

Klassische Theoretische Physik I – Probeklausur

Prof. Dr. J. Schmalian

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

19.12.2018

1. Warm-Up

(19 Punkte)

- (a) (5 Punkte) Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -\sqrt{3})^T$ und $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 0)^T$. Bestimmen Sie den Winkel θ , den die beiden Vektoren einschließen, und bestimmen Sie zusätzlich einen normierten Vektor $\mathbf{v}_3$, der sowohl senkrecht auf $\mathbf{v}_1$, als auch auf $\mathbf{v}_2$ steht.

Den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet man mit dem Skalarprodukt. Es gilt

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|} \right) = \arccos \left(\frac{2}{2 \cdot 2} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \quad (= 60^\circ) \quad 3 \text{ Punkt(e)}$$

Das Kreuzprodukt liefert einen Vektor der senkrecht auf den beiden anderen Vektoren steht, also

$$\tilde{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ -2\sqrt{3} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_3}{|\tilde{\mathbf{v}}_3|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

- (b) (2 Punkte) Berechnen Sie das aus dem Potential $V(\mathbf{r}) = x y^2 z^3$ resultierende Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Kraftfeld und Potential hängen über den Zusammenhang $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ zusammen. Für das Kraftfeld ergibt sich (wobei $\partial_i \equiv \partial/\partial r_i$)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = - \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (x y^2 z^3) = - \begin{pmatrix} y^2 z^3 \\ 2x y z^3 \\ 3x y^2 z^2 \end{pmatrix} = -y z^2 \begin{pmatrix} y z \\ 2x z \\ 3x y \end{pmatrix}. \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

- (c) (3 Punkte) Für eine an einem Faden der Länge l pendelnde Masse m gibt es die drei beschreibenden Größen l, m und die Erdbeschleunigung g . Kennzeichnen Sie deren Einheiten, und konstruieren Sie mittels Dimensionsanalyse eine charakteristische Schwingungsfrequenz ω .

Wir geben die zu einer Größe gehörigen Einheiten in eckigen Klammern an. Es gilt

$$[l] = \text{m}, \quad [m] = \text{kg}, \quad [g] = \text{m/s}^2. \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

Um daraus eine Schwingungsfrequenz $[\omega] = \frac{1}{\text{s}}$ zu konstruieren, muss also gelten

$$\omega \propto \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

- (d) (4 Punkte) Ein Teilchen befindet sich in einem zweidimensionalen Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (y, x)^T$. Wie groß ist die Arbeit, die am Teilchen verrichtet werden muss, um es geradlinig von $\mathbf{A} = (-1, 1)^T$ nach $\mathbf{B} = (1, 1)^T$ zu bewegen?

Methode 1: Wir nutzen das Wegintegral (hier gibt W die am Teilchen verrichtete Arbeit an.)

$$W = - \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

mit der Wegparametrisierung $\mathbf{r}(t) = (t, 1)$ wobei $t = [-1; 1]$. Somit gilt $d\mathbf{r}/dt = (1, 0)$, und wir schreiben

$$W = - \int_{-1}^1 dt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{f}(t, 1) = - \int_{-1}^1 dt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = - \int_{-1}^1 dt = -2. \quad 3 \text{ Punkt(e)}$$

Methode 2: Wir sehen, dass $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (y, x)$ ein konservatives Kraftfeld darstellt, und dass das zugehörige Potential lautet $V(\mathbf{r}) = -xy$. Somit gilt für die Arbeit

$$W = V(\mathbf{B}) - V(\mathbf{A}) = -1 - 1 = -2.$$

- (e) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld der Erdanziehung $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$ konservativ ist und bestimmen Sie das dazugehörige Potential $V_g(\mathbf{r})$.

Das Kraftfeld hat keine explizite Zeitabhängigkeit. Es ist auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert und es gilt

$$\nabla \times \mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = 0. \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

Das zum Kraftfeld gehörige Potential ist

$$V_g(\mathbf{r}) = mgz. \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

- (f) (3 Punkte) Wie gehen Sie vor um eine lineare Differentialgleichung vom Grad n ($\hat{=}$ höchste auftretende Ableitung, z.B. $d^n x(t)/dt^n$) mit einer Inhomogenität systematisch zu lösen?

Die Linearität der Gleichung garantiert, dass die Summe aus individuellen Lösungen $x_i(t)$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung ist. Darum kann die gesamte Lösung

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_{hom,i}(t) + \bar{x}(t) \quad 3 \text{ Punkt(e) (inkl. Diskussion)}$$

als Summe aus homogener Lösungen $x_{hom,i}$ und einer beliebigen partikulären Lösung $\bar{x}(t)$ geschrieben werden. Dabei garantieren die n Konstanten c_i , dass $x(t)$ die allgemeinste Lösung des Problems darstellt, mit welcher sich durch korrekte Wahl der Konstanten jede mögliche Lösung realisieren lässt.

2. Kaugummi am Rad

(28 Punkte)

Ein Kaugummi der Masse m klebt außen an einem Rad, welches senkrecht in der Luft hängt und sich mit einer konstanten Frequenz ω dreht. Dabei beschreibt der Kaugummi die Trajektorie

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ 0 \\ R \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

- (a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ des Kaugummis und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$, welche es erfährt. Ermitteln Sie daraus die Kraft $\mathbf{F}_\omega(t)$, die nötig ist um den Kaugummi auf seiner Trajektorie zu halten.

Die Geschwindigkeit ermittelt sich aus $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ und ist

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) \\ 0 \\ R\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad 3 \text{ Punkt(e)}$$

Die Beschleunigung ermittelt sich aus $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ und ist

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ 0 \\ -R\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Die Kraft ergibt sich aus $\mathbf{F}_\omega = m\mathbf{a}$, also

$$\mathbf{F}_\omega(t) = -m\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

- (b) (6 Punkte) Berechnen Sie den vom Kaugummi zurückgelegten Weg $s(t)$. Bestimmen Sie daraus den in einer Periode zurückgelegten Weg.

Wir finden

$$|v(t)| = R\omega \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

woraus sich der zurückgelegte Weg ergibt zu

$$s(t) = R\omega t \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Der in einer Periode zurückgelegte Weg ist

$$s(T) = 2\pi R \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

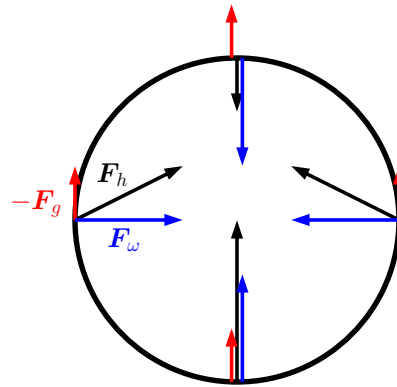
- (c) (8 Punkte) Ohne weitere Kräfte bleibt der Kaugummi dank der Haftkraft $\mathbf{F}_h(t) = \mathbf{F}_\omega(t)$ am Rad kleben. Stellen Sie eine neue Beziehung für $\mathbf{F}_h(t)$ auf, wenn zusätzlich die Gravitationskraft $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$ auf den Kaugummi wirkt. Geben Sie die Haftkraft komponentenweise an. Skizzieren Sie die Haftkraft an vier Punkten entlang der Trajektorie.

Die Gesamtheit aus Haftkraft und Gravitationskraft muss die Bewegung des Kaugummi bestimmen. Somit gilt $\mathbf{F}_\omega(t) = \mathbf{F}_h(t) + \mathbf{F}_g$ oder

$$\mathbf{F}_h(t) = \mathbf{F}_\omega(t) - \mathbf{F}_g \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Einsetzen ergibt

$$\mathbf{F}_h(t) = -m\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$



4 Punkt(e)

Bemerkung: Für $g > R\omega^2$ zeigt der scharze Pfeil am höchsten Punkt nach oben.

- (d) (7 Punkte) Diskutieren Sie an welchem Ort die größte Haftkraft $|\mathbf{F}_h|$ wirkt. Bestimmen Sie diese. Es sei $F_h^{\max}$ die maximale Haftkraft, die das Rad auf den Kaugummi ausüben kann. Berechnen Sie die Frequenz $\omega_{\max}$, bei welcher sich der Kaugummi vom Rad löst.

Die Kraft ist maximal, wenn der rotierende Anteil entlang z wirkt, also bei $t = \pi(n + 3/2)/\omega$ (n ganzzahlig). Dies wird auch durch explizites Nachrechnen bestätigt. Die Kraft ist also maximal bei

$$\mathbf{r} = -R\mathbf{e}_z \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

und nimmt dort den Wert an:

$$\mathbf{F}_h[\pi(n + 3/2)/\omega] = m(g + \omega^2 R)\mathbf{e}_z. \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Setzt man $|\mathbf{F}_h[\pi(n + 3/2)/\omega]| = F_h^{\max}$ so findet man

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{F_h^{\max}/m - g}{R}} \quad 3 \text{ Punkt(e)}$$

3. Kaugummi im freien Fall

(18 Punkte)

Ein Kaugummi [z.B. der aus Aufgabe 2 nachdem er sich zum Zeitpunkt t_0 vom Rad gelöst hat] fliegt im freien Fall $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$ zu Boden. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

- (a) (8 Punkte) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Trajektorie $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$ des Kaugummis auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(t_0)$ und $\mathbf{v}(t_0)$.

Der Kaugummi folgt der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g\mathbf{e}_z \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

$$z(t) = z(t_0) + v_z(t_0)(t - t_0) - g(t - t_0)^2/2 \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

- (b) (5 Punkte) Geben Sie die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ für die Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(t_0) = z_0 \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{v}(t_0) = v_0 \mathbf{e}_x$ explizit an. Falls Sie Aufgabe 2 gelöst haben, dürfen Sie die tatsächlichen Anfangswerte verwenden.

$$x(t) = R\omega_{\max}(t - t_0) \quad x(t) = v_0(t - t_0) \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

$$y(t) = 0 \quad y(t) = 0 \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

$$z(t) = -R - g(t - t_0)^2/2 \quad z(t) = z_0 - g(t - t_0)^2/2 \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Aus Aufgabe 2 identifizieren wir nämlich $z_0 = -R$ und $v_0 = R\omega_{\max}$.

- (c) (5 Punkte) Ermitteln Sie zu welcher Zeit t_1 der Kaugummi auf den Boden ($z = -h$) trifft. Wie weit $\Delta x = [x(t_1) - x(t_0)]$ ist der Kaugummi dabei geflogen?

Aus der Gleichung $z(t_1) = -h$ folgt

$$t_1 = t_0 + \sqrt{2(h - R)/g} \quad t_1 = t_0 + \sqrt{2(z_0 + h)/g} \quad 3 \text{ Punkt(e)}$$

Einsetzen von $x(t_1)$ liefert

$$\Delta x = R\omega_{\max}\sqrt{2(h - R)/g} \quad \Delta x = v_0\sqrt{2(z_0 + h)/g} \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Easter Egg for Christmas:

Es gibt einen Bonuspunkt für die vollständige Lösung aus Aufgaben 2 & 3, d.h.

$$\Delta x = \sqrt{2R(h - R)} \sqrt{\frac{F_h^{\max}}{mg} - 1} \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

4. Teilchen im getriebenen ungedämpften harmonischen Oszillator

(35 Punkte)

Die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m sei durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \theta(t), \quad (1)$$

beschrieben wobei $\omega_0 > 0$, $f_0 > 0$ und der Heaviside-Funktion $\theta(t)$.

- (a) (4 Punkte) Wie sieht die allgemeine homogene Lösung $x_h(t)$ aus ?

Eine einfache Lösung für den homogenen Teil sieht so aus

$$x_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad 2 + 2 \text{ Punkt(e)}$$

mit den zwei zu bestimmenden Konstanten A und B .

- (b) (10 Punkte) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung $\bar{x}(t)$.

Zur Berechnung der partikulären Lösung bedienen wir uns der Green'schen Funktions-Methode. Die Green'sche Funktion (siehe Formelsammlung) für das Problem lautet ($\gamma = 0$)

$$G(t) = \theta(t) \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}. \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Für die partikuläre Lösung ergibt sich also ($f(t') = f_0 \theta(t')$)

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') f(t') = \frac{f_0}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') \theta(t') \sin(\omega_0(t-t')). \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Die Heaviside-Funktionen liefern die Bedingungen $t' > 0$ und $t > t'$. Also läuft die Integrationsvariable über

$$0 < t' < t. \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

Zusätzlich muss stets gelten, dass $t > 0$. So lautet das Integral

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{f_0}{\omega_0} \theta(t) \int_0^t dt' \sin(\omega_0(t-t')) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \theta(t) \cos(\omega_0(t-t')) \Big|_0^t \quad 2 \text{ Punkt(e)} \\ &= \frac{f_0}{\omega_0^2} \theta(t) (1 - \cos(\omega_0 t)). \quad 2 \text{ Punkt(e)} \end{aligned}$$

Zu einem Zeitpunkt $t = t_0 < 0$ befinde sich das Teilchen im Bewegungszustand $x(t_0) = 0$ und $\dot{x}(t_0) = 0$.

- (c) (9 Punkte) Bestimmen Sie die Konstanten in der allgemeinen Lösung $x(t)$ für diesen Fall und geben Sie letztere explizit an. Wo sind die Umkehrpunkte $x_{1,2}$ der Bewegung für $t > 0$?

Die allgemeine Lösung lautet $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2} \theta(t) (1 - \cos(\omega_0 t))$, wobei A und B jetzt bestimmt werden. Den Anfangsbedingungen $x(t_0) = 0$ und $\dot{x}(t_0) = 0$ kann man prinzipiell schon ablesen, dass das Teilchen für $t < 0$ stets in Ruhe war. Wir wollen dies nichtsdestotrotz nachrechnen. Im Bereich $t < 0$ gilt also

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} x(t_0) = A \cos(\omega_0 t_0) + B \sin(\omega_0 t_0) \quad 1 \text{ Punkt(e)} \\ 0 &\stackrel{!}{=} \dot{x}(t_0) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t_0). \quad 2 \text{ Punkt(e)} \end{aligned}$$

Lösen wir die zweite Gleichung, $B = A \tan(\omega_0 t_0)$, und setzen in die erste ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= A [\cos(\omega_0 t_0) + \tan(\omega_0 t_0) \sin(\omega_0 t_0)] = A \left[\frac{\cos^2(\omega_0 t_0) + \sin^2(\omega_0 t_0)}{\cos(\omega_0 t_0)} \right] \\ &= A \frac{1}{\cos(\omega_0 t_0)}. \quad 2 \text{ Punkt(e)} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn $A = 0$, und somit gilt ebenfalls $B = 0$, und die Lösung des Problems lautet

$$x(t) = \bar{x}(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \theta(t) (1 - \cos(\omega_0 t)). \quad 2 \text{ Punkt(e)} \quad (2)$$

Die Lösung oszilliert zwischen

$$\begin{aligned} x_1 &= x\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = 0 \text{ und} \quad 1 \text{ Punkt(e)} \\ x_2 &= x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = 2 \frac{f_0}{\omega_0^2}. \quad 1 \text{ Punkt(e)} \end{aligned}$$

- (d) (8 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung (1) das Potential $V_{<} \equiv V(x, t < 0)$ und $V_{>} \equiv V(x, t > 0)$, in dem sich das Teilchen bewegt. Skizzieren Sie $V_{<}$ und $V_{>}$ in einem Schaubild, und markieren Sie dort die Umkehrpunkte $x_{1,2}$.

Schreiben wir die Bewegungsgleichung um in Newton's Form,

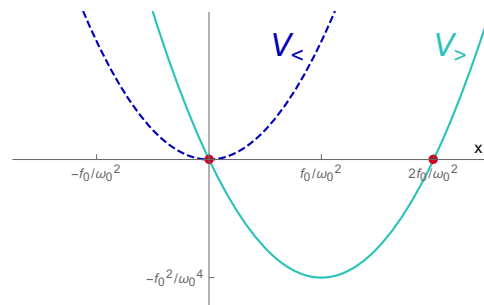
$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + m f_0 \theta(t) \quad \hat{=} \sum_i F_i. \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

Um die zugehörigen Potentiale zu finden, nutzen wir $F_x = -\partial_x V(x)$. Für die beiden Zeiten können wir die Potentiale definieren

$$V_{<}(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2, \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

$$\begin{aligned} V_{>}(x) &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 - m f_0 x \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(x^2 - 2 \frac{f_0}{\omega_0^2} x + \left(\frac{f_0}{\omega_0^2} \right)^2 - \left(\frac{f_0}{\omega_0^2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(x - \frac{f_0}{\omega_0^2} \right)^2 - \frac{m f_0^2}{2 \omega_0^2}, \end{aligned} \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$

wobei wir in der letzten Zeile quadratisch ergänzt haben. So kann man direkt ablesen, dass der Scheitelpunkt des Potentials um $\frac{f_0}{\omega_0^2}$ nach rechts und um $\frac{m f_0^2}{2 \omega_0^2}$ nach unten verschoben wurde (siehe Skizze). In anderen Worten, bezüglich des neuen Potentialminimums hat das Teilchen nun eine endliche Energie, obwohl dessen Gesamtenergie weiterhin null ist, wie sich gleich herausstellen wird.



3 Punkt(e)

- (e) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Teilchens für $t < 0$ ($E_{<}$) und $t > 0$ ($E_{>}$).

Für die Gesamtenergie im Bereich $t < 0$ ergibt sich

$$E_{<} = 0, \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

da sowohl kinetische, als auch potentielle Energie individuell null sind. Um die Energien im Bereich $t > 0$ zu berechnen, benötigen wir die Ableitung von (2), d.h.

$$\dot{x}(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \left(\theta(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\delta(t) (1 - \cos(\omega_0 t))}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{f_0}{\omega_0} \theta(t) \sin(\omega_0 t). \quad 1 \text{ Punkt(e)}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} E_{>} &= E_{kin}^{>} + E_{pot}^{>} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(x - \frac{f_0}{\omega_0^2} \right)^2 - \frac{m f_0^2}{2 \omega_0^2} \\ &= \frac{m}{2} \frac{f_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(\frac{f_0}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) \right)^2 - \frac{m f_0^2}{2 \omega_0^2} \\ &= \frac{m f_0^2}{2 \omega_0^2} - \frac{m f_0^2}{2 \omega_0^2} = 0. \end{aligned} \quad 2 \text{ Punkt(e)}$$