

## Klausur zur klassischen theoretischen Physik I WS 2025/26

Prof. Dr. A. Metelmann

---

### Aufgabe 1: Warm-up

[4 Punkte]

Beantworten Sie in wenigen Stichworten die folgenden Fragen:

- (a) [0,5 Punkte] Wie ist die physikalische Arbeit  $W$ , die von der Kraft  $\vec{F}$  entlang des Weges  $C$  verrichtet wird, allgemein definiert? Welchen Wert hat diese Arbeit, wenn  $\vec{F}$  eine konservative Kraft ist und der Weg  $C$  geschlossen ist?
- (b) [1 Punkt] Schreiben Sie die Bewegungsgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators mit einer Dämpfungskonstante  $\gamma$  und der ungedämpften Eigenfrequenz  $\omega_0$  auf. Beschreiben Sie anschließend kurz (jeweils in einem Satz) das qualitative Verhalten des Oszillators im unterdämpften, im kritisch gedämpften und im überdämpften Fall.
- (c) [1 Punkt] Ein Satellit mit der Masse  $m$  bewegt sich unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft auf einer elliptischen Bahn um die Erde. Der Ortsvektor des Satelliten in Bezug auf den Koordinatenursprung  $O$  sei gegeben durch  $\vec{r}_O(t)$ . Wie groß ist das Drehmoment  $\vec{\tau}_O(t)$  der Gravitationskraft  $\vec{F}_g(t)$  relativ zu einem zunächst beliebigen Bezugspunkt  $O$ ? Was lässt sich über das Drehmoment sagen, wenn wir den Erdmittelpunkt als Bezugspunkt  $O'$  setzen? Gilt diese Eigenschaft auch für andere Bezugspunkte?
- (d) [0,5 Punkte]  $f(x)$  sei eine Testfunktion und  $\delta(x)$  die Dirac-Delta-Distribution.

**Siebeigenschaft:** Bestimmen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx$$

in Abhängigkeit von  $f$  und  $x_0$ .

- (e) [1 Punkt] In der Ebene können alle Rotationen um den Ursprung durch Matrizen der Form

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

beschrieben werden, wobei  $\theta$  den Rotationswinkel entgegen dem Uhrzeigersinn angibt. Welche beiden mathematischen Bedingungen charakterisieren eine Rotationsmatrix in der Ebene? Stellt auch die inverse Matrix  $R^{-1}$  eine Rotation dar? Falls ja, um welchen Winkel?

### Lösung

- (a) Die physikalische Arbeit ist allgemein definiert als [0,25 Punkte]

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

- Ist  $\vec{F}$  eine konservative Kraft und  $C$  ein geschlossener Weg, so gilt [0,25 Punkte]

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

(b) Bewegungsgleichung:

[each part : 0,25 Punkte]

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

**Unterdämpfung** ( $\gamma < \omega_0$ ): Schwingung mit exponentiell abklingender Amplitude.

**Kritische Dämpfung** ( $\gamma = \omega_0$ ): schnellste Rückkehr ins Gleichgewicht ohne Schwingung.

**Überdämpfung** ( $\gamma > \omega_0$ ): keine Schwingung; langsame Rückkehr ins Gleichgewicht.

(c) Das Drehmoment ist für einen allgemeinen Bezugspunkt  $O$  gegeben durch  $\vec{\tau}_O(t) = \vec{r}_O(t) \times \vec{F}_g(t)$ . In Bezug auf den Erdmittelpunkt  $O'$  finden wir, dass das Drehmoment für alle Zeiten  $t$  verschwindet  $\vec{\tau}_{O'}(t) = 0$ , da die Kraft zu jedem Zeitpunkt stets parallel zum Ortsvektor steht  $\vec{r}_{O'}(t) \parallel \vec{F}_g(t)$ . Dies ist eine Eigenschaft, die allein für diesen Bezugspunkt gilt. [1 Punkt]

(d)

[0,5 Punkte]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

(e)  $R(\theta)$  ist orthogonal  $R^T R = I$  und hat Determinante  $\det(R) = 1$  (positive Determinante reicht als Zusatzbedingung zur Orthogonalität). Aus der Orthogonalität folgt unmittelbar, dass auch eine inverse Rotationsmatrix eine Rotation beschreibt. Es gilt  $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(-\theta)$ , also eine Rotation um den Winkel  $-\theta$ . [1 Punkt]

## Aufgabe 2. Fallbewegung mit linearem Widerstand

[5 Punkte]

Ein Körper der Masse  $m$  fällt aus der Ruhe ( $v(0) = 0$ ) durch ein Medium (z. B. ein dickflüssiges Öl), das einen Reibungswiderstand proportional zur Geschwindigkeit ausübt:  $F_R = bv$ .

(a) [2 Punkte] Bestimme die Geschwindigkeit  $v(t)$  des Körpers, indem du die folgende Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = mg - bv \quad , \quad b > 0$$

mithilfe der Methode der Variablentrennung löst.

(b) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Endgeschwindigkeit  $v_\infty$  für den Grenzfall  $t \rightarrow \infty$ . Welcher Zustand tritt ein, wenn die Reibungskraft genau so groß ist wie die Gewichtskraft?

(c) [2 Punkte] Entwickeln Sie Ihre Lösung für  $v(t)$  in eine Taylorreihe um den Startpunkt  $t = 0$ . Behalten Sie Terme bis  $t^2$  bei.

## Lösung

(a) **Geschwindigkeit**  $v(t)$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für den fallenden Körper lautet: [whole process: 1,75 Punkte]

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt$$

Integration beider Seiten mit den Grenzen  $v(t=0) = 0$ :

$$\int_0^v \frac{dv'}{g - \frac{b}{m}v'} = \int_0^t dt'$$

Unter Verwendung des Hinweises  $\int \frac{1}{a-cx} dx = -\frac{1}{c} \ln|a-cx|$  (mit  $a = g$  und  $c = b/m$ ):

$$-\frac{m}{b} \left[ \ln \left( g - \frac{b}{m}v \right) - \ln(g) \right] = t$$

Zusammenfassen der Logarithmen und Auflösen nach  $v$ :

$$\ln \left( \frac{g - \frac{b}{m}v}{g} \right) = -\frac{b}{m}t$$
$$1 - \frac{b}{mg}v = e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)}$$

[0,25 Punkte]

### (b) Endgeschwindigkeit

Die Endgeschwindigkeit  $v_\infty$  wird erreicht, wenn die Beschleunigung verschwindet ( $\dot{v} = 0$ ). Dies geschieht, wenn die Reibungskraft die Gewichtskraft exakt kompensiert:

$$mg - bv_\infty = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_\infty = \frac{mg}{b}}$$

[Each 0,5 Punkte]

*Physikalische Überlegung:* Im Gleichgewichtszustand heben sich die Kräfte auf, und der Körper fällt mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

### (c) Taylor-Entwicklung

Wir entwickeln die Lösung  $v(t)$  um den Punkt  $t = 0$  unter Verwendung der Reihe  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ :  
[Whole process: 1,75 Punkte]

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$
$$\approx \frac{mg}{b} \left[ 1 - \left( 1 + \left( -\frac{b}{m}t \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{b}{m}t \right)^2 \right) \right]$$
$$\approx \frac{mg}{b} \left[ \frac{b}{m}t - \frac{b^2}{2m^2}t^2 \right]$$

$$\boxed{v(t) \approx gt - \frac{bg}{2m}t^2}$$

[0,25 Punkte]

*Interpretation:* Der erste Term  $gt$  entspricht dem freien Fall ohne Reibung. Der zweite Term  $-\frac{bg}{2m}t^2$  stellt die erste Korrektur durch den Mediumwiderstand dar.

**Aufgabe 3. Kraft und Potential****[5 Punkte]**

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Kraft

$$\vec{F}(r) = -\frac{\alpha}{r^n} \vec{e}_r, \quad \alpha > 0, \quad n > 1$$

konservativ ist, wobei  $r = |\vec{r}|$ . Berechnen Sie das zu dieser Kraft gehörige Potential  $V(r)$ .(b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der Drehimpuls  $\vec{L}$  eines Teilchens der Masse  $m$  im Kraftfeld  $\vec{F}$  aus (a) eine Erhaltungsgröße ist. Was folgt daraus für die Bewegung des Teilchens?(c) [1 Punkt] Bringen Sie für das Feld  $\vec{F}$  aus (a) den Energiesatz in Polarkoordinaten in die Form

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r),$$

wobei  $mr^2\dot{\phi} = L$  gilt. Bestimmen Sie das effektive Potential  $V_{\text{eff}}(r)$ .(d) [2 Punkte] Angenommen, das Teilchen bewege sich auf einer stabilen **Kreisbahn** mit Radius  $r \equiv r_0$ . Berechnen Sie den Radius  $r_0$  in Abhängigkeit vom Drehimpuls  $L$ . Bestimmen Sie dann, unter welchen Bedingungen bzgl.  $n$  eine solche stabile Kreisbahn möglich ist.**Lösung****(a) Konservativität der Kraft****[1 Punkt]**

Eine Kraft ist konservativ, wenn ihre Rotation verschwindet ( $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ). Da es sich um eine reine Zentralkraft handelt, die nur vom Radius  $r$  abhängt, gilt in Kugelkoordinaten:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Da die Rotation null ist, existiert ein skalares Potential  $V(r)$ , für das gilt  $\mathbf{F} = -\nabla V$ :

$$V(r) = - \int F(r) dr = \int \frac{\alpha}{r^n} dr = -\frac{\alpha}{(n-1)r^{n-1}}$$

**(b) Drehimpulserhaltung****[1 Punkt]**Das Drehmoment  $\vec{\tau}$  ist definiert als  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Da  $\vec{F}$  parallel zu  $\vec{r}$  ist (Zentralkraft), gilt:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \left( -\frac{\alpha}{r^n} \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0$$

Aus der Bewegungsgleichung  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0$  folgt, dass der **Drehimpuls  $\vec{L}$  zeitlich konstant** ist.**Folgerung:** Da  $\vec{L}$  senkrecht auf  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  steht und konstant bleibt, findet die **Bewegung in einer festen Ebene** senkrecht zu  $\vec{L}$  statt.

**(c) Energiesatz und effektives Potential**

[Whole process: 1,75 Punkte]

Die Gesamtenergie in Polarkoordinaten lautet:

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{(n-1)r^{n-1}}$$

Mit dem Betrag des Drehimpulses  $L = mr^2\dot{\phi}$  eliminieren wir  $\dot{\phi}$ :

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{(n-1)r^{n-1}}$$

Das **effektive Potential** ist somit:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{(n-1)r^{n-1}}$$

[0,25 Punkte]

**(d) stabile Kreisbahn**

Für eine stabile Kreisbahn muss der Radius konstant sein. Das bedeutet [Whole process: 1.5 Punkte]

$$\dot{r} = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{r} = 0.$$

Aus der radialen Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F(r)$$

und der Kraft

$$F(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$$

folgt für eine Kreisbahn

$$mr\dot{\phi}^2 = \frac{\alpha}{r^n}.$$

Mit dem Drehimpuls

$$L = mr^2\dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

erhält man

$$\frac{L^2}{mr^3} = \frac{\alpha}{r^n}$$

bzw.

$$\alpha r^{3-n} = \frac{L^2}{m}.$$

Damit ergibt sich für den Radius der Kreisbahn

$$r_0 = \left( \frac{L^2}{m\alpha} \right)^{\frac{1}{3-n}}.$$

[0,25 Punkte]

Die Energie des Systems lautet

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{(n-1)r^{n-1}}.$$

Für eine Kreisbahn ist  $\dot{r} = 0$ , sodass

$$E = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{(n-1)r_0^{n-1}}.$$

Setzt man die oben gefundene Beziehung  $\frac{L^2}{m} = \alpha r_0^{3-n}$  ein, so erhält man

$$E = \alpha r_0^{1-n} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} \right) = \alpha r_0^{1-n} \frac{n-3}{2(n-1)}.$$

Eine gebundene (stabile) Bahn erfordert  $E < 0$ . Da  $\alpha > 0$  und  $r_0^{1-n} > 0$  gilt, folgt daraus

$$\frac{n-3}{2(n-1)} < 0,$$

also

$$\boxed{1 < n < 3}.$$

[0,25 Punkte]

Löst man schließlich die Energiegleichung nach  $r_0$  auf, ergibt sich für  $E < 0$

$$r_0 = \left[ \frac{2(n-1)|E|}{\alpha(3-n)} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad 1 < n < 3.$$

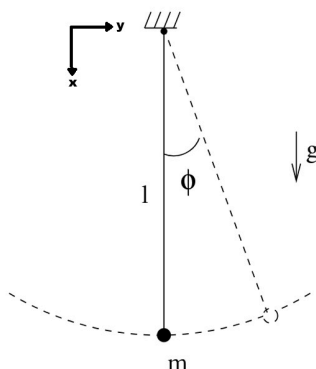
#### Aufgabe 4: Mathematisches Pendel

[6 Punkte + 2 Bonus Punkte]

Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels lautet

$$m\ddot{\phi} + m\omega_0^2 \sin \phi = 0,$$

wobei  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  die Schwingungsfrequenz im Falle kleiner Auslenkungen angibt. Die Gleichung ist zwar mit elliptischen Funktionen analytisch noch lösbar, dies soll hier jedoch nicht geschehen. Stattdessen soll die Energieerhaltung ausgenutzt werden, um die Periodendauer zu bestimmen. Dazu gehen Sie wie folgt vor.



- (a) [1 Punkt] Legen Sie den Koordinatenursprung in die Aufhängung des Seiles (siehe Skizze) in der  $(x, y)$ -Ebene, und beschreiben Sie sowohl die Trajektorie der Kugel auf der Kreisbahn in Polarkoordinaten, als auch deren Betragsgeschwindigkeit  $v = |\vec{v}|$ . Nutzen Sie  $l = \text{const.}$

(b) [1 Punkt] Drücken Sie nun die kinetische Energie der Kugel  $E_{kin}(\phi)$  und die potentielle Energie  $E_{pot}(\phi)$  als Funktionen von  $\phi$  aus. Wie groß ist die maximale Auslenkung  $\phi_0$  des Pendels in Abhängigkeit der Gesamtenergie  $E$ ?

(c) [2 Punkte] Nutzen Sie die Energieerhaltung um die Umkehrfunktion der Bahnkurve  $t(\phi)$  zu bestimmen, und zeigen Sie, dass für die Periodendauer gilt

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}}.$$

(d) [2 Punkte] Verwenden Sie  $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$  und zeigen Sie, dass die Substitution

$$\sin(\phi/2) = \sin(\phi_0/2) \sin x = k \sin x,$$

wobei  $k = \sin(\phi_0/2)$ , zur folgenden Darstellung führt:

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}.$$

Dieses Integral ist das vollständige elliptische Integral  $K(k)$ .

(e) [Bonus: 2 Punkte] Für  $k \ll 1$  verwenden Sie die Taylor-Entwicklung  $(1-u)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}u$ , für den Integranden und bestimmen Sie die Abweichung von der harmonischen Schwingungsdauer  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

*Hinweis:* Das Integral

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

könnte nützlich sein.

## Lösung

### (a) Trajektorie und Geschwindigkeit

Der Ursprung liegt im Aufhängungspunkt. Die Position der Masse  $m$  in der  $(x, y)$ -Ebene wird durch den Winkel  $\phi$  (ausgelenkt von der  $x$ -Achse) beschrieben: [Whole process: 0,75 Punkte]

$$x = l \cos \phi$$

$$y = l \sin \phi$$

Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich durch Zeitableitung:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y = (-l\dot{\phi} \sin \phi)\vec{e}_x + (l\dot{\phi} \cos \phi)\vec{e}_y$$

Der Betrag der Geschwindigkeit  $v = |\vec{v}|$  ist:

$$v = \sqrt{(-l\dot{\phi} \sin \phi)^2 + (l\dot{\phi} \cos \phi)^2} = \sqrt{l^2 \dot{\phi}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} = l|\dot{\phi}|$$

[0.25 Punkte]

**(b) Energien und maximale Auslenkung**

Die kinetische Energie ist:

$$E_{kin}(\phi) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$$

Die potentielle Energie (mit Nullpunkt im Aufhängungspunkt) ist:

$$E_{pot}(\phi) = mgz = -mgl \cos \phi$$

[Whole process: 0,75 Punkte]

Die maximale Auslenkung  $\phi_0$  wird erreicht, wenn die kinetische Energie Null ist. Die Gesamtenergie  $E$  ist dann rein potentiell:

$$E = -mgl \cos \phi_0$$

[0,25 Punkte]

**(c) Energieerhaltung und Periodendauer**

Aus der Energieerhaltung folgt  $E_{kin} + E_{pot} = E$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mgl \cos \phi &= -mgl \cos \phi_0 \\ \dot{\phi}^2 &= \frac{2g}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0) = 2\omega_0^2(\cos \phi - \cos \phi_0) \end{aligned}$$

[0,5 Punkte]

Daraus ergibt sich die Zeitabhängigkeit  $dt/d\phi$ :

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{2}\omega_0\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0} \implies dt = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}}$$

[1 Punkt]

Die Periodendauer  $T$  entspricht dem Vierfachen der Zeit für eine Viertelperiode ( $0 \rightarrow \phi_0$ ):

$$T = 4 \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{2}\omega_0\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}}$$

[0,5 Punkte]

**(d) Substitution zum elliptischen Integral**

Mit  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$  gilt:

$$\cos \phi - \cos \phi_0 = (1 - 2 \sin^2(\phi/2)) - (1 - 2 \sin^2(\phi_0/2)) = 2(\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2))$$

[0,5 Punkte]

Einsetzen in  $T$ :

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{4(\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2))}} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)}}$$

[0,5 Punkte]

Substitution:  $\sin(\phi/2) = k \sin x$  mit  $k = \sin(\phi_0/2)$ . Differential:  $\frac{1}{2} \cos(\phi/2) d\phi = k \cos x dx$ .

$$d\phi = \frac{2k \cos x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} dx, \quad \text{Grenzen: } \phi = 0 \rightarrow x = 0, \phi = \phi_0 \rightarrow x = \pi/2$$

[0,5 Punkte]

$$T = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 x}} \frac{2k \cos x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

[0,5 Punkte]

**(e) Abweichung für  $k \ll 1$**

[2 Punkte]

Wir entwickeln den Integranden  $(1 - k^2 \sin^2 x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 x$ :

$$\begin{aligned} T &\approx \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 x\right) dx = \frac{4}{\omega_0} \left([x]_0^{\pi/2} + \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx\right) \\ &= \frac{4}{\omega_0} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right) = T_0 \left(1 + \frac{k^2}{4}\right) \end{aligned}$$

Die Abweichung ist also proportional zum Quadrat von  $k = \sin(\phi_0/2)$ .