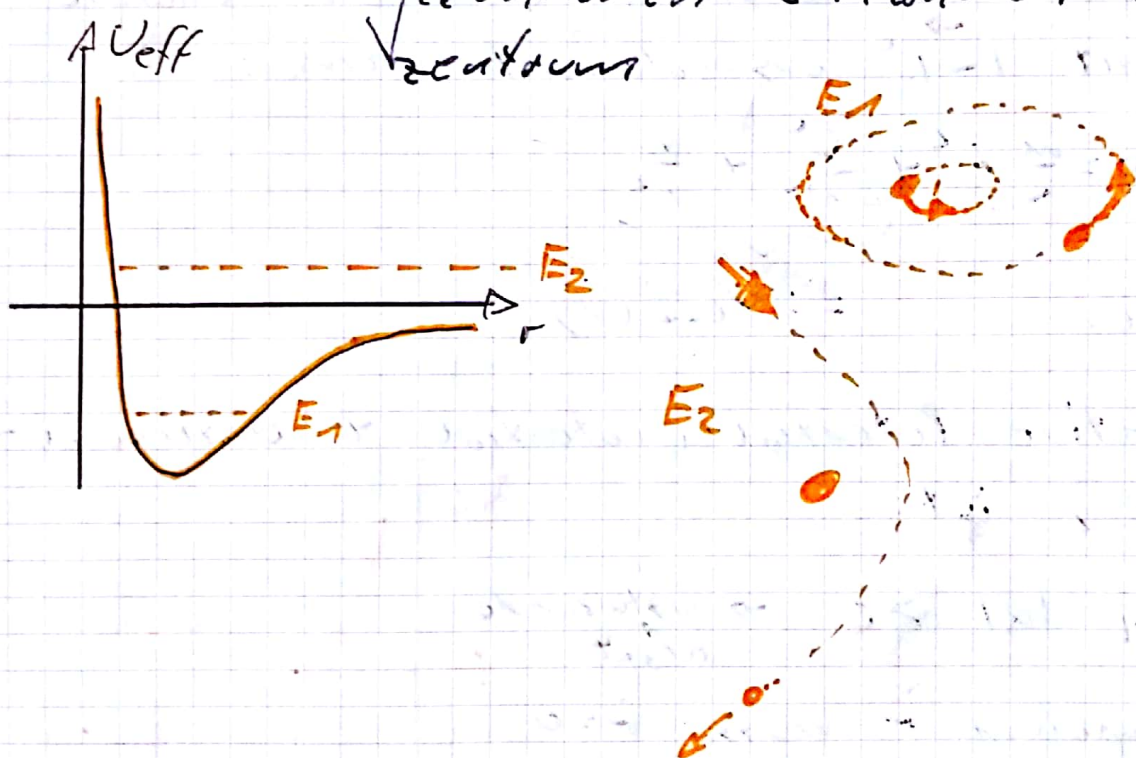


Zusätzliche Überlegungen zum Zwei-Körperproblem:

Bisher: $V(\vec{r}) \sim \frac{1}{r} \Rightarrow |\vec{F}_{\text{Grav}}| \sim \frac{1}{r^2}$

→ Lösung: Geschlossene Bahnen, die ellipsen- oder kreisförmig sind & Hyperbel-, Parabelbahnen bei ungebundenen Zuständen um Massezentrum



Annahme: $V(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2}$

zum Beispiel Allg.: $V(\vec{r}) = V(r) = \frac{\alpha}{r^2}$

→ Wie sieht $r(\varphi)$, $r(t)$ aus?

→ Die Kraft hat die Form:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\frac{2\alpha}{r^3} \vec{r} = -\frac{2\alpha}{r^3} \hat{e}_r$$

Die Kraft ist konservativ und eine Zentralkraft

$$\Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Die Bewegung erfolgt in einer Ebene, wir wählen die xy -Ebene ($\varphi = \pi/2$)

In Polarkoordinaten folgt für den Drehimpuls:

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

Es gilt auch: $E = \text{const.}$. Die Gesamtenergie kann mit $|\vec{L}|^2$ ausgedrückt werden:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}} + \frac{\alpha}{r^2}$$

Definiere: $=: V_{\text{eff}}(r)$

Das effektive Potential (Potential + Zentrifugalbarriere) ist:

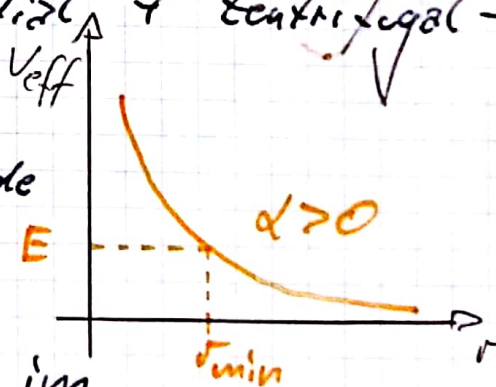
1. Fall: $|\alpha| > 0 \rightarrow$ abstoßende Kraft

Bei minimalem r muss $\dot{r} = 0$ gelten, damit die gesamte im System gegebene Energie im Potential ist.

$$\Rightarrow r(t=0) = r_{\min}, \quad \dot{r}(t=0) = 0$$

Bei gegebener Gesamtenergie folgt:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{L^2 + 2m\alpha}{2mE}}$$



Da wir von $L > 0$ ausgehen existiert nur für $E > 0$ eine Bahnkurve.

Um $r(t)$ zu berechnen betrachten wir:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2 + 2m\alpha}{2mr^2} \quad | \quad \frac{L^2 + 2m\alpha}{2m} = E r_{\min}^2$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + E \frac{r_{\min}^2}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{r^2 - r_{\min}^2}$$

→ Trennung der Variablen:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_{\min}^2}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{d}{dr} \sqrt{r^2 - r_{\min}^2} dr$$

Mit $r_{\min} = r(t=0)$ ist die Integration simpel und liefert:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{r^2 - r_{\min}^2}$$

$$\Leftrightarrow r(t) = \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2E}{m} t^2}$$

Um die Bahn $r(\varphi)$ zu bestimmen, beginnen wir beim Drehimpuls:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} \stackrel{*}{=} \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}}$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{1 - (r_{\min}/r)^2}}$$

* = hier meint der Mathematiker


Durch geschickte Koordinatenwahl gewähren wir,
dass $\varphi(r_{\min}) = 0$

$$\Rightarrow \varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{L}{\sqrt{2mE}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{1 - (r_{\min}/r')^2}} \quad (\hat{=} \int d\varphi)$$

Subst.: $\gamma = \frac{r_{\min}}{r'} \Rightarrow d\gamma = -\frac{r_{\min}}{r'^2} dr'$

$$\rightarrow \varphi = \int_1^{\gamma_{\min}/r} \frac{-L}{r_{\min} \sqrt{2mE}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

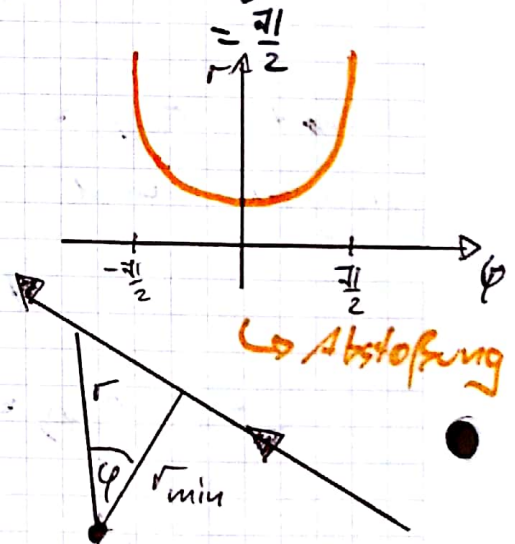
$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{-L}{r_{\min} \sqrt{2mE}} \left[\arcsin\left(\frac{r_{\min}}{r}\right) - \arcsin(1) \right]$$

Wieder Umkehren liefert:

$$\frac{r_{\min}}{r} = \cos\left(\frac{r_{\min} \sqrt{2mE}}{L} \cdot \varphi\right)$$

Mit bekanntem $r_{\min}$:

$$r(\varphi) = \frac{r_{\min}}{\cos\left(\sqrt{\frac{L^2 2m}{L^2}} \varphi\right)}$$

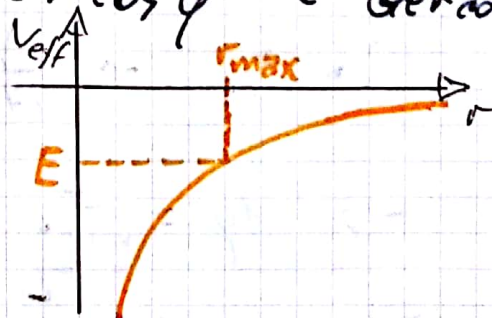


Spezialfall: $d = 0 \Rightarrow r_{\min} = r \cos \varphi \hat{=} \text{Gerade}$

2. Fall: $|d| < 0$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2 - 2m|d|}{2mr^2}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(\frac{L^2}{2m} - |d| \right)$$



$\rightarrow$ anziehende Kräfte

Die gebundene Bewegung wie in der Abbildung erfordert: $\sqrt{|x|} > \frac{L^2}{2m}$, $E < 0$

Analog zum bisherigen Vorgehen ergibt sich:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{2m|E| - L^2}{2m|E|}}$$

Wir drücken nun wieder die Gesamtenergie mit $r_{\max}$ aus:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + E \frac{r_{\max}^2}{r^2}$$

Mit Separation der Variablen folgt wie zuvor:

$$r(t) = \sqrt{r_{\max}^2 - \frac{2|E|}{m} t^2}$$

D.h. nach der Zeit t_0 landet das Teilchen im Zentrum.

$$r(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = r_{\max} \cdot \sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

Die Berechnung von $r(\varphi)$ verläuft analog zum vorherigen Vorgehen und differenziert ist im Folgenden nur grob skizziert:

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r_{\max}}{r}\right)^2 - 1}}$$

Mit $\varphi(r_{\max}) = 0$ und der Substitution $y = \frac{r_{\max}}{r}$

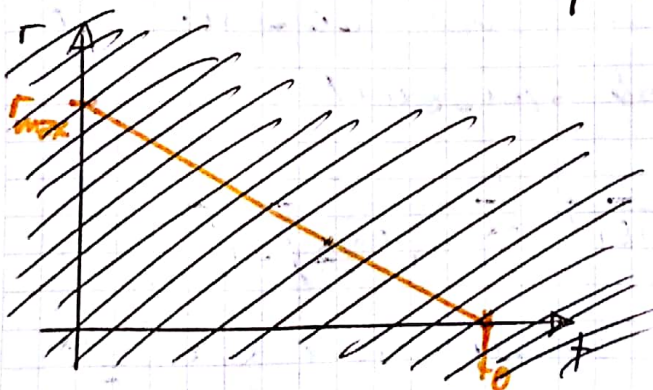
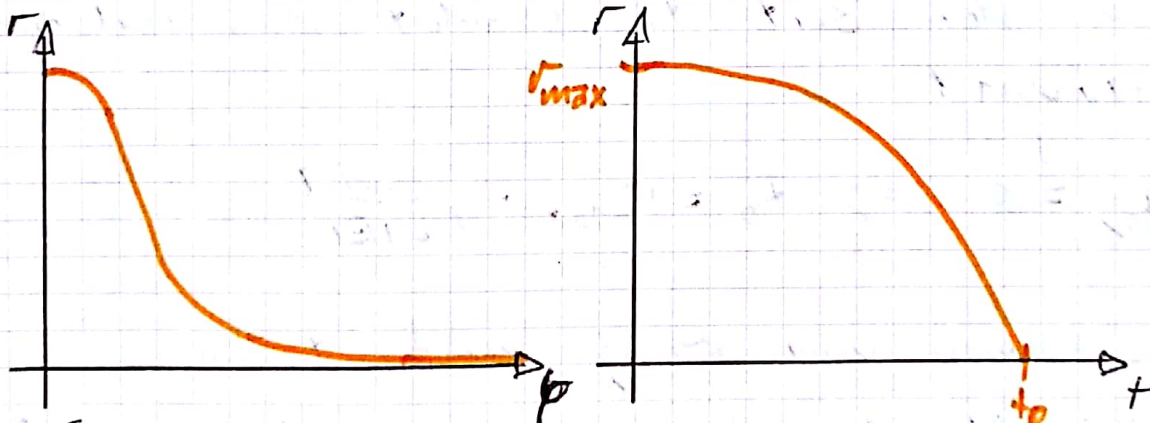
folgt: $dy = -\frac{r_{\max}}{r^2} dr$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{L}{r_{\max} \sqrt{2m|E|}} \int_{r_{\max}/r}^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{-L}{r_{\max} \sqrt{2m|E|}} \operatorname{arccosh} \left(\frac{r_{\max}}{r} \right)$$

Mit $r_{\max} = \sqrt{\frac{2m|L|^2 - L^2}{2m|E|}}$ folgt final:

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{2m|L|^2 - L^2}{2m|E|}} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{2m|L|^2 - L^2}{L^2}} \varphi\right)}$$

$r(\varphi)$ beschreibt eine Spirale. Nach endlicher Zeit t_0 und unendlich vielen Umläufen ($\varphi \rightarrow \infty$) landet das Teilchen im Zentrum.



Bahn:



So ungefähr ;)

→ In allen vorangegangenen Betrachtungen wurde nur die Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ betrachtet. Die Bewegung vom  studybloxx Schwerpunkt ist trivial.