

Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Probeklausur mit Lösungsvorschlägen

Aufgabe 1: Basiswechsel

[3 + 3 = 6]

Gegeben ist ein Vektor $\vec{r} = (3, 2)$ im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Orthonormalbasis $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ mit $\hat{u}_1 \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (1, 2)$ und $\hat{u}_2 \perp \hat{u}_1$. Schreiben Sie $\vec{r}$ in dieser Basis.

Lösung: $\hat{u}_1 \parallel \vec{a}$ per Normierung: $\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. Darauf senkrecht steht $\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ (als Rechtssystem so eindeutig). In dieser Basis lautet $\vec{r}$

$$\vec{r} = (\vec{r} \cdot \hat{u}_1)\hat{u}_1 + (\vec{r} \cdot \hat{u}_2)\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(3 + 4)\hat{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}(-6 + 2)\hat{u}_2 = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{u}_1 - \frac{4}{\sqrt{5}}\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(7, -4)_{\hat{u}}.$$

Aufgabe 2: Gradient, Divergenz

[5 + 7 = 12]

Berechnen Sie ($k, \vec{a} = \text{const}, r = |\vec{r}|$)

$$(a) \quad \vec{\nabla} \frac{\cos(kr)}{r}, \quad (b) \quad \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Lösung: wir berechnen zunächst

$$\partial_i r = \frac{\partial r}{\partial r_i} = \partial_i \sqrt{\sum_i r_i^2} = \frac{1}{2\sqrt{\sum_i r_i^2}} 2r_i = \frac{r_i}{r}.$$

(a) Wir berechnen die i -te Komponente des Gradienten mit der Quotientenregel

$$\partial_i \frac{\cos(kr)}{r} = \frac{-k \sin(kr) \frac{r_i}{r} r - \cos(kr) \frac{r_i}{r}}{r^2},$$

also

$$\vec{\nabla} \frac{\cos(kr)}{r} = -\frac{1}{r^2} \left(k\vec{r} \sin(kr) + \frac{\vec{r}}{r} \cos(kr) \right).$$

(b) Die Divergenz berechnen wir auch in Indexschreibweise:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} &= \sum_i \partial_i \frac{(\vec{a} \times \vec{r})_i}{r^3} = \sum_{ijk} \partial_i \frac{\epsilon_{ijk} a_j r_k}{r^3} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_j \partial_i r_k \frac{1}{r^3} \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_j \left(\delta_{ik} \frac{1}{r^3} + r_k \frac{-3}{r^4} \frac{r_i}{r} \right) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_j \left(\frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3r_i r_k}{r^5} \right) = 0, \end{aligned}$$

denn der Ausdruck in der großen Klammer ist symmetrisch unter Vertauschung von i und k , während $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$. Alternativ kann man zeigen, dass $\frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{a}}{r}$ und verwenden, dass die Divergenz einer Rotation immer verschwindet.

Aufgabe 3: Kurve**[4 + 2 + 3 + 1 + 2 = 12]**

Gegeben ist eine mit t parametrisierte Kurve ($\omega, r_0 = \text{const}$)

$$\vec{r}(t) = r_0 (4 \sin \omega t, 3 \sin \omega t, -5 \cos \omega t) .$$

Berechnen Sie

- (a) den Tangentenvektor $\hat{t}$,
- (b) die Länge $s(t)$ der Kurve,
- (c) die Krümmung κ ,
- (d) den Radius ρ des Krümmungskreises.
- (e) Welche Gestalt hat die Kurve?

Lösung:

- (a) wir berechnen zunächst die Geschwindigkeit und deren Betrag,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \omega r_0 (4 \cos \omega t, 3 \cos \omega t, 5 \sin \omega t) \\ \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| &= \omega r_0 \sqrt{(16 + 9) \cos^2 \omega t + 25 \sin^2 \omega t} = 5\omega r_0 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\hat{t} = \left(\frac{4}{5} \cos \omega t, \frac{3}{5} \cos \omega t, \sin \omega t \right) .$$

- (b) wir berechnen

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_0^t 5\omega r_0 dt = 5\omega r_0 t .$$

- (c) Die Krümmung berechnen wir per

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \left| \frac{d\hat{t}}{dt} \right| / \left| \frac{ds}{dt} \right| .$$

Wir erhalten

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\omega}{5} (-4 \sin \omega t, -3 \sin \omega t, 5 \cos \omega t), \quad \left| \frac{d\hat{t}}{dt} \right| = \omega, \quad \frac{ds}{dt} = 5\omega r_0 ,$$

und damit $\kappa = 1/(5r_0)$.

- (d) Damit bekommen wir den zeitlich konstanten Krümmungsradius $\rho = 1/\kappa = 5r_0$.

- (e) Wir schreiben

$$\vec{r}(t) = 5r_0 \left[\frac{(4\hat{x} + 3\hat{y})}{5} \sin \omega t - \hat{z} \cos \omega t \right] \equiv 5r_0 [\hat{u} \sin \omega t - \hat{z} \cos \omega t] .$$

Darin ist $\hat{u}$ ein Einheitsvektor in der x - y Ebene und damit ist $\vec{r}(t)$ die Parametrisierung eines Kreises mit Radius $5r_0$ und dem Ursprung als Mittelpunkt in der $\hat{u}$ - z Ebene.

Aufgabe 4: Drehungen**[10]**

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$

in einem System S . Bestimmen Sie die Drehmatrix D , die beide Vektoren in ein System S' so transformiert, dass

$$\vec{r}' = (0, 0, 1), \quad \vec{v}' = (1, 0, 0).$$

Lösung: $\vec{r}$ zeigt entlang der Winkelhalbierenden in der x - y Ebene. Durch zwei Drehungen legen wir $\vec{r}$ in die gewünschte Richtung: zunächst drehen wir um $-\pi/4$ um die z -Achse, dann um $-\pi/2$ um die y -Achse. Anwenden der gleichen Drehungen auf $\vec{v}$ erfordert noch eine weitere Drehung um $-\pi/2$ um die z -Achse, damit $\vec{v}$ in x -Richtung zeigt. Letztere lässt $\vec{r}$ invariant.

Also

$$\begin{aligned} D &= D_z(-\pi/2)D_y(-\pi/2)D_z(-\pi/4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Probe:

$$D\vec{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D\vec{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ können wir für die 9 Elemente von D Bedingungen formulieren und dann ein Gleichungssystem lösen. 3+3 Gleichungen für die geforderte Transformation. Aus Zeilen- und Spaltenorthonormalität erhalten wir die restlichen Bedingungen.

Aufgabe 5: Corioliskraft**[5]**

Sie befinden sich auf der Erde bei 45° nördlicher Breite und bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$, $|\vec{v}| = v$. Bestimmen Sie den Betrag der Coriolisbeschleunigung b_c in der Horizontalen.

Lösung: $\hat{z}$ zeige nach oben, $\hat{x}$ nach Osten, $\hat{y}$ nach Norden. Der Geschwindigkeitsvektor in der Horizontalen (x - y Ebene) lautet $\vec{v} = v(\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi)$ (ϕ beliebig). Bei $\beta = 45^\circ$ nördlicher Breite lautet $\vec{\omega} = \omega(\hat{z} \sin \beta + \hat{y} \cos \beta) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\hat{y} + \hat{z})$. Wir erhalten die Coriolisbeschleunigung

$$\begin{aligned} \vec{a}_c &= -2\vec{\omega} \times \vec{v} = -\sqrt{2}\omega v(\hat{y} + \hat{z}) \times (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) \\ &= -\sqrt{2}\omega v(\hat{y} \times \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \times \hat{y} \sin \phi + \hat{z} \times \hat{x} \cos \phi + \hat{z} \times \hat{y} \sin \phi) \\ &= -\sqrt{2}\omega v(-\hat{z} \cos \phi + \hat{y} \cos \phi - \hat{x} \sin \phi). \end{aligned}$$

Der Betrag von $\vec{a}_c$ in der Horizontalen ist also unabhängig von der Richtung der Bewegung:

$$b_c = \sqrt{2}\omega v |\hat{y} \cos \phi - \hat{x} \sin \phi| = \sqrt{2}\omega v.$$

Aufgabe 6: Ball auf Karussell**[2 + 4 + 2 + 4 + 3 = 15]**

Zur Zeit $t = 0$ befinden Sie sich in einem Karussell am Punkt $\vec{r}(0) = (R, 0)$, wobei der Mittelpunkt der Ursprung ist (System S'). Das Karussell dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um seinen Mittelpunkt. Im folgenden betrachten wir das Inertialsystem S , dessen Ursprung mit dem Mittelpunkt des Karussells zusammenfällt.

- Mit welchem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}' = (v_1, v_2)$ müssen Sie den Ball zur Zeit $t = 0$ in S' anstoßen, wenn die Geschwindigkeit in S nur eine Komponente in Richtung des Mittelpunktes haben soll, $\vec{v} = (-v, 0)$? Dies sei die Anfangsbedingung für alle folgenden Teilaufgaben.
- Bestimmen Sie $\vec{r}(t)$ im Inertialsystem S und im Karussellsystem S' .
- Zu welchem Zeitpunkt t_0 nach dem Anstoß erreicht der Ball wieder den Radius R ?
- In dem Karussell sitzen ebenfalls zwei Freunde A und B beim Radius R , jedoch um $\phi_A = \pi/2$ (rechts von Ihnen) bzw. $\phi_B = \pi$ von Ihnen entfernt. Wie muss v jeweils gewählt werden, damit Sie A bzw. B genau treffen (die einfachste Lösung reicht)?
- Skizzieren Sie die Bahnkurven aus Teil (d) in S und S' .

Lösung: Größen in S sind ungestrichen, in S' gestrichen.

- Bei $t = 0$ bewegen wir uns in S' entlang der positiven y Achse mit der Geschwindigkeit ωR . Diese Bewegung muss für die geforderte Anfangsbedingung in S kompensiert werden. Also haben wir in S' : $\vec{v}'(0) = (-v, -\omega R)$.
- Aus $\vec{v}(t) = (-v, 0)$ bekommen wir mit der Anfangsbedingung $\vec{r}(0) = (R, 0)$ sofort $\vec{r}(t) = (R - vt, 0)$. Der Ball bewegt sich in S gleichförmig, geradlinig.

Für die Bewegung in S' müssen wir lediglich um den Winkel ωt rotieren. Also

$$\vec{r}'(t) = (R - vt)(\cos \omega t, -\sin \omega t).$$

Das Vorzeichen in der y Komponente ist notwendig, um eine mathematisch positive Drehung zu erhalten ($\omega > 0$).

- Aus $\vec{r}(t_0) = (R - vt_0, 0) = (-R, 0)$ erhalten wir $t_0 = 2R/v$.
- Damit der Ball die Freunde auf dem Rand des Karussells erreicht, muss er genau die Zeit t_0 unterwegs sein,

$$\vec{r}(t_0) = -R(\cos \omega t_0, -\sin \omega t_0).$$

Freund A erreichen wir mit $\omega t_0 = 2\omega R/v = \pi/2$, also mit $v = 4\omega R/\pi$. Bei Freund B muss das Karussell (mindestens) einmal komplett umlaufen, also $\omega t_0 = 2\pi$ oder $v = \omega R/\pi$.

- In S haben wir eine gleichförmig geradlinige Bewegung von $(R, 0)$ nach $(-R, 0)$ entlang der x -Achse. Hilfreich für die Skizzen in S' ist die Feststellung, dass $\vec{r}'(t_0/2) = (0, 0)$ und dass die Bewegung zunächst in negativer y -Richtung verläuft. Im Fall B muss der Ball den Mittelpunkt des Karussells aus Sicht in S' scheinbar rückwärts durchlaufen. Das führt auf eine Schleifenbewegung.

