Probeklausur zur Vorlesung Theorie A	Wintersemester 2009/2010
Karlsruher Institut für Technologie	
Prof. Dr. G. Schön - Dr. G. Metalidis	http://www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen (3+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteile der komplexen Zahlen:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}, \qquad \mathrm{i}^3(\mathrm{i}-2)^2, \qquad \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}.$$

(b) Leiten Sie die Additionstheoreme $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, und $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ her, indem Sie die Euler'sche Formel auf $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ für $\gamma = \alpha, \beta$, und $\alpha+\beta$ anwenden.

Aufgabe 2: Separation der Variablen (1+2+3+2 Punkte)

Die Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen in einem konstanten Kraftfeld lautet

$$M(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\cdot t, \qquad M(t) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}}$$

wobei $F>0$ die konstante Kraft, m eine konstante Masse und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

(a) Lösen Sie zunächst die Bewegungsgleichung nach $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ auf (nachdem Sie den Ausdruck für $M(t)$ in diese eingesetzt haben).

(b) Geben Sie das asymptotische Verhalten von $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ für $t \to +\infty$ und für $t \to 0$ an, indem Sie im Ergebnis von (a) die rechte Seite für große und kleine t betrachten.

(c) Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung mit Hilfe des Ergebnisses von (a). Die Anfangsbedingung laute $x(t=0)=0$.
Hinweis: Beim Berechnen des auftretendes Integrals hilft eine Substitution der Art $\tau = c_1 + c_2 t^2$ weiter.

(d) Skizzieren Sie $v(t)$ und $x(t)$ als Funktion der Zeit unter Beachtung der asymptotischen Regionen.

Aufgabe 3: Der harmonische Oszillator im überdämpften Fall (2+3+3 Punkte)

Wir betrachten die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

im **überdämpften (!)** Fall $\gamma > \omega_0$.

(a) Geben Sie die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung ($f(t)=0$) mit den Anfangsbedingungen $x(t=0)=0$, $\dot{x}(t=0)=v_0$ an.

(b) Die Green'sche Funktion $G(t)$ ist eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ der Bewegungsgleichung für den Fall $f(t)=\delta(t)$ (und mit $x_p(t<0)=0$). Leiten Sie einen Audruck für $G(t)$ her.

(c) Verwenden Sie die Green'sche Funktion, um eine partikuläre Lösung der Bewegungsgleichung für den Fall $f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$ zu finden, wobei $\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > \alpha > 0$.

Aufgabe 4: Fourier-Transformation (1+2+2+2+2 Punkte)

Ein Teilchen mit konstanter Masse m bewegt sich unter Einfluss einer Reibungskraft $-\alpha v$ und einer Kraft $F(t)$.

(a) Wie lautet die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $v(t)$ des Teilchens?

(b) Die Fourier-Transformierte $\tilde{v}(\omega)$ lässt sich mittels Fourier-Transformation der Differentialgleichung schreiben als $\tilde{v}(\omega) = \tilde{\mu}(\omega) \cdot \tilde{F}(\omega)$. Leiten Sie einen Ausdruck für $\tilde{\mu}(\omega)$ her.

(c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{g}(\omega)$ der Funktion $g(t) = \frac{1}{m}\theta(t)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{m}}$.

(d) Leiten Sie aus der Beziehung $\tilde{v}(\omega) = \tilde{\mu}(\omega) \cdot \tilde{F}(\omega)$ einen Ausdruck für $v(t)$ her im allgemeinen Fall einer beliebigen Kraft $F(t)$, indem Sie das Faltungstheorem und das Ergebnis der Teilaufgabe (c) benutzen.

(e) Bestimmen Sie unter Benutzung des Ergebnisses von (b) oder (d) eine partikuläre Lösung $v_p(t)$ für den Fall $F(t) = F_0 \cos(\bar{\omega} t)$.