Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman

PD Dr. B. Narozhny

Probeklausur Lösungsvorschlag

14.01.2020

---

1. Kinematik: (30 Punkte)

Ein Körper bewegt sich geradlinig mit einer Bremsung (negativen Beschleunigung), deren Betrag a vom Betrag der Geschwindigkeit v als $a = \gamma\sqrt{v}$ abhängt, wobei γ eine positive Konstante ist. (In der Vektorform $\vec{a} = -\gamma\vec{v}/\sqrt{v}$). Im Anfangsmoment ist der Betrag der Geschwindigkeit des Körpers gleich v_0.

(a) *(15 Punkte) Wie lange dauert es, bevor der Körper anhält?*
Die Beschleunigung ist eine Ableitung

$$a = \frac{dv}{dt} = -\gamma\sqrt{v} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dv}{\sqrt{v}} = \gamma dt.$$

Wir integrieren über die ganze Bahnkurve mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Endgeschwindigkeit 0:

$$-\int\limits_{v_0}^{0} \frac{dv}{\sqrt{v}} = \gamma \int\limits_{0}^{t_f} dt \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{2\sqrt{v_0}}{\gamma}.$$

(b) *(15 Punkte) Welche Strecke hat der Körper zurücklegt, bevor er anhält?*
Lösung 1
Setzen wir die Definitionen von der Geschwindigkeit und der Beschleunigung zusammen:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{vdv}{ds}.$$

Mit der gegebenen Beschleunigung finden wir

$$\frac{vdv}{ds} = -\gamma\sqrt{v} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{v}dv = \gamma ds.$$

Jetzt integrieren wir wie oben

$$-\int\limits_{v_0}^{0} dv\sqrt{v} = \gamma \int\limits_{0}^{s(t_f)} ds \quad \Rightarrow \quad s(t_f) = \frac{2v_0^{3/2}}{3\gamma}.$$

Lösung 2
Benutzen wir die Lösung der Aufgabe 1a und finden die Geschwindigkeit als Funktion von Zeit:

$$-\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv'}{\sqrt{v'}} = \gamma \int\limits_{0}^{t} dt' \quad \Rightarrow \quad v(t) = \left(\sqrt{v_0} - \frac{\gamma t}{2}\right)^2.$$

Erstens, das obige Ergebnis für t_f folgt sofort. Zweitens, benutzen wir die Definition von der Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \int_0^t v(t)dt.$$

Setzen wir hier die Geschwindigkeit ein un berechnen das Integral

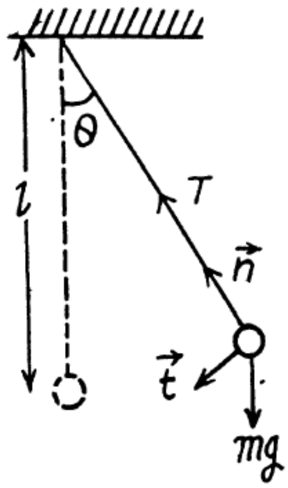
$$s(t_f) = \int_0^{t_f} dt \left(\sqrt{v_0} - \frac{\gamma t}{2}\right)^2 = \frac{2}{3\gamma}\left(\frac{\gamma t}{2} - \sqrt{v_0}\right)^3\Bigg|_0^{t_f} = \frac{2v_0^{3/2}}{3\gamma}.$$

2. Dynamik: (35 Punkte)

Eine kleine, an einem Faden der Länge l aufgehängte Kugel der Masse m wird zunächst so ausgelenkt, dass der Faden einen rechten Winkel mit der Vertikalen bildet, und dann losgelassen (Anfangsgeschwindigkeit ist gleich Null). Finden Sie:

(a) *(15 Punkte) die Gesamtbeschleunigung der Kugel und die Fadenspannung als Funktion von θ, dem Auslenkwinkel des Fadens aus der Vertikalen;*

Hinweise: i) Fadenspannung ist gleich dem Betrag der Kraft, mit der der Faden auf die Kugel wirkt; ii) Überlegen Sie ob der Energieerhaltungssatz hier nützlich sein könnte.



Die Bewegungsgleichung (das Newton'sche Gesetz) lautet

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} = m\boldsymbol{a}.$$

Die tangentiale Komponente der Gleichung lautet

$$mg\sin\theta = ma_t \quad \Rightarrow \quad a_t = g\sin\theta.$$

Die zentripetale Komponente lautet

$$T - mg\cos\theta = ma_c.$$

Von Kinematik

$$a_c = \frac{v^2}{l}.$$

Die Geschwindigkeit als Funktion vom Winkel finden wir von der Energieerhaltung

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\cos\theta \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gl\cos\theta.$$

Deswegen

$$a_c = 2g\cos\theta.$$

Von der tangentialen Komponente der Bewegungsgleichung finden wir die Fadenspannung

$$T = ma_c + mg\cos\theta = 3mg\cos\theta.$$

Die Gesamtbeschleunigung finden wir als Betrag des Beschleunigungsvektors

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = g\sqrt{\sin^2\theta + 4\cos^2\theta} = g\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}.$$

(b) *(10 Punkte) die Fadenspannung in dem Moment, in dem die vertikale Komponente der Kugelgeschwindigkeit maximal ist;*

Die vertikale Komponente der Kugelgeschwindigkeit ist

$$v_y = v\sin\theta \quad \Rightarrow \quad v_y^2 = 2gl\cos\theta\sin^2\theta.$$

Das Maximum finden wir mithilfe der Ableitung

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta\sin^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sin^3\theta_m + 2\sin\theta_m\cos^2\theta_m = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2\theta_m = \sin^2\theta_m.$$

Das ergibt

$$\cos^2\theta_m = \frac{1}{3}.$$

Davon finden wir die Fadenspannung

$$T(\theta_m) = 3mg\cos\theta_m = \sqrt{3}mg.$$

(c) *(10 Punkte) den Winkel θ zwischen dem Faden und der Senkrechten im Moment, in dem der Gesamtbeschleunigungsvektor der Kugel horizontal ausgerichtet ist.*

Wenn die Beschleunigung horizontal ist, ist ihre vertikale Komponente Null:

$$a_y = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_t\boldsymbol{e}_t + a_c\boldsymbol{e}_c)\cdot\boldsymbol{e}_y = a_t\sin\theta_0 - a_c\cos\theta_0 = 0.$$

Wir benutzen die obige Ergebnisse für a_c und a_t und finden

$$g\sin^2\theta_0 - 2g\cos^2\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta_0 = 2\cos^2\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Erzwungener Gedämpfter Oszillator: (35 Punkte)

Betrachten Sie nun einen erzwungenen gedämpften Oszillator (Masse m), das durch die folgende Bewegungsgleichung beschrieben ist

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)\ .$$

Die angelegte Antriebskraft lautet $F(t) = mf(t)$ und

$$f(t) = A\theta(t)\theta(t_0 - t),$$

wobei

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

und $t_0 > 0$. Am Anfang ist der Oscillator bewegungslos ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.)

Betrachten Sie den Fall der schwachen Dämpfung und finden Sie:

(a) *(15 Punkte) die Auslenkung als Funktion der Zeit;*

Lösung 1

Am Anfang ist der Oszillator in Ruhe. Während der Zeit t_0 finden wir die Auslenkung mithilfe der Green'schen Funktion:

$$x_<(t) \equiv x(t < t_0) = \int dt' G(t - t') f(t') = \frac{A}{\Omega} \int_0^t dt' e^{-\beta(t-t')} \sin\Omega(t - t')$$
$$= \frac{A\Omega}{\Omega^2 + \beta^2}\left[1 - e^{-\beta t}\left(\cos\Omega t + \frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right].$$

Für Zeit $t > t_0$ finden wir die übliche Bewegung des gedämpften Oszillators mit der Anfangsbedingungen $x_0 = x(t_0)$ und $v_0 = v(t_0)$.
Die Geschwindigkeit für $t < t_0$ finden wir mithilfe der Ableitung

$$v_<(t) = \frac{d}{dt}x_<(t) = \frac{A}{\Omega}e^{-\beta t}\sin\Omega t,$$

deswegen

$$x_0 = \frac{A\Omega}{\Omega^2 + \beta^2}\left[1 - e^{-\beta t_0}\left(\cos\Omega t_0 + \frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega t_0\right)\right], \quad v_0 = \frac{A}{\Omega}e^{-\beta t_0}\sin\Omega t_0.$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung des schwach gedämpften Oszillators lautet

$$x_>(t) \equiv x(t > t_0) = x_0\left(\cos\Omega(t - t_0) + \frac{\beta + v_0/x_0}{\Omega}\sin\Omega(t - t_0)\right)e^{-\beta(t-t_0)}.$$

Letztendlich, finden wir die Auslenkung als

$$x(t) = x_<(t)\theta(t)\theta(t_0 - t) + x_>(t)\theta(t - t_0).$$

Lösung 2

Man kann auch die Green'sche Funktion für alle Zeiten verwenden:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') f(t').$$

Für $t < t_0$ berechnen wir das Integral genau so als vorher. Für $t > t_0$ finden wir

$$\begin{aligned} x_>(t > t_0) &= \frac{A}{\Omega} \int_0^{t_0} dt' e^{-\beta(t-t')} \sin \Omega(t-t') \\ &= \frac{A\Omega}{\Omega^2 + \beta^2} \left[e^{-\beta(t-t_0)} \left(\cos \Omega(t-t_0) + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega(t-t_0) \right) \right. \\ &\qquad \left. - e^{-\beta t} \left(\cos \Omega t + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega t \right) \right]. \end{aligned}$$

(b) *(10 Punkte) die Gesamtarbeit der Antriebskraft (hier betrachten wir die Arbeit der Kraft F, nicht diejenige gegen diese Kraft);*

Die Arbeit der Kraft F ist definiert als

$$W = \int F dx = \int F v dt.$$

Hier wirkt die Kraft nur während der Zeit t_0, deswegen finden wir die Gesamtarbeit als

$$W = \int dt F(t) v_<(t) = mA \int_0^{t_0} dt v_<(t) = mA \left[x_<(t_0) - x_<(0) \right] = mA x_0.$$

(c) *(10 Punkte) die Energie, die über die gesamte Bewegung, d.h. vor dem Anhalten, dissipiert wird.*

Aus der Energieerhaltung folgt dass die Energie, die über die gesamte Bewegung dissipiert wird, gleich die Gesamtarbeit der Antriebskraft ist:

$$\Delta E_{tot} = W.$$

(d) **Bonus:** (40 Punkte)

die Energie, die über die Zeit t_0 dissipiert wird.

Benutzen wir nochmals die Energieerhaltung. Bezeichnen wir durch

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} + m\omega^2 \frac{x^2}{2},$$

die Energie des "ungedämpften" Oszillators. Am Zeitpunkt t_0 diese Energie beträgt

$$E_0(t_0) = \frac{mv_0^2}{2} + m\omega^2 \frac{x_0^2}{2}.$$

Die einzige Quelle der Energie ist die Antriebskraft. Für einen "ungedämpften" Oszillator wäre die Energie $E_0(t_0)$ gleich die obige Arbeit W. Für die gedämpften Oszillator sind die zwei Größen nicht gleich. Die Differenz ergibt genau die dissipierte Energie

$$\Delta E(t_0) = W - E_0(t_0).$$