

Tipps und Tricks mit Matrizen

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen und beschreibt damit einen linear zweiten Stufe. Die Anzahl von Zeilen und Spalten klassifiziert eine Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} n \text{ Zeilen} \\ m \text{ Spalten} \end{array}$$

Es sollen hier nur reelle Zahlen betrachtet werden!

$n \times n$ - Matrix
(Sprich "n Kreuz n")

u. a. transformieren ~~Matrix~~ Matrizen Vektoren. (Vektoren werden durch Matrizen auf n.u. andere Vektoren abgebildet).

Eine $n \times m$ - Matrix macht aus einem Vektor mit m Komponenten einen Vektor mit n Komponenten.

Bsp.: $m = 3$, $n = 2$

| Rechenrick auf der folgenden Seite!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}$$

[~~f~~ mit $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ bildet ab:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v}$$

I. d. R. beschäftigen wir uns im dreidim. eukl. Raum mit 3×3 - Matrizen, diese beschreiben Streckungen, Stauchungen, Drehungen oder Kombinationen davon.

Matrizen können untereinander addiert

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

oder multipliziert werden. für Zweites gilt eine etwas komplizierte Rechenvorschrift.

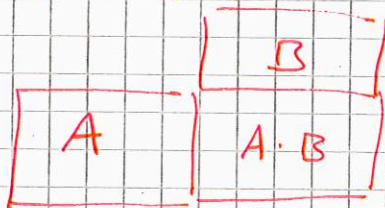
Die Zeilen der "linken" Matrix werden wie beim Skalarprodukt mit den Spalten der "rechten" Matrix multipliziert. So entsteht an der Stelle n -ter Zeile und m -ter Spalte das Skalarprodukt aus n -tem Zeilen- und m -ten Spaltenvektor.

Trick:

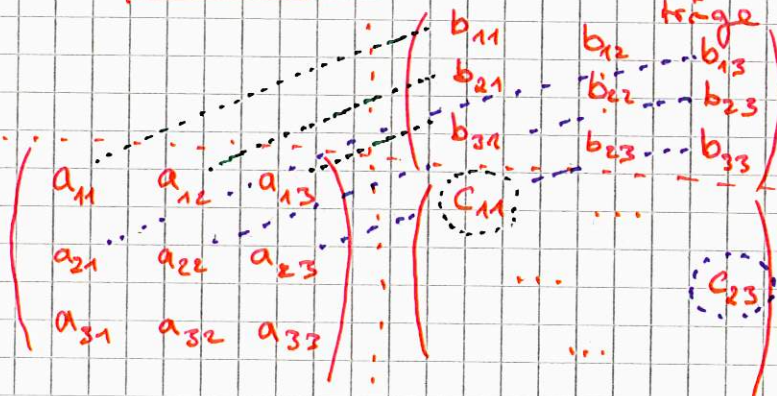
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \dots & \dots \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & \dots & \dots \\ b_{31} & \dots & b_{33} \end{pmatrix}$$

Sollen multipliziert werden. Man stelle sich für ~~das~~ das Produkt $A \cdot B$ B nicht erhöht vor:

i. A. gilt für Matrizen
 $A \cdot B \neq B \cdot A$!



So ist es leichter, die richtigen Einträge abzulesen!



$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$c_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33}$$

Achten Sie auf das Schema der Indizes!

Man sieht deutlich die Vorteile der Kurzschreibweise.

2 freie Indizes auf jeder Seite!

Kurz:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \cdot b_{kj} \equiv a_{ik} b_{kj}$$

↑
Komponente der i-ten Zeile und j-ten Spalte der neuen Matrix

freier Index
↔
kein Summationsindex

[Wenn mehrere Matrizen multipliziert werden, tauschen mehrere Summationsindizes paarweise auf:]

$$(A \cdot B \cdot C \cdot \dots \cdot Z)_{ij} = \sum_{k_1, k_2, k_3, \dots = 1}^3 a_{ik_1} b_{k_1 k_2} c_{k_2 k_3} \dots z_{k_n j}$$

Bei Multiplikation mit einem Vektor:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$b_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} v_k \equiv a_{ik} v_k$$

↑
* Ein freier Index auf jeder Seite!



Offensichtlich erkennt man in einer Summe an der Anzahl der Indizes die Gestalt eines Objektes!

- keine Indizes $\Rightarrow$ Zahl (Skalar) (z.B. 5)
- ein Index $\Rightarrow$ Vektor (z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$)
- 2 Indizes $\Rightarrow$ Matrix (z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$)
- 3 Indizes oder mehr $\Rightarrow$ Darstellung eines Tensors höheren Ranges

Bei quadratischen Matrizen (besonders wichtig in der Physik) gelten einige Besonderheiten. Beispielsweise lässt sich eine inverse Matrix und eine Determinante berechnen.

- inverse Matrix zu A : A^{-1} (nicht $\frac{1}{A}$)

mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

- Determinante zu A : $\det(A)$

Besonders wichtiges Werkzeug! Gibt an, um welchen Faktor ein Volumenelement geändert wird, wenn dieses von drei Vektoren aufgespannt wird, die mit A multipliziert werden.



$$V' = |\det(A)| \cdot V$$

Berechnung der Determinante einer 3×3 -Matrix:
Regel von Sarrus (Sprich: „Sarrus“)

← Wikipedia

Für die Berechnung und Eigenschaften der Inversen und der Determinante sei zunächst auf die Mathematikvorlesung verwiesen.

ein paar wichtige Eigenschaften (von vielen!):

- $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}$

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$

- $A \cdot \vec{v} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

- ...

Wohinmal:
im Allgemeinen gilt für
Matrizen

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

Eine sehr wichtige Subklasse der quadratischen Matrizen sind die Drehmatrizen.

Offensichtlich ändern Drehungen ein Vektorelement nicht, daher gilt:

$$\det(\Omega) = 1 \quad \Omega \dots \text{Drehmatrix}$$

Im zweidimensionalen Fall existiert ein Drehwinkel, die Drehmatrix hat also einen freien Parameter (hier ω):

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\text{hier: } \det(\Omega) = \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) = \underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \Omega \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) \cdot x - \sin(\omega) \cdot y \\ \sin(\omega) \cdot x + \cos(\omega) \cdot y \end{pmatrix}$$



Es lässt sich zeigen, dass

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha \cdot \Omega_\beta &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \dots = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Omega_{\alpha+\beta}}} \end{aligned}$$

Dieser Schritt ist eine gute Übung für zu Hause!

Weiterführendes für Interessierte:

Eine Verallgemeinerung der letzten Zeilen findet Anwendung beim „Satz vom Fußball“.

Mehrere hintereinander ausgeführte Drehungen können durch eine Drehung beschrieben werden.

Dieser Sachverhalt kann sehr leicht auf 3 Dimensionen verallgemeinert werden. Hier sind allerdings 3 unabhängige Drehwinkel möglich (siehe Vorlesung!).