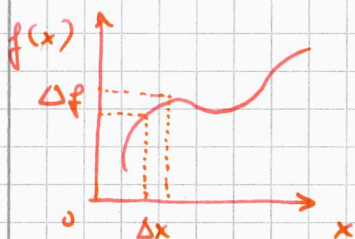


Integral- und Differentialrechnung

Um dynamische Systeme mathematisch zu behandeln sind oft Integral- und Differentialrechnung notwendig. Die Differentialrechnung beschreibt die Änderung von Funktionen bezüglich gewisser Größen / Variablen.

Funktionswert an der Stelle x_0 ... $f(x_0)$
Änderung von f an der Stelle x_0 ... $f'(x_0)$

f' wird über den Quotienten eines infinitesimalen Intervalls von Funktion und Argument gebildet.



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'$$

Man schreibt hier $f' = \frac{df}{dx} \hat{=} \frac{d}{dx} f$

Die mit "d" vorangestellten Größen sind Differentiale. Mit Differentialen lässt sich wie mit regulären Variablen rechnen, obwohl sie infinitesimal sind.

Bsp.:

$$\frac{d}{dx} (5x^2 + 2) = 10x$$

$$\frac{d}{dx} (b \cdot e^{ax}) = a \cdot b \cdot e^{ax}$$

$$\frac{d}{db} (b \cdot e^{ax}) = e^{ax}$$

$$\frac{d}{d\theta} (\sin(2\theta)) = 2 \cos(2\theta)$$

Oft hängen Funktionen von mehreren Variablen ab. Ist man nur an der Variation nach einer Größe ohne implizite Abhängigkeiten interessiert, benutzt man die partielle Ableitung.

$$\frac{\partial}{\partial x} f$$

Hierbei wird nur nach der explizit auftauchenden Größe abgeleitet.

Bsp.:

$$\frac{\partial}{\partial x} (4x^2 + 2y) = 8x$$

$$\frac{\partial}{\partial f(x)} (2f(x)^2 + x) = 4f(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (2f(x)^2 + x) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial a} (a^2bc + ab^2c) = 2abc + b^2c$$

Eine Funktion, die von Größen abhängt, die implizit von Größen (wie z.B. Zeit) abhängen, muss schrittweise abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(g(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dt} \quad (\text{kettenregel!}) \end{aligned}$$

Oft ist man daran interessiert, wie sich Felder oder Potentiale (z.B. Kraftfelder) im Raum verhalten. Die Änderung solcher in jede Ortsrichtung wird durch den „Nabla-Operator“ berechnet.

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \hat{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \hat{e}_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \hat{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

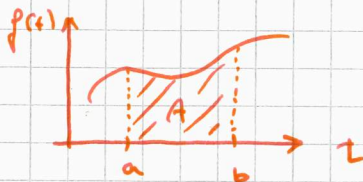
Bsp.: gravitatives Potential $U = m \cdot g \cdot z$

$$\vec{F} = - \vec{\nabla} \cdot U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

⇒ Gravitationskraft zeigt in negative z-Richtung (nach unten)

Die Integration entspricht im Wesentlichen der Umkehroperation der Differentiation (Ableitung). Bildlich wird dies mit dem Flächeninhalt zwischen Graph einer Funktion und der x-Achse interpretiert.

$$A = \int_a^b f(t) dt$$



Ein unbestimmtes Integral (ohne feste Grenzen) liefert die Stammfunktion einer Funktion - diese ist bis auf eine von der Integrationsvariable unabhängige Konstante eindeutig.

Bsp.:

$$\int (7x + 4x^3) dx = \frac{7}{2} x^2 + x^4$$

$$\int \cos(a) \sin(b) db = -\cos(a) \cos(b)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

Das Finden von Stammfunktionen ist in der theoretischen Physik an vielen Stellen von großer Wichtigkeit. Zwei der wichtigsten Methoden sind Substitution und partielle Integration. Die beiden Methoden lassen sich aus der Ketten- bzw. Produktregel der Differentiation herleiten.

Substitution:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(y) dy = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x)) \left(\frac{dy}{dx} \right) dx$$

partielle Integration:

$$\int_{x_1}^{x_2} f \left(\frac{dg}{dx} \right) dx = f \cdot g \Big|_{x_1}^{x_2} - \int \left(\frac{df}{dx} \right) g dx$$

Bsp.: Substitution

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \dots \left| \begin{array}{l} x^2 =: t \\ \frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dt = 2x dx \end{array} \right|$$
$$= \int \frac{1}{2} e^t \underbrace{(2x dx)}_{dt} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t$$

... resubstituieren ... = $\frac{1}{2} e^{x^2}$

partielle Integration

$$\int \ln(x) dx = \int \underbrace{1}_{\left(\frac{dg}{dx}\right)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_f dx$$
$$= \underbrace{x}_g \cdot \underbrace{\ln(x)}_f - \int \underbrace{x}_g \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\left(\frac{df}{dx}\right)} dx = x \cdot \ln(x) - \int 1 \cdot dx$$
$$= x \cdot \ln(x) - \underline{x}$$

Neben diesen "Standardtricks" gibt es noch unzählige weitere Verfahren, um Stammfunktionen zu finden, bspw. das Einführen einer weiteren Variable:

$$\int x e^x dx = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \int \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} dx$$
$$= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int e^{\lambda x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \right)$$
$$= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda x} + e^{\lambda x} x \cdot \frac{1}{\lambda} \right) = \underline{\underline{e^x (x-1)}}$$

⚠ nicht immer erlaubt!

Für den weiteren Verlauf des Studiums empfiehlt es sich ein paar Stammfunktionen zu kennen!

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$$

$$\int \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) / \arccos(x)$$

$$\int \lambda^x dx = \frac{\lambda^x}{\ln(\lambda)}$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x)$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x)$$

... und viele mehr!