

Matrizen, die Zweite

⚠ Wir betrachten quadratische Matrizen. Mit einigen Ausnahmen (Existenz einer Determinante, Invertierbarkeit, ...) können Rechenregeln und Beispiele auf $n \times n$ -Matrizen verallgemeinert werden.

Quadratische Matrizen machen aus einem n -komponentigen Vektor einen anderen n -komponentigen Vektor.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \quad \dots \text{lineare Abbildung}$$

Die Inverse zu (A^{-1} ~~ist~~, NICHT $\frac{1}{A}$) transformiert wieder zurück:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{\mathbb{1}} \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\underline{\underline{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}}}$$

(von links multiplizieren!)

$\mathbb{1}$... Einheitsmatrix

$$\dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Wichtig: Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar!

$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0$

Man bildet die Inverse mit folgendem Rechenick:

$$\left(A \mid \mathbb{1} \right) \xrightarrow{\text{Gauß-Verfahren}} \left(\mathbb{1} \mid A^{-1} \right)$$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{-2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{+3}} \textcircled{-1}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{-2}}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{-2}} \textcircled{\frac{1}{2}}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -\frac{3}{2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Test:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⚠ Man verrechnet sich bei dieser Art Umformungen sehr leicht.
Seien Sie also vorsichtig!

Aus der Relation $\det(A) \det(B) = \det(A \cdot B)$

folgt :

$$\begin{aligned}\det(I) &= \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) \\ &= 1 = \det(A) \det(A^{-1}) \\ \Rightarrow \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)}\end{aligned}$$

für vorgegangenes Beispiel :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \cdot 2 \\ &\quad - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot 2 = \underline{\underline{-2}}\end{aligned}$$

$$\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= (-1) \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 \dots + 0 \dots \\ &\quad - (+2) - 0 \dots - 0 \dots = +\frac{3}{2} - 2 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

⚠ Die Regel von Sarrus lässt sich nicht auf 4×4 -Matrizen (und höher) verallgemeinern!

$\Rightarrow$ Laplacescher Entwicklungssatz

Determinante einer
 3×3 Matrix bestimmen
wir mit der
Regel von Sarrus.

Für 2×2 -Matrizen gilt offensichtlich:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ist ein Unterraum für die Transformation einer 3×3 -Matrix invariant, lässt sich dies ausdrücken:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & -b \\ 0 & -c & a \end{pmatrix}$$

Hierzu muss eine ganze Zeilen-Spalten-Kombination der Einheitsmatrix entsprechen!

Man kann erhalten:

Matrizen mit Determinante 1 (-1) ändern die Länge eines zu transformierenden Vektors nicht.

Drehmatrizen (in 3 Dimensionen) formen eine spezielle Subklasse von Matrizen:

SO(3) - Gruppe

"spezielle orthogonale Gruppe in 3 Dimensionen"

Speziell

$$\Rightarrow \det(A) = 1$$

(nicht -1)

orthogonal

$$A^T = A^{-1}$$

Zeilen- und Spaltenvektoren stehen senkrecht aufeinander.

3 dim.

verknüpft man

Elemente einer Gruppe, erhält man wieder ein Gruppenelement

$\Rightarrow$ Produkte von Drehmatrizen sind wieder Drehmatrizen

Im folgenden gilt: $S_\alpha \equiv \sin(\alpha)$, $C_\alpha \equiv \cos(\alpha)$

Alle Elemente der $SO(3)$ lassen sich aus einzelnen Drehungen um die Hauptkoordinatenachsen konstruieren.

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & S_\alpha \\ 0 & -S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix} \quad \Omega_y = \begin{pmatrix} C_\alpha & 0 & S_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\alpha & 0 & C_\alpha \end{pmatrix} \quad \Omega_z = \begin{pmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 \\ -S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bsp.: Drehung von 30° um die z-Achse

$$\Omega_z(30^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{da } \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

⚠ offensichtlich:

$$\text{da } \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\text{und } \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\Omega_z(30^\circ)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Omega^T = \Omega^{-1}}}$$

$$\text{und da } C_\alpha^2 + S_\alpha^2 = 1$$

$$\underline{\underline{\det(\Omega) = 1}}$$

Drehung hin und zurück:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - (-\frac{1}{4}) & \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erste Drehung steht immer ganz rechts! Reihenfolge wichtig, da Matr. nicht kommutieren!

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren im Raum ist invariant unter Drehungen (offensichtlich wird relative Lage und Länge nicht geändert), dies lässt sich leicht zeigen:

$$\vec{x}^T \cdot \vec{y} \xrightarrow[\text{drehen}]{\text{beide Vekt.}}$$

$$(\Omega \vec{x})^T \cdot (\Omega \vec{y})$$

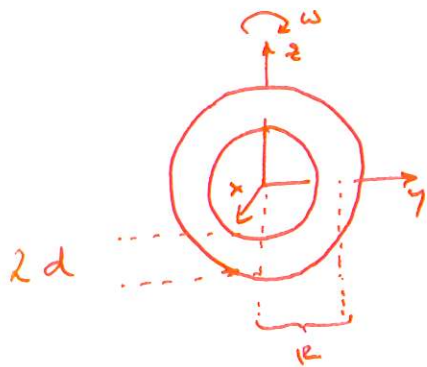
$$= \vec{x}^T \cdot \Omega^T \cdot \Omega \vec{y} = \vec{x}^T (\underbrace{\Omega^T \Omega}) \vec{y}$$

$$= \underline{\underline{\vec{x}^T \cdot \vec{y}}}$$

Beim Transponieren eines Produkts von Vektoren / Matrizen ändert sich die Reihenfolge

Beispielaufgabe:

Ein Torus rotiert um die z -Achse



mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{1}{2} \text{ s}^{-1}$

und besitzt die Maße

$$R = 5 \text{ cm}, \quad d = 1 \text{ cm}$$

Wo und wann steht der Vektor $\vec{r}$, der bei $t = 0$ in y -Richtung auf die Innen-seite des Torus zeigt, bei dem Zeitpunkt, an dem man in x -Richtung nicht mehr durch den Torus schauen kann?

$$\rightarrow \Omega_z(\omega t) = \begin{pmatrix} c_{\omega t} & s_{\omega t} & 0 \\ -s_{\omega t} & c_{\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \Omega_z(\omega t) \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} c_{\omega t} & s_{\omega t} & 0 \\ -s_{\omega t} & c_{\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

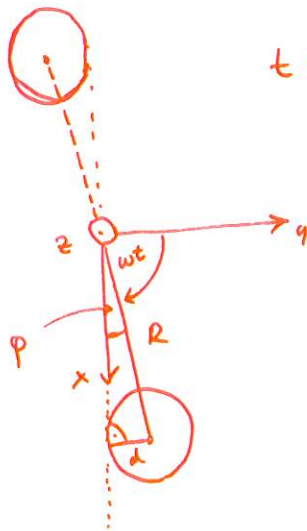
$$= 4 \cdot \begin{pmatrix} s_{\omega t} \\ c_{\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~Draufsicht:~~



~~Wdh. & dr. stat. & ...~~

Draufsicht :



$$t = t_0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{d}{R}\right)$$

$$\omega t_0 = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{d}{R}\right)$$

$$(\approx 1.4)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{d}{R}\right) \right) \approx \underline{\underline{2.8 \text{ s}}}$$

(volle Drehung um 360° nach ca. 12.6 s)