Lösungsvorschlag Probeklausur Theorie A **WS 2009/2010**
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1

(a) Erster Ausdruck:

$$\begin{aligned} e^{i\pi/2} &= \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i \\ \Rightarrow \ \mathrm{Re}\{e^{i\pi/2}\} &= 0, \quad \mathrm{Im}\{e^{i\pi/2}\} = 1; \end{aligned}$$

Zweiter Ausdruck:

$$\begin{aligned} i^3(i-2)^2 &= -i(-1-4i+4) = i-4-4i = -4-3i \\ \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\{i^3(i-2)^2\} &= -4, \quad \mathrm{Im}\{i^3(i-2)^2\} = -3 \end{aligned}$$

Dritter Ausdruck:

$$\begin{aligned} \tfrac{1+i}{1-i} &= \tfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \tfrac{1+2i-1}{1+1} = i \\ \Rightarrow \ \mathrm{Re}\{e^{i\pi/2}\} &= 0, \quad \mathrm{Im}\{e^{i\pi/2}\} = 1 \end{aligned}$$

(b) Erstes Additionstheorem:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) + (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\right] = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Zweites Additionstheorem:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}\right) = \frac{1}{2i}\left[e^{i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) - (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[2i\sin\alpha\cos\beta + 2i\cos\alpha\sin\beta\right] = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Durch Einsetzen des Ausdrucks für $M(t)$ in die Bewegungsgleichung ergibt sich:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\frac{dx}{dt} = F\cdot t \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2}{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F^2\cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow \ m^2c^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F^2\cdot t^2\left(c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(m^2c^2 + F^2\cdot t^2\right) = F^2\cdot t^2\cdot c^2$$

Da wir den Fall $F > 0$ und Zeiten $t > 0$ betrachten, folgt aus der Bewegungsgleichung $\frac{dx}{dt} > 0$; beim Ziehen der Wurzel behalten wir deshalb nur die positive Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{F^2\cdot t^2\cdot c^2}{m^2c^2 + F^2\cdot t^2}} = \frac{F\cdot t}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2}}$$

(b) Für kleine Zeiten t ($t \to 0$) gilt $\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2 \ll 1$. Wir können also den Summanden $\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2$ unter der Wurzel vernachlässigen. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{F\cdot t}{m}$$

Für grosse Zeiten t ($t \to \infty$) gilt $\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2 \gg 1$. In diesem Fall können wir folgende Näherung vornehmen: $\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2} \approx \frac{F\cdot t}{mc}$. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{F\cdot t}{m}\cdot\frac{mc}{F\cdot t} = c$$

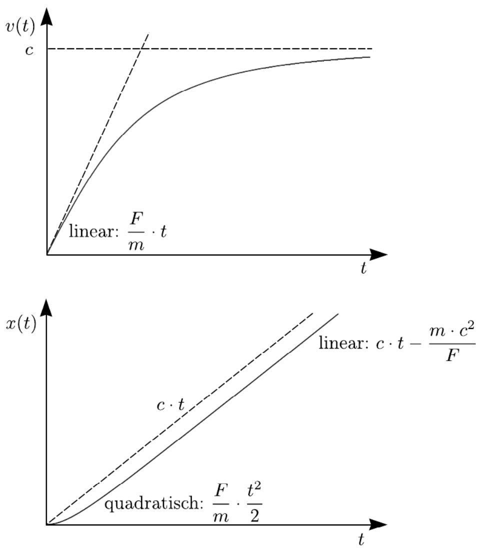
(c) Wir berechnen $x(t)$, indem wir die Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$ nach der Zeit integrieren:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F\cdot t}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2}} \Rightarrow \int_{x_o=0}^{x} dx' = \int_0^t \frac{F\cdot t'}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t'}{mc}\right)^2}}dt'$$

Wir substituieren nun $\tau = 1+\left(\frac{F\cdot t'}{mc}\right)^2$, $d\tau = \frac{2F^2}{m^2c^2}dt'$ und erhalten

$$x = \int_1^{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2} \frac{mc^2}{2F}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau = \frac{mc^2}{F}\cdot\left[\sqrt{\tau}\right]_1^{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2} = \frac{mc^2}{F}\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2}-1\right]$$

d.)



(d) Wir entwickeln x(t) für grosse ($t \to \infty$) und kleine ($t \to 0$) Zeiten:

Für kleine Zeiten gilt $\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2 \ll 1$, und wir können die Näherung $\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2$ vornehmen. Damit ergibt sich

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2 = \frac{F}{2m}\cdot t^2$$

Für grosse Zeiten gilt $\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2 \gg 1$. In diesm Fall nähern wir $\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2} \approx \frac{F\cdot t}{mc}$. Damit ergibt sich

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F}\left[\frac{F\cdot t}{mc}-1\right] = c\cdot t - \frac{mc^2}{F}$$

Aufgabe 3

(a) Die allgemeine homogene Lösung der Differentialgleichung ist aus der Vorlesung bekannt:

$$x_h(t) = c_1 \cdot e^{(-\gamma+\Omega)t} + c_1 \cdot e^{(-\gamma-\Omega)t},$$

wobei $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Die Konstanten c_1 und c_2 lassen sich aus den Anfangsbedingungen $x_h(0) = 0$, $\dot{x}_h(0) = v_0$ bestimmen:
Zunächst folgt aus $x_h(0) = c_1 + c_2 = 0$ die Bedingung $c_2 = -c_1$. Die Ableitung $\dot{x}_h(t)$ ist damit gegeben durch:

$$\dot{x}_h(t) = c_1 \cdot (-\gamma + \Omega)e^{(-\gamma+\Omega)t} - c_1 \cdot (-\gamma - \Omega)e^{(-\gamma-\Omega)t}$$

Die Bedingung $\dot{x}_h(0) = v_0$ führt zu:

$$\dot{x}_h(0) = 2c_1\Omega = v_0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{v_0}{2\Omega}.$$

Die gesuchte Lösung der Bewegungsgleichung ist also

$$x_h(t) = \frac{v_0}{2\Omega} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \left(e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}\right).$$

(b) Die Greensche Funktion $G(t)$ ist durch die Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t) + 2\gamma\frac{d}{dt}G(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

definiert. Da $\delta(t \neq 0) = 0$ gilt und wir somit für $t \neq 0$ die homogene Differentialgleichung erhalten, machen wir den folgenden Ansatz: $x(t > 0) = c_1 \cdot e^{(-\gamma+\Omega)t} + c_2 \cdot e^{(-\gamma-\Omega)t}$, $x(t < 0) = 0$.

An der Stelle $t = 0$ soll $x(t)$ stetig sein; daraus folgt $c_2 = -c_1$. Um c_1 zu bestimmen, integrieren wir die Gleichung für G(t) zwischen $-\epsilon$ und ϵ:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2}{dt^2}G(t)dt \; + \; 2\gamma \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d}{dt}G(t)dt \; + \; \omega_0^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} G(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt.$$

Für $\epsilon \to 0$ verschwinden das zweite und das dritte Integral, und die Gleichung reduziert sich somit zu:

$$\dot{G}(0+) - \dot{G}(0-) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{G}(0+) = 1$$

wobei wir $\dot{G}(0-) = 0$ verwendet haben. $G(t)$ ist für $t > 0$ also die homogene Lösung mit den Anfangsbedingungen $G(0) = 0$ und $\dot{G}(0) = 1$. Aus Teil (a) folgt:

$$G(t) = \frac{1}{2\Omega}\theta(t)e^{-\gamma t} \cdot \left(e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}\right)$$

(c) Die partikuläre Lösung lässt sich mit Hilfe der Greenschen Funktion bestimmen:

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)f(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\Omega}\, e^{-\alpha t} \int_0^{\infty} \left[e^{(-\gamma+\Omega+\alpha)\tau} - e^{(-\gamma-\Omega+\alpha)\tau}\right] d\tau \\
&= \frac{1}{2\Omega}\, e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{(-\gamma+\Omega+\alpha)\tau}}{-\gamma+\Omega+\alpha} - \frac{e^{(-\gamma-\Omega+\alpha)\tau}}{-\gamma-\Omega+\alpha}\right]_0^{\infty}
\end{aligned}$$

Aufgrund der Bedingung $\alpha < \gamma - \Omega < \gamma + \Omega$ liefert die obere Grenze keinen Beitrag, und es ergibt sich somit

$$x_p(t) \;=\; \frac{1}{2\Omega}\, e^{-\alpha t} \left[\frac{1}{\gamma - \Omega - \alpha} - \frac{1}{\gamma + \Omega - \alpha}\right]$$

Aufgabe 4

(a) Aus $\frac{d}{dt}(m \cdot v) = -\alpha v + F(t)$ folgt die Differentialgleichung für $v(t)$:

$$m\dot{v}(t) + \alpha v(t) = F(t)$$

(b) Durch Einsetzen von $v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{v}(\omega)e^{i\omega t}$ und $F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{F}(\omega)e^{i\omega t}$ in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, [im\omega + \alpha]\, \tilde{v}(\omega)e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{F}(\omega)e^{i\omega t}$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten t erfüllt sein soll, müssen die Integranden gleich sein: $[im\omega + \alpha]\, \tilde{v}(\omega) = \tilde{F}(\omega)$, und daraus folgt:

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{1}{im\omega + \alpha} \cdot \tilde{F}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mu}(\omega) = \frac{1}{im\omega + \alpha}$$

(c) Wir berechnen die Fouriertransformierte der Funktion $g(t) = \frac{1}{m}\theta(t)e^{-\frac{\alpha t}{m}}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{1}{m}\theta(t)e^{-\frac{\alpha t}{m}}e^{-i\omega t} = \frac{1}{m}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha}{m}+i\omega\right)t} \\
&= \frac{1}{m}\left[\frac{e^{-\left(\frac{\alpha}{m}+i\omega\right)t}}{-\left(\frac{\alpha}{m}+i\omega\right)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + im\omega}
\end{aligned}$$

(d) Aus der Beziehung $\tilde{v}(\omega) = \tilde{\mu}(\omega)\tilde{F}(\omega)$ folgt mit Hilfe des Faltungstheorems:

$$v(t) = (\mu * F)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \mu(t')F(t - t')$$

Wir benötigen nun noch die Funktion $\mu(t)$, deren Fouriertransformierte durch $\tilde{\mu}\omega = \frac{1}{im\omega+\alpha}$ gegeben ist. Aus Teil (c) wissen wir, dass $\mu(t) = \frac{1}{m}\Theta(t)e^{-\frac{\alpha t}{m}}$ gilt. Für $v(t)$ ergibt sich damit

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{1}{m}\Theta(t')e^{-\frac{\alpha t'}{m}}F(t - t') = \frac{1}{m}\int_0^{\infty} dt' e^{-\frac{\alpha t'}{m}}F(t - t')$$

(e) Wir präsentieren hier zwei Lösungswege:
Die erste Methode geht aus von der Beziehung $\tilde{v}(\omega) = \frac{1}{im\omega+\alpha} \cdot \tilde{F}(\omega)$. Zunächst benötigen wir die Fouriertransformierte der Kraft $F(t) = F_0\cos(\bar{\omega}) = \frac{F_0}{2}\left(e^{i\bar{\omega}t} + e^{-i\bar{\omega}t}\right)$. Diese ist gegeben durch $F(\omega) = \frac{F_0}{2}\left(2\pi\delta(\omega - \bar{\omega}) + 2\pi\delta(\omega + \bar{\omega})\right)$. Damit folgt für $v(t)$

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{v}(\omega)e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{\mu}(\omega)\tilde{F}(\omega)e^{i\omega t} \\
&= \frac{F_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{im\omega + \alpha}\delta(\omega - \bar{\omega})e^{i\omega t} + \frac{F_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{im\omega + \alpha}\delta(\omega + \bar{\omega})e^{i\omega t} \\
&= \frac{F_0}{2}\left[\frac{1}{im\bar{\omega} + \alpha}e^{i\bar{\omega}t} + \frac{1}{-im\bar{\omega} + \alpha}e^{-i\bar{\omega}t}\right] = \frac{F_0}{m^2\bar{\omega}^2 + \alpha^2}\left[\alpha\cos(\bar{\omega}t) + m\bar{\omega}\sin(\omega t)\right]
\end{aligned}$$

Die zweite Methode verwendet die Gleichung $v(t) = \frac{1}{m}\int_0^{\infty} dt' e^{-\frac{\alpha t'}{m}}F(t - t')$, die in Teil (d) hergeleitet wurde:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{1}{m}\int_0^{\infty} dt' e^{-\frac{\alpha t'}{m}}F(t - t') = \frac{F_0}{2m}\int_0^{\infty} dt' e^{-\frac{\alpha t'}{m}}\left[e^{i\bar{\omega}(t-t')} + e^{-i\bar{\omega}(t-t')}\right] \\
&= \frac{F_0}{2m}e^{i\bar{\omega}t}\left[\frac{e^{\left(-\frac{\alpha}{m}-i\bar{\omega}\right)t'}}{-\frac{\alpha}{m} - i\bar{\omega}}\right]_0^{\infty} + \frac{F_0}{2m}e^{-i\bar{\omega}t}\left[\frac{e^{\left(-\frac{\alpha}{m}+i\bar{\omega}\right)t'}}{-\frac{\alpha}{m} + i\bar{\omega}}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{F_0}{2m}\left[\frac{1}{\frac{\alpha}{m} + i\bar{\omega}}e^{i\bar{\omega}t} + \frac{1}{\frac{\alpha}{m} - i\bar{\omega}}e^{-i\bar{\omega}t}\right] = \frac{F_0}{m^2\bar{\omega}^2 + \alpha^2}\left[\alpha\cos(\bar{\omega}t) + m\bar{\omega}\sin(\omega t)\right]
\end{aligned}$$