1 (a) Block 1 & 2:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 0 + 3 = 4$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 1-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Block 3:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 + 2 + 3 = 5$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 0-3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) A ist Drehmatrix, wenn gilt: (i) $AA^T = \mathbb{1}$, (ii) $\det A = 1$

Block 1 & 2:

(i) $$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1$$

Bemerkung: A beschreibt eine Drehung um die x-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ $\left(\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

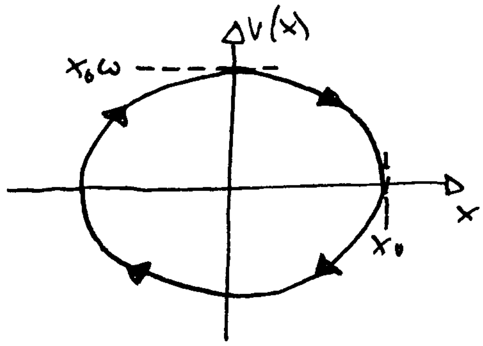
Block 3:

(i) $$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1$$

Bemerkung: A beschreibt eine Drehung um die y-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ $\left(\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

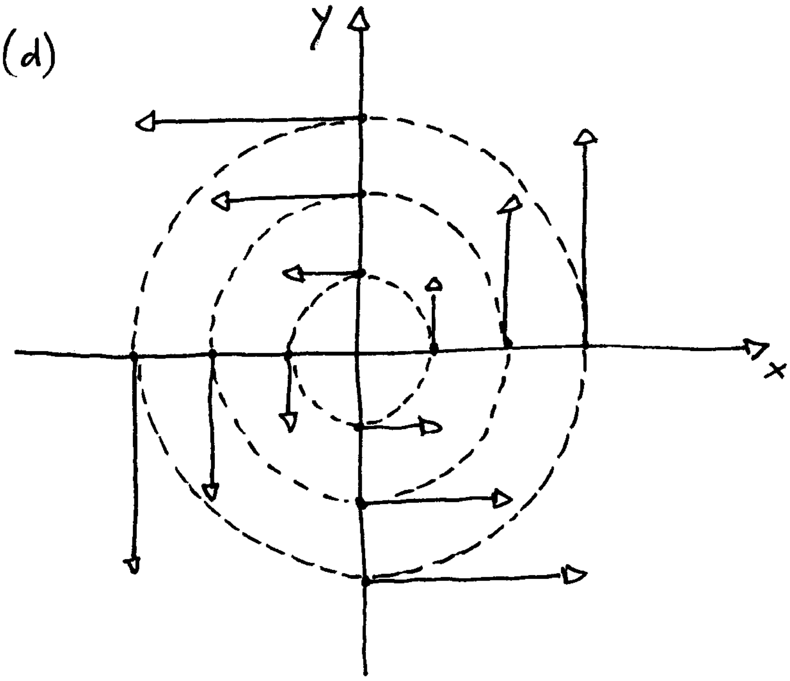
(c) $x(t) = x_0 \sin(\omega t) \Rightarrow v(t) = \dot{x}(t) = x_0 \omega \cos(\omega t)$



$$\frac{x(t)^2}{x_0^2} + \frac{v(t)^2}{x_0^2\omega^2} = 1$$

(Ellipsengleichung)

(d)



$|\vec{F}| \to \infty$ für $x, y \to \infty$

$\vec{F} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ und „rotiert“ gegen den Uhrzeigersinn

(2) (a) $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -A\omega \sin(\omega t)\vec{e}_x + B\omega\cos(\omega t)\vec{e}_y + \frac{h\omega}{2\pi}\vec{e}_z$

$$|\vec{v}(t)| = \left[(-A\omega \sin(\omega t))^2 + (B\omega\cos(\omega t))^2 + \left(\frac{h\omega}{2\pi}\right)^2\right]^{1/2}$$

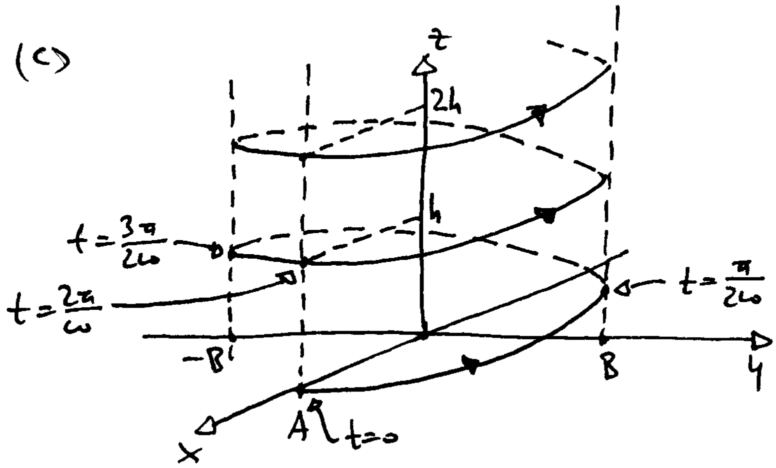
$$= \omega\left[A^2\sin^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t) + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{1/2}$$

(b) $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)\vec{e}_x - B\omega^2\sin(\omega t)\vec{e}_y$

$$|\vec{a}(t)| = \left[(-A\omega^2\cos(\omega t))^2 + (B\omega^2\sin(\omega t))^2\right]^{1/2}$$

$$= \omega^2\left[A^2\cos^2(\omega t) + B^2\sin^2(\omega t)\right]^{1/2}$$

(c)



(d) $A = B \Rightarrow \vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\vec{e}_x + A\sin(\omega t)\vec{e}_y + \frac{h\omega t}{2\pi}\vec{e}_z$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = A\vec{e}_\rho + \frac{h\omega t}{2\pi}\vec{e}_z$ mit $\phi = \omega t$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = A\dot{\vec{e}}_\rho + \frac{h\omega}{2\pi}\vec{e}_z$, $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\phi}\,\vec{e}_\phi = \omega\vec{e}_\phi$

$= A\omega\vec{e}_\phi + \frac{h\omega}{2\pi}\vec{e}_z$

$\Rightarrow \vec{a}(t) = A\omega\dot{\vec{e}}_\phi$, $\dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi}\,\vec{e}_\rho = -\omega\vec{e}_\rho$

$= -A\omega^2\vec{e}_\rho$

<u>Hausaufgabe</u>: Lösen Sie Teilaufgabe (d) für $A \neq B$!

③ <u>Block 1 & 2:</u>

(a) $\dot{x}(t) = A\kappa\cos(\kappa t) - B\kappa\sin(\kappa t)$

$\ddot{x}(t) = -A\kappa^2\sin(\kappa t) - B\kappa^2\cos(\kappa t) = -\kappa^2 x(t)$

$\Rightarrow \kappa^2 = \alpha$; wähle $\kappa = +\sqrt{\alpha}$

$x(0) = B = x_0$

$\dot{x}(0) = A\kappa = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow x(t) = x_0\cos(\sqrt{\alpha}t)$, $v(t) = \dot{x}(t) = -x_0\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}t)$

(b) $x(t) = x_0 \cos(\sqrt{\alpha} t) \stackrel{!}{=} 0$

Wähle zum Beispiel $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \left|v\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right| = x_0\sqrt{\alpha}$

<u>Block 3:</u>

(a) $\dot{\theta}(t) = Ak\cos(kt) - Bk\sin(kt)$

$$\ddot{\theta}(t) = -Ak^2\sin(kt) - Bk^2\cos(kt) = -k^2\theta(t)$$

$\Rightarrow k^2 = \alpha$; wähle $k = +\sqrt{\alpha}$

$\theta(0) = B = \theta_0$

$\dot{\theta}(0) = Ak = 0 \Rightarrow A = 0$

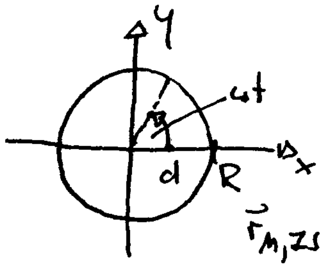
$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\alpha} t)$, $\dot{\theta}(t) = -\theta_0\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha} t)$

(b) $\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\alpha} t) \stackrel{!}{=} 0$

Wähle zum Beispiel $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \left|\dot{\theta}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right| = \theta_0\sqrt{\alpha}$

4 (a) IS: raumfestes System (Inertialsystem) mit Ursprung im Zentrum des Teufelsrads.

Mensch rotiert in IS im Abstand d:



$\vec{r}_{M,IS}(0) = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{r}_{M,IS}(t) = d\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{M,IS}(t) = d\omega\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{M,IS}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Anfangsbedingungen für den Schuh: $\vec{r}_S(0) = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_S(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega d \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Schuh bewegt sich in ZS geradlinig gleichförmig

$$\Rightarrow \vec{r}_{S,ZS}(t) = \vec{r}_S(0) + \vec{v}_S(0) = \begin{pmatrix} d \\ \omega d t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Der Schuh erreicht den Rand für $|\vec{r}_{ZS}| \overset{!}{=} R$

$$\Rightarrow d\sqrt{1+\omega^2 t^2} \overset{!}{=} R \quad \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{R^2}{d^2}-1}$$

(c) T: Bezugssystem, das fest mit dem Teufelsrad verbunden ist und für $t=0$ mit ZS zusammenfällt

Bahnkurve des Schuhs in T:

$$\vec{r}_{S,T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_{S,ZS}(t)$$

$$= d \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d)