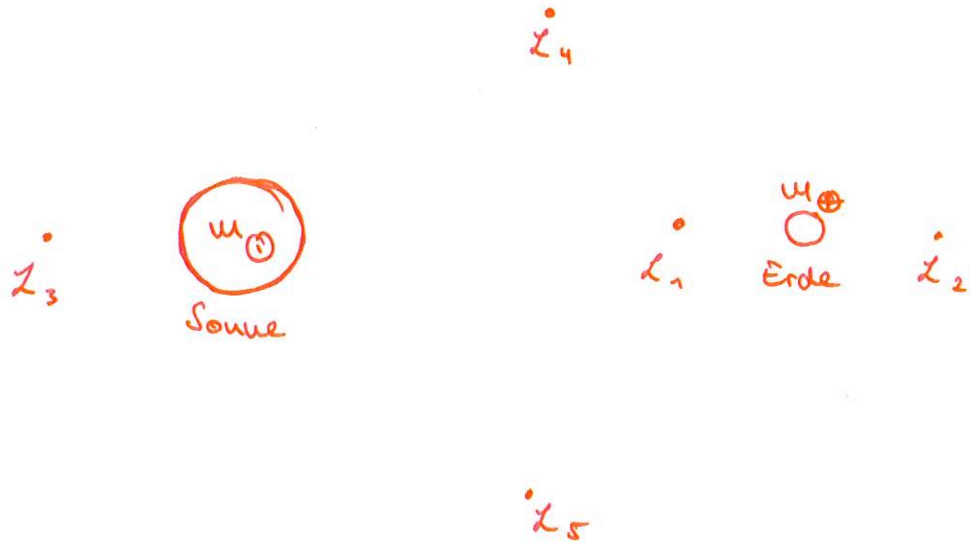
Lagrangepunkte

Das Dreikörperproblem der klassischen Mechanik ist nicht analytisch lösbar, Spezialfälle lassen sich jedoch mit gewissen Vereinfachungen gut behandeln. Nimmt man beispielsweise drei Körper im Raum mit $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ (Bspw. Sonne, Erde, Staub oder Erde, Mond, Satelit), dann lassen sich auftretende Gleichung nach vereinfachen und behandeln. Man findet stationäre, metastabile Lösungen für den leichtesten Körper, wenn dieser relativ zu den beiden anderen ruht - die Lagrangepunkte.



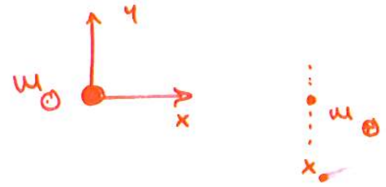
Die Lagrangepunkte lassen sich mit Mitteln der klassischen Mechanik berechnen.

Für das gravitative Potential eines Körpers (als Punkt genähert) gilt [wir setzen hier $G = 1$]

$$\phi_{grav} = -\frac{m}{r} \qquad \text{mit } r \ldots \text{ Abstand zum Testkörper}$$

Unser System: (Sonne im Ursprung)

$$\phi_{grav} = -\frac{m_\odot}{r} - \frac{m_\oplus}{|\vec{r} - \vec{x}_0|}$$



⚠ Wir nehmen an, dass der Abstand zwischen Erde und Sonne sich nicht ändert!

Das System, in dem wir uns bewegen wollen, sodass die Positionen von Erde und Sonne relativ zum Testkörper unverändert bleiben, ist ein rotiertes Bezugssystem. Hier erfahren wir eine Scheinkraft:

$$f_{zent.} = \mu \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$

$\ldots \mu$ Masse des Testkörpers
$\ldots \omega$ Frequenz
$\ldots \vec{r}$ $r \cdot \hat{e}_r$

Im mitbewegten Bezugssystem ändert sich also das Potential um

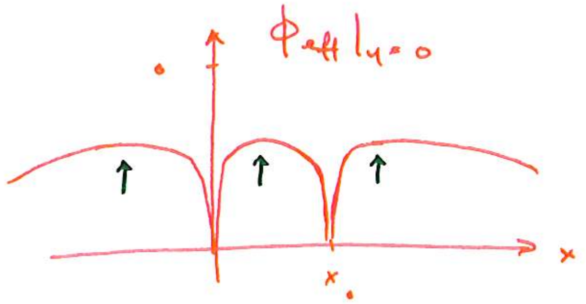
$$\hat{\phi} \quad \text{mit} \quad f_{zent.} = -\vec{\nabla}\hat{\phi}$$

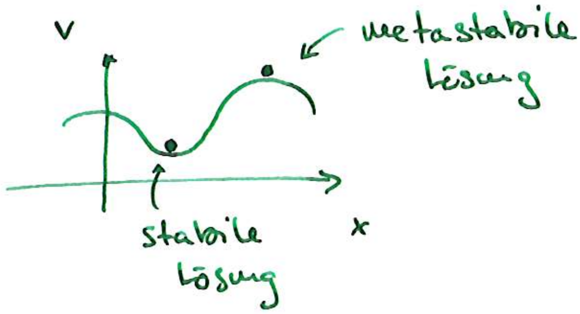
$$\Rightarrow \phi_{eff} = -\frac{m_\odot}{r} - \frac{m_\oplus}{|\vec{r} - \vec{x}_0|} - \frac{\kappa}{2} r^2 \qquad \text{mit } \kappa = \mu\omega^2$$
und $\kappa \ll m_\oplus$

$\ldots$
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Phi_{eff} = -\frac{m_\odot}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{m_\oplus}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} - \frac{\kappa}{2}(x^2+y^2)$$

Die Lagrangepunkte liegen jetzt an den Hochpunkten dieses effektiven Potentials und sind daher metastabil.





$$-\partial_x \Phi_{eff} = \kappa x - \frac{m_\odot}{\sqrt{x^2+y^2}^3}x - \frac{m_\oplus}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}^3}(x-x_0)$$

$$-\partial_y \Phi_{eff} = \kappa y - \frac{m_\odot}{\sqrt{x^2+y^2}^3}y - \frac{m_\oplus}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}^3}y$$

Wir vernachlässigen z und $-\partial_z \Phi_{eff}$, da wir uns ohnehin in der Rotationsebene befinden.

Die beiden Ausdrücke müssen nun, um einen Punkt im metastabilen Kräftegleichgewicht zu erhalten, nullgesetzt werden. Es ex. insgesamt 5 Nullstellen.

- $L_{1,2,3}$:

Die ersten drei Lösungen liegen auf der x-Achse, daher können wir $y=0$ setzen.

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} -\partial_x \phi_{eff}\Big|_{y=0} = \kappa x - \frac{m_\odot}{x^2} - \frac{m_\oplus}{(x-x_0)^2}$$

Es ergibt sich ein Polynom mit den Nullstellen (genähert!)

$$L_{\frac{1}{2}} \approx x_0\left(1 \pm \sqrt[3]{\frac{m_\oplus}{3m_\odot}}\right) \qquad L_3 \simeq -x_0\left(1+\frac{7m_\oplus}{12m_\odot}\right)$$

- $L_{4,5}$:

Für die anderen Lösungen minimieren wir $\phi_{eff}\Big|_{y\neq 0}$.

$$0 \overset{!}{=} -\partial_y \phi_{eff}\Big|_{y\neq 0} = \kappa y - \frac{m_\odot}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\, y - \frac{m_\oplus}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}^3}\, y$$

$$= y \cdot \left(\kappa - \frac{m_\odot}{r^3} - \frac{m_\oplus}{|\vec{r}-\vec{x}_0|^3}\right)$$

geometrische Überlegung:

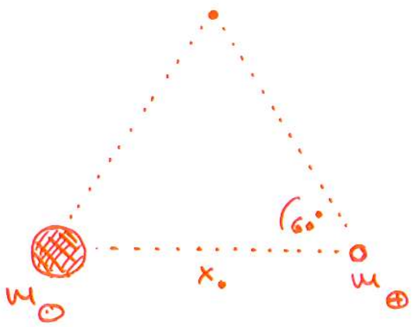
An dem Punkt, an dem das Verhältnis der Anziehungskräfte dem Verhältnis der Massen entspricht, wird der Testkörper zum Schwerpunkt des Systems hin beschleunigt.

$\Rightarrow$ Abstand zu beiden Körpern gleich

$$\ldots \quad 0 = \kappa \frac{|\vec{r} - \vec{x}_0|^3}{m_\odot} - \frac{|\vec{r} - \vec{x}_0|^3}{|\vec{r}|^3} - \frac{m_\oplus}{m_\odot}$$

Wenn weiter der Abstand zwischen allen Körpern gleich ist, rotieren diese um einen gemeinsamen Schwerpunkt.

$$\Rightarrow |\vec{r}| = |\vec{r} - \vec{x}_0| = x_0$$



Gleichseitiges Dreieck!

Körper an diesen Punkten nennt man Trojaner!

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{4,5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_0 \\ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} x_0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}_{1,2} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt[3]{\frac{m_\oplus}{3 m_\odot}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}_3 = -x_0 \begin{pmatrix} 1 + \frac{7 m_\oplus}{12 m_\odot} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lagrangepunkte zwischen Erde und Mond sind wichtig für die Raumfahrt oder das Platzieren von Sonden / Satelliten. $\mathcal{L}_3$ in diesem System war schon Stoff wahnwitziger Verschwörungstheorien!