Der harmonische Oszillator

Der H.O. ist ein schwingendes System, das durch die Gleichung

manchmal mit Faktor 2 definiert

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega_0^2 x = f$$

Dämpfung — Eigenfrequenz — Anregung

beschrieben wird.

Die allgemeine Lösung* der homogenen Gleichung ist aus der VL bekannt:

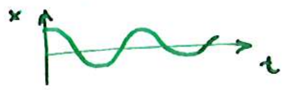
$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

mit $\lambda_{1/2} \in \mathbb{C}$

Drei zu unterscheidende Fälle sind:

für $x(0) = \text{const.}$, $\dot{x}(0) = 0$

- Schwingfall $\Leftrightarrow$ $\omega_0 > \frac{\rho}{2}$



- Kriechfall $\Leftrightarrow$ $\omega_0 < \frac{\rho}{2}$

- Aperiodischer Grenzfall $\Leftrightarrow$ $\omega_0 = \frac{\rho}{2}$

---

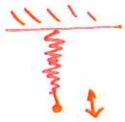
* Im Ansatz für den aperiodischen Grenzfall wird β durch $t \cdot \beta$ ersetzt.

Systeme, bei denen einer Auslenkung entgegen eine zu dieser proportionalen Rückstellkraft existiert und dominiert, können durch den H.O. beschrieben werden.

Bsp.:

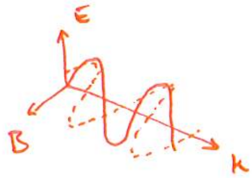
- Pendel (näherungsweise)

- Feder (Hook'sches Gesetz)



- Bewegung im „x^2-Potential"

- Elektromagnetische Wellen (stark vereinfacht)



- vieles mehr ...
- Schwerewellen

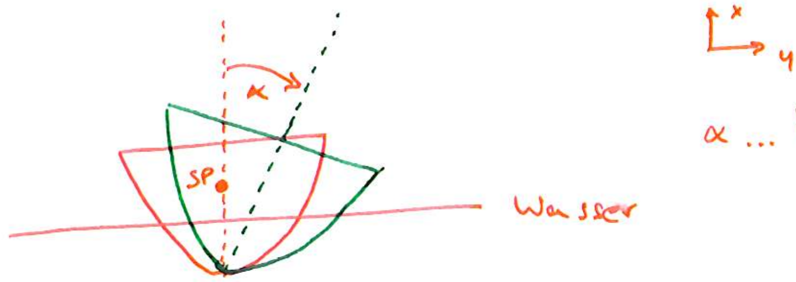
Stellt man bei einem System die Summe aller relevanten, wirkenden Kräfte auf, erhält man für einen H.O. eine Gleichung der Form

$$x + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 \ddot{x} = f$$

Bsp.: Schiff auf See 

Der Rumpf eines Schiffes soll als Kasten genähert werden, wir nehmen an, dass die eintauchende Menge an Schiff linear mit dem Winkel der Auslenkung um die Ruhelage zunimmt.

von vorne:



α ... klein !

Das Schiff erfährt auf der geneigten Seite einen zusätzlichen Auftrieb prop. zum Volumen ΔV.

$$\Delta V \sim \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \Lambda \alpha$$

nicht näher definierter Faktor

Die Auslenkung des Schwerpunktes des Schiffes parallel zur Wasseroberfläche sei klein gegenüber der Höhe des Schwerpunktes.

$$\Delta \vec{r}_{sp} \simeq \frac{2}{3} H \alpha \, \hat{e}_y$$

SP. auf $\frac{2}{3}$ der Höhe des Schiffes

Das Wasser verursache eine Stokes'sche Reibung prop. zu dessen Dichte und zu $\dot{\alpha}$:

$$F_{St} = \kappa \rho \dot{\alpha}$$

κ hängt mit der Viskosität des Wassers zusammen und ist damit klein

$$[\kappa] = \frac{m^4}{s} \quad \ldots \text{Volumen} \times \text{Geschwindigkeit}$$

Fragen:

$\rho = \frac{1000\,kg}{m^3}$, $g = 10\,\frac{m}{s^2}$, $H = 5\,m$, $\Delta = 10\,m^3$, $\kappa = 10\,\frac{m^4}{s}$

$m = 1000\,000\,kg$

i) Mit welcher Frequenz müssen Wellen das Schiff treffen, um es zum Kentern zu bringen? (Resonanzkatastrophe)

ii) Für $\alpha(t=0) = 10°$ und $\dot{\alpha}(t=0) = 0$, wann hat sich bei ruhiger See das Schiff von der Schwingung erholt ($\alpha_{max} \leq 1°$)?

Aufstellen der Gleichung: Summe aller Kräfte

$$m \cdot a = -F_{St} - F_{Auftrieb}$$

$$m \frac{2}{3} H \ddot{\alpha} = -\kappa \rho \dot{\alpha} - \rho g \Delta \alpha$$

$|F_{Auftrieb}| = g \rho V$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{3 \kappa \rho}{2 m H} \dot{\alpha} + \frac{3 \rho g \Delta}{2 m H} \alpha = 0$$

Einheiten überprüfen:

$[\ddot{\alpha}] = \frac{1}{s^2}$, $[\alpha] = 1$

$$\left[\frac{3}{2} \frac{\kappa \rho}{m H}\right] = \frac{\frac{m^4}{s} \frac{kg}{m^3}}{kg \cdot m} = \frac{1}{s} \quad ✓$$

$$\left[\frac{3}{2} \frac{\rho g \Delta}{m H}\right] = \frac{\frac{kg}{m^3} \frac{m}{s^2} m^3}{kg \cdot m} = \frac{1}{s^2} \quad ✓$$

Damit ist Eigenfrequenz und Dämpfung des Systems:

$$\delta = \frac{3 \kappa \rho}{2 m H} \qquad\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{3 \rho g \Lambda}{2 m H}}$$

$$\approx 0.003 \ \frac{1}{s} \qquad\qquad \approx 0.17 \ \frac{1}{s}$$

$\Rightarrow$ i) Wellen, die im Abstand von $\frac{1}{\omega}$ auf die Seite des Schiffes treffen, könnten es zum Kentern bringen ($\sim$ alle 6 Sekunden)

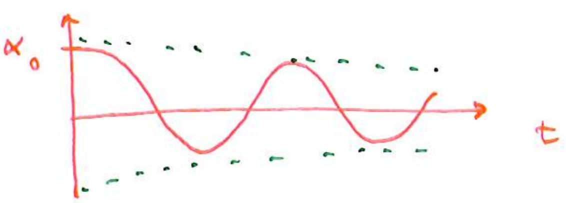
~~Die Lösung für $\alpha(t)$ für den Schwingfall ist bekannt, außerdem gilt $\alpha(0) = const$, $\dot\alpha(0) = 0$~~
~~$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 \, e^{-\frac{\delta}{2} t} \cos$~~

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta^2}{2}} = \sqrt{\frac{3 \rho g \Lambda}{2 m H} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\kappa \rho}{m H}\right)^2}$$

$$\approx 0.17 \ \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\frac{1}{\omega} \approx 6 \, s}}$$

Für $\alpha(0) = const$ und $\dot\alpha(0) = 0$ im Schwingfall ist die Lösung aus der VL bekannt:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \, e^{-\frac{\delta}{2} t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta^2}{2}} \, t\right)$$



Schwingung mit einhüllender e-Fkt. (Dämpfung)

Nun wollen wir wissen, wann die Auslenkung von anfangs $\alpha_{max} = 10°$ auf $\alpha_{max} = 1°$ gedämpft wurde

$$\frac{\alpha(t)}{\alpha(0)} \overset{!}{=} \frac{1}{10} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0} \frac{e^{-\frac{\bar{\delta}}{2}t}}{e^0} \frac{\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\bar{\delta}}{2}^2}\, t\right)}{\cos(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{10} = e^{-\frac{\bar{\delta}}{2}t} \quad \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\bar{\delta}}{2}^2}\, t\right)$$

$\uparrow$

Der oszillierende Term muss weggelassen werden, wenn nur maximale Auslenkungen betrachtet werden. ($\leftrightarrow$ Das Schiff schwingt bei jeder Periode durch den $\frac{\alpha_0}{10}$.)

$$\frac{1}{10} = e^{-\frac{\bar{\delta}}{2}t}$$

$$-\frac{\bar{\delta}}{2}t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{\bar{\delta}} \ln(10)$$

$$\hat{=}\ 1500\ \mathrm{s}\ \hat{=}\ \underline{\underline{25\ \mathrm{min}}}$$