≙ Theo A Nachklausur

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik B

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. D. Seidel
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

SS 08 – Blatt 00
Besprechung: 21.04.2008

Aufgabe 1

(a) Gegeben sei die Matrix

$$O = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie, dass O eine Drehmatrix ist.
(ii) Bestimmen Sie die Drehachse.

(b) Ein Massenpunkt bewegt sich auf der folgenden Bahnkurve:

$$\vec{r}(t)^T = (R\cos(\Omega t) + r\cos(\omega t + \Omega t),\, R\sin(\Omega t) + r\sin(\omega t + \Omega t),\, 0)\ , \text{ mit } R, r \text{ und } \omega, \Omega \text{ konstant}.$$

(i) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Massenpunktes.
(ii) Bestimmen Sie den auf 1 normierten Tangentenvektor als Funktion von t.
(iii) Skizzieren Sie die Bahnkurve des Massenpunktes für $r \ll R$ und $\omega \gg \Omega$.
(iv) Geben Sie die Bahnkurve in einem um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Bezugssystem an. Dabei soll um die x-Achse gedreht werden.

(c) Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich unter der Wirkung einer geschwindigkeitsabhängigen Kraft $F = -mg + mkv^2$. Berechnen Sie die Strecke s, die der Massenpunkt zurücklegt, wenn er von v_0 bis v_1 beschleunigt wird.
Hinweis: Stellen Sie die Bewegungsgleichung als Differentialgleichung für $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ dar: $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}z)(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)$.

Aufgabe 2

Ein Massenpunkt der Masse m und Energie E bewegt sich im Potential

$$V(x) = V_0(e^{x/x_0} + e^{-x/x0} - 2) \quad \text{mit} \quad V_0, x_0 > 0 \quad \text{und} \quad E > 0\,.$$

(a) Finden Sie die zu diesem Potential gehörige Kraft und geben Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes an.
(b) Skizzieren Sie $V(x)$ und bestimmen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung.
(c) Zeigen Sie, dass für kleine Auslenkungen um die Ruhelage $V(x)$ näherungsweise durch das Potential eines harmonischen Oszillators beschrieben werden kann. Berechnen Sie die Frequenz ω des entsprechenden harmonischen Oszillators.
(d) Für größere Auslenkungen muss der nächste nichtverschwindende Term der Taylor-Entwicklung von $V(x)$ mit berücksichtigt werden. Berechnen Sie diesen Term.

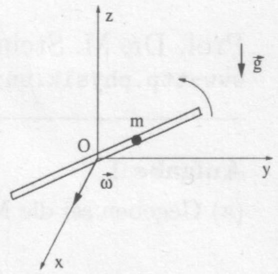
Aufgabe 3

Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchen der Masse m im Potential $U(r) = -k/r + g/r^2$. Gegeben sei folgender Vektor

$$\vec{C} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{k} - m\frac{\vec{r}}{r}$$

wobei $\vec{p}$ der Impuls und $\vec{L}$ der Drehimpuls ist. Berechnen Sie die zeitliche Änderung des Vektors $\vec{C}$. Ist $\vec{C}$ eine Erhaltungsgröße?

Aufgabe 4



Eine sehr dünne zylindrische Röhre dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einer vertikalen Ebene (yz-Ebene) um eine hierzu senkrechte Achse (x-Achse), die durch ihren Mittelpunkt O geht. In der Röhre befindet sich eine kleine Kugel der Masse m, die sich reibungslos bewegen kann. Die Gravitationskraft wirkt in $(-z)$-Richtung.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Kugel auf und lösen sie diese für folgende Anfangsbedingungen: Zur Zeit $t = 0$ befindet sich die Kugel im Punkt O und hat die Geschwindigkeit v_0 bezüglich der Röhre.

(b) Für welchen Wert von v_0 schwingt die Kugel in der Röhre wie ein harmonischer Oszillator?

(c) Was geschieht mit der Kugel, wenn die unter (b) berechneten Bedingungen nicht erfüllt sind?

Anmerkungen zu den Übungen

Anmeldung

Die Anmeldung für ein Tutorium zur Vorlesung **Theoretische Physik B** im Sommersemester 2008 erfolgt über das Webformular:
`http://www.physik.uni-karlsruhe.de/3Block1.php/Tutorium/SS08/TheorieB/`
Sie können sich von Donnerstag, dem 17.04.2008 16:00 Uhr bis Freitag, den 18.04.2008 24:00 Uhr anmelden. Die tatsächliche Einteilung der Tutorien wird am Sonntag, den 20.04.2008 durch Aushang am Eingang des Physikhochhauses sowie auf folgender Webseite bekanntgegeben:
`http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~seidel/TheoBSS08/`

Übungen

Die Übungen zur Vorlesung **Theoretische Physik B** finden montags um 8:00 Uhr, um 9:45 Uhr und um 11:30 Uhr statt. Der reguläre Übungsbetrieb beginnt am 21.04.2008.
Die Übungsblätter werden freitags in der Vorlesung ausgegeben und müssen bis donnerstags der darauffolgenden Woche 12:00 Uhr bearbeitet werden. Die Abgabe erfolgt in dem entsprechenden Kasten am Eingang des Hochhauses. Die Aufgaben werden in der folgenden Woche in den Tutorien besprochen.
Es ist keine Gruppenabgabe gestattet. Jeder Übungsteilnehmer muss sein eigenes bearbeitetes Übungsblatt abgeben.
In der ersten Übung am 21.04.2008 wird die Nachklausur zur Vorlesung Theoretische Physik A vom WS 07/08 besprochen.

Beratungstutorium

Ein Beratungstutorium findet dienstags von 14:00 bis 15:30 Uhr im Raum 6/1 statt. Der erste Termin ist am 22.04.2008.

Klausur

Die Klausur findet am Dienstag, den 15.07.2008 um 16:00 Uhr im Gerthsen/Gaede-Hörsal statt. Die Rückgabe erfolgt am darauffolgenden Freitag in der Vorlesung.
Zu Beginn des WS08/09 findet eine Nachklausur statt.

Schein

Um einem Schein zu erhalten, müssen Sie:

1. mindestens 50% der Punkte in den Übungen

und

2. mindestens 50% der Punkte in der Klausur (bzw. Nachklausur) erreichen.

Die staatliche Orientierungsprüfung ist bestanden, wenn 30% der Punkte erzielt wurden.

Theo B Tut

martin.brieg@stud.uni-karlsruhe.de

Blatt 0

1. a) (i) Drehmatrix $\Rightarrow O \cdot O^T = \mathbb{1}$ und $\det O = 1$

(ii) $O\vec{n} = 1 \cdot \vec{n}$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)n_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}n_3 = 0$$

$$-1 n_2 = 0 \quad \rightarrow n_2 = 0$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)n_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}n_3 = 0$$

$$\Rightarrow n_3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)n_1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ (1+\sqrt{2})n_1 \end{pmatrix}$$

b) (i)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\Omega R \sin \Omega t - r(\omega+\Omega)\sin(\omega+\Omega)t \\ \Omega R \cos \Omega t + r(\omega+\Omega)\cos(\omega+\Omega)t \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 R \cos \Omega t - r(\omega+\Omega)^2 \cos(\omega+\Omega)t \\ -\Omega^2 R \sin \Omega t - r(\omega+\Omega)^2 \sin(\omega+\Omega)t \end{pmatrix}$$

(ii) $$\tau = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\Omega^2 R^2 \sin^2 \Omega t + 2\Omega(\omega+\Omega) r R \sin \Omega t \cos(\Omega+\omega)t + r^2(\omega+\Omega)^2 \cos^2(\omega+\Omega)t + \ldots}$$

$$= \sqrt{\Omega^2 R^2 + (\omega+\Omega)^2 r^2 + 2\Omega(\omega+\Omega) R r \cos(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \tau = \ldots$$

(iv) $$\vec{r}' = O^T \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \vec{r}$$

c) $F = -mg + mkv^2$

$F = m \cdot a = m \frac{dv}{dt}$, $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz} v$

$\Rightarrow -\cancel{m}g + mkv^2 = \cancel{m} \frac{dv}{dz} v$

$\frac{dv}{-g+kv^2} \cdot v = dz \Rightarrow \int \frac{dv}{-g+kv^2} v = \int dz = z + c$

$\Rightarrow v^2 = u \Rightarrow \frac{du}{dv} = 2v$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{du}{-gku} = \frac{1}{2k} \ln\left(u - \frac{g}{k}\right) + c'$

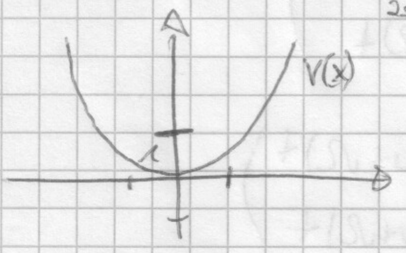
$\Rightarrow z(v) = \frac{1}{2k} \ln\left(v^2 - \frac{g}{k}\right) + \underbrace{c + c'}_{b}$

$s = z(v_1) - z(v_0) = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{v_1^2 - \frac{g}{k}}{v_0^2 - \frac{g}{k}}\right)$

2 $V(x) = V_0\left(e^{\frac{x}{x_0}} + e^{-\frac{x}{x_0}} - 2\right) = V_0\left(2\cosh\frac{x}{x_0} - 2\right)$

a) $\vec{F} = -\nabla V(x) = -\vec{e}_x\, V_0 \frac{1}{x_0} \underbrace{\left(e^{\frac{x}{x_0}} - e^{-\frac{x}{x_0}}\right)}_{2\sinh\frac{x}{x_0}} = m \cdot \vec{a}$

b)



Umkehrpkt: $V(x) = E$

$V_0\left(2\cosh\frac{x}{x_0} - 2\right) = E$

$\Rightarrow \pm x = x_0 \operatorname{Arcosh}\left[\left(\frac{E}{V_0} + 2\right)\frac{1}{2}\right]$

c) $F(x) = F(0) + F'(0) \cdot x + F''(0) \cdot \frac{1}{2!} x^2$

$F(0) = 0$, $F'(0) = -V_0 \frac{1}{x_0} \frac{1}{x_0} 2\cosh\frac{x}{x_0} \Big|_{x=0} = \frac{-2V_0}{x_0^2}$

$F''(0) = \frac{V_0}{x_0^2} \sinh\frac{x}{x_0} \Big|_{x=0} = 0$

$F(x) = \frac{2V_0}{x_0^2} x$

$F = m \cdot \ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{2V_0}{m x_0^2}}_{\omega^2} x = 0$

d) $F'''(0) = -\frac{V_0}{x_0^4} 2\cosh\left(\frac{x}{x_0}\right) \Big|_{x=0} = -\frac{V_0^2}{x_0^4}$

$\frac{1}{3!} F'''(0) x^3$ (Taylor)

3. $\vec{c} = \frac{\vec{p}\times\vec{L}}{k} - m\frac{\vec{r}}{r}$

$\frac{d\vec{c}}{dt} = 0$? , $U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{g}{r^2}$, $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ mit $\vec{F} = -\nabla U(r)$

$\vec{F}(r) = +k\nabla\frac{1}{r} - g\nabla\frac{1}{r^2}$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2}\frac{1\cdot 2x}{\sqrt{\dots}^3} = -\frac{1}{\sqrt{\dots}^3}$
$\frac{x}{r^3}$

$\Rightarrow \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ $\frac{d}{dx}\frac{1}{r^2} = -\frac{4}{2}\frac{2x}{\sqrt{\dots}^6}$

$\vec{F} = -k\frac{\vec{r}}{r^3} + g4\frac{\vec{r}}{r^6}$

$\frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{\dot{\vec{p}}\times\vec{L}}{k} + \frac{\vec{p}\times\dot{\vec{L}}}{k} - m\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - m\vec{r}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\dot{r}$

1. $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$

2. $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$, $\dot{r} = \frac{\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}}{r}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = 0$

einsetzen ... $\Rightarrow \frac{d\vec{c}}{dt} \neq 0$