δ-Distribution

Die δ-Distribution ($\hat{=}$ Verteilung) ist ein bei Physikern beliebtes Werkzeug im Rahmen der Integral- und Differentialrechnung.

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{\Omega} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)$$

Faltung im Distributionenraum

man erkennt: $0 \in \Omega$

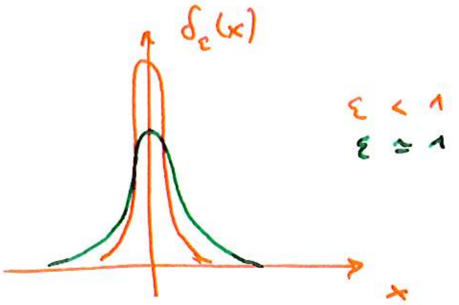
$$\int_{\Omega} \delta(x)\, dx = 1$$

⚠ Die δ-Dist. ist <u>keine</u> Funktion!

Anschaulich kann man die δ-Dist. als unendlich ~~ho~~ hohe und unendlich schmale Spike verstehen, die den Flächeninhalt 1 innehat.
Man hilft sich oft mit Funktionen, die gegen die δ-Dist. konvergieren, bspw.:

Es gibt noch viele andere Methoden $\delta(x)$ zu nähern, diese finde ich persönlich elegant.

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\, dx = \frac{1}{\pi \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 1}\, dx$$

... subs ... $x := \varepsilon \cdot y$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2+1}\, dy = \frac{1}{\pi} \left[\arctan(y)\right]_{-\infty}^{\infty} = \underline{\underline{1}}$$

$$\delta_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \delta(x)$$

Eine einfache Verschiebung des Arguments ergibt:

$$\int_{\Omega} \delta(x-y)\, f(x)\, dx = f(y)$$

⚠ $y \overset{!}{\in} \Omega$
sonst ist das Ergebnis 0!

Die δ-Dist. kombiniert mit einem Integral lässt also den ganzen Ausdruck zu einem Funktionswert der Testfunktion werden.

Die δ-Distribution darf nie außerhalb eines Integrals stehen. Falls das doch der Fall sein sollte, ist damit eine Funktion zu verstehen, die gegen die δ-Dist. konvergiert, z.B. $\delta_\varepsilon(x)$.

Es kann vorkommen, dass die δ-Dist. als Argument eine Fkt. von x enthält, dann gilt:

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \qquad \begin{matrix} n < \infty \\ f'(x_i) \neq 0 \end{matrix}$$

<u>Bsp.:</u>

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{x^2}\, dx = e^0 = 1$
- $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \delta(x+5)\, f(x)\, dx = 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - \tfrac{\pi}{2}) \sin(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta(x-\frac{\pi}{2})}{2} + \frac{\delta(x+\frac{\pi}{2})}{2} \right) \sin(x)\, dx$
  $\displaystyle = \frac{1}{2}\sin(-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}) = 0$