$$

- (a) 4P Bestimmen Sie, ob die Kraftfelder konservativ sind und geben Sie wenn möglich jeweils ein Potential $V(\vec{r})$ an, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$.

Hinweis: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

- (b) 3P Berechnen Sie für die beiden Kraftfelder die Arbeit, die bei einer Bewegung entlang der Bahnkurve $\vec{r}(t) = (\cos t, 2 \sin t, t)^T$ verrichtet wird, wobei der Parameter t das Intervall $t \in [0, 2\pi]$ durchlaufe.

Hinweis: $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$

Lösung der Aufgabe 4

- (a) Wir berechnen zunächst die Rotation der beiden Kraftfelder:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F}_1 &= \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x \cos^2(y) \\ -(x^2 + 1) \sin(2y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ -2x \sin(2y) + 4x \cdot \cos(y) \sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{\nabla} \times \vec{F}_2 &= \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ z^{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\vec{F}_2$ nicht konservativ ist.

Bei Vektorfeld $\vec{F}_1$ verschwindet die Rotation, wobei wir benutzt haben, dass $\sin(2y) = 2 \sin(y) \cos(y)$. Das Vektorfeld kann also konservativ sein und wir versuchen ein zugehöriges Potential zu bestimmen. Da $\vec{F}_1$ nicht von z abhängt, muss auch das Potential unabhängig von dieser Koordinate sein. Aus der x -Komponente der Kraft folgt

$$F_{1,x} = 2x \cos^2(y) = -\partial_x V(x, y) \quad \rightarrow \quad V(x, y) = -x^2 \cos^2(y) + V(y).$$

Aus der y -Komponente erhalten wir dann

$$\begin{aligned} F_{1,y} &= -\partial_y V(x, y) \\ \rightarrow \quad -(x^2 + 1) 2 \sin(y) \cos(y) &= -2x^2 \cos(y) \sin(y) - V'(y) \\ \rightarrow \quad V'(y) &= 2 \sin(y) \cos(y) \\ \rightarrow \quad V(y) &= \sin^2(y) + c = -\cos^2(y) + c', \end{aligned}$$

wobei $V(y)$ entweder durch $\sin y$ oder $\cos y$ ausgedrückt werden kann und die zugehörigen Integrationskonstanten beliebig gewählt werden können. Wir setzen $c' = 0$ und schreiben das Potential als

$$V(\vec{r}) = V(x, y) = -x^2 \cos^2(y) + V(y) = -(x^2 + 1) \cos^2(y)$$

- (b) Da das Vektorfeld $\vec{F}_1$ konservativ ist, erhalten wir die geleistete Arbeit aus der Potentialdifferenz der beiden Endpunkte $\vec{r}_1 = \vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(2\pi) = (1, 0, 2\pi)^T$:

$$W = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = 0$$

Für das 2. Kraftfeld erhalten wir die Arbeit aus dem Wegintegral:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \\ t^{5/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + t^{5/2}) dt = -2\pi - \frac{2}{7}(2\pi)^{7/2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Oszillator mit äußerer Kraft

8P

Betrachten Sie die Bewegung eines ungedämpften harmonischen Oszillators unter der Wirkung einer externen Kraft:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

- (a) 3P Lösen Sie die Gleichung für die Kraft

$$f(t) = f_0 \theta(t) \theta\left(\frac{\pi}{4\omega_0} - t\right) = \begin{cases} f_0 & \text{wenn } 0 < t < \frac{\pi}{4\omega_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(t \leq 0) = 0$.

Hinweis: $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- (b) 5P Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für die Kraft

$$f(t) = f_0 e^{\lambda t} \cos(\omega t), \quad \text{mit } \omega \neq \omega_0.$$

Lösung der Aufgabe 5

- (a) 3P Wir betrachten zunächst den Bereich $0 < t < \frac{\pi}{4\omega_0}$, in dem $f(t) = f_0$. Als partikuläre Lösung finden wir $x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2}$ und somit die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ liefert: $B + \frac{f_0}{\omega_0^2} = 0, A\omega_0 = 0$.

Die Lösung für $0 < t < \frac{\pi}{4\omega_0}$ ist somit:

$$x(t) = f_0 \frac{1 - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2}$$

Im Bereich $t > \frac{\pi}{4\omega_0}$ wirkt keine äußere Kraft und die allgemeine Lösung ist somit

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t) + D \cos(\omega_0 t).$$

Die Konstanten C, D ergeben sich aus der Stetigkeit von x und $\dot{x}$ an der Stelle $t = \frac{\pi}{4\omega_0}$:

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{4\omega_0}\right) &= \frac{C}{\sqrt{2}} + \frac{D}{\sqrt{2}} = f_0 \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\omega_0^2} \\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{4\omega_0}\right) &= \frac{C\omega_0}{\sqrt{2}} - \frac{D\omega_0}{\sqrt{2}} = f_0 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\omega_0} \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem lässt sich einfach lösen, indem wir die zweite Gleichung durch ω_0 teilen und dann beiden Gleichungen addieren/subtrahieren:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{f_0}{\omega_0^2} \\ D &= \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{2}}}{\omega_0^2} = f_0 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

(b) 5P Die allgemeine Lösung ist:

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) + x_p(t)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Für die partikuläre Lösung machen wir einen Ansatz mit der gleichen Struktur der Inhomogenität:

$$x_p(t) = e^{\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$x_p(t) = a e^{(\lambda+i\omega)t} + b e^{(\lambda-i\omega)t} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Berechnung mit komplexer Exponentialfunktion:

Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert:

$$A((\lambda + i\omega)^2 + \omega_0^2)e^{(\lambda+i\omega)t} + B((\lambda - i\omega)^2 + \omega_0^2)e^{(\lambda-i\omega)t} = \frac{f_0}{2} (e^{(\lambda+i\omega)t} + e^{(\lambda-i\omega)t})$$

Die beiden Exponentialgleichungen sind voneinander unabhängig. Daher machen wir einen Koeffizientenvergleich und finden

$$A = \frac{f_0/2}{(\lambda + i\omega)^2 + \omega_0^2}, \quad B = \frac{f_0/2}{(\lambda - i\omega)^2 + \omega_0^2}$$

Für die partikuläre Lösung erweitern wir zum gemeinsamen Hauptnenner und erhalten:

$$x_p(t) = \frac{(f_0/2)e^{\lambda t}}{(\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} [((\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2) - 2i\lambda\omega)e^{i\omega t} + ((\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2) + 2i\lambda\omega)e^{-i\omega t}].$$

Den Term in der eckigen Klammer schreiben wir mit dem Faktor $1/2$ in $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ um:

$$x_p(t) = \frac{f_0 e^{\lambda t}}{(\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} [(\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\lambda\omega \sin \omega t].$$