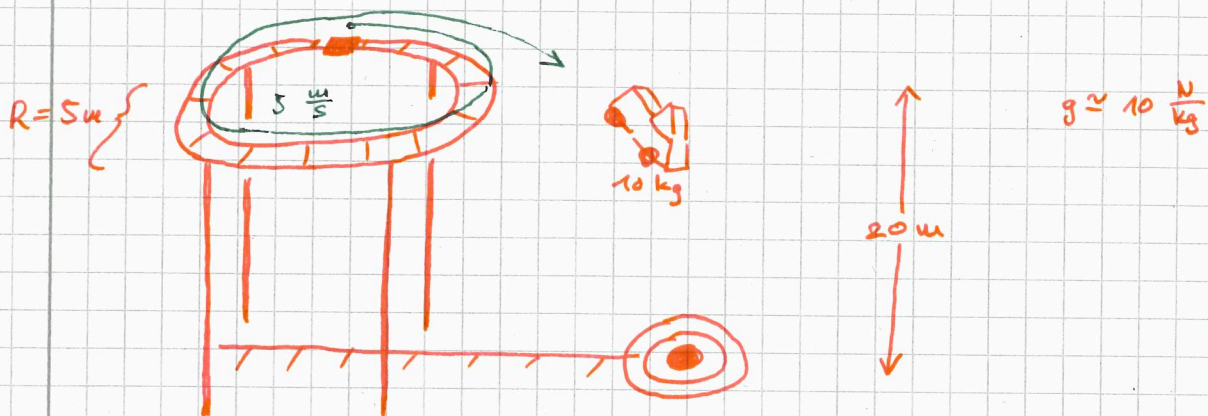


## Kinematik in 3 Dimensionen

Da sich reale Prozesse im dreidimensionalen Raum abspielen, wollen wir anhand eines ausführlichen Beispiels den Umgang mit Bahnkurven und der Berechnung zugehöriger Größen üben:

Ein 10 kg schwerer Wagen fährt auf einer "Achterbahn" in 20m Höhe einmal bei konstanter Geschw. auf einem ebenen Kreis und stürzt dann in die Tiefe.  $v_{\text{start}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , Kreisradius ...  $R = 5\text{m}$ .



Wir möchten den Weg des Wagens im Raum in Abhängigkeit von der Zeit parametrisieren, die insgesamt zurückgelegte Strecke errechnen und die Zeit bis zum Aufprall ausrechnen.

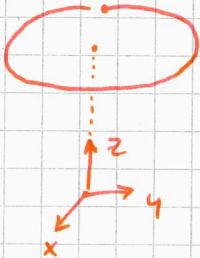
Bahnkurve des Wagens ...  $\vec{r}(t)$

zurückgelegte Strecke  $s(t)$  bzw  $s$

Zeit des Aufpralls  $T$

Der erste Schritt bei Berechnungen dieser Art, ist die Wahl des Koordinatensystems.

Ein geschickt gewählter Koordinatenursprung kann eine Rechnung erheblich erleichtern. Wir wählen als Ursprung den Punkt am Boden unter dem Mittelpunkt der Kreisbahn.



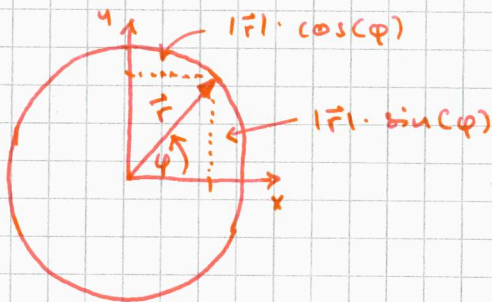
Des Weiteren soll die pos. z-Richtung nach oben zeigen und der Wagen in pos. y-Richtung losfahren.

Die Startzeit legen wir auf  $t_0 = 0$ . Damit wird

$$\vec{r}(t=0) =: \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \quad (\text{in Metern})$$

Zunächst kümmern wir uns nur um die Parametrisierung der Kreisbahn; mit dem Sturz beschäftigen wir uns später.

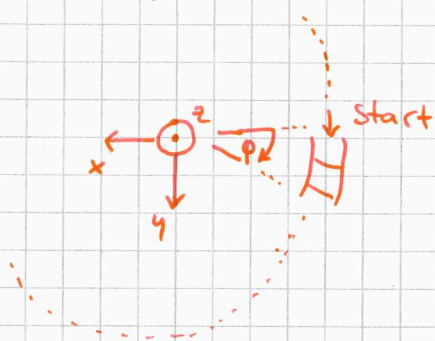
Eine Kreisbahn wird im Allgemeinen durch Sinus und Kosinus beschrieben. Im zweidimensionalen Fall sieht das so aus:



$$\begin{aligned} x &= |\vec{r}| \cdot \cos(\varphi) \\ y &= |\vec{r}| \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Unser Auto beschreibt eine Kreisbahn in der x-y-Ebene über dem Boden. Es gilt nun, die richtigen Werte zu finden und einzusetzen.

In der Draufsicht (von oben) führt das Auto im Uhrzeigersinn (math. negativ) in pos. y-Richtung los.



Es sei  $\omega$  die Kreisfrequenz der Bewegung, damit wird

$$\varphi = \omega \cdot t$$

Zum Zeitpunkt  $t=0$  soll sich der Wagen an

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 20\text{m} \end{pmatrix}$$

Radius ...  $R = 5\text{m}$

befinden. Danach soll die y-Komponente zunächst anwachsen. Es ergibt sich also als logische Konsequenz für die Kreisbahn:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -R \cos(\omega \cdot t) \\ R \sin(\omega \cdot t) \\ 20\text{m} \end{pmatrix}$$

Es bleibt die Frequenz  $\omega$  zu finden. Wir wissen, dass für

$$\omega \cdot t = 2\pi$$

der Wagen den Kreis einmal komplett durchfahren hat. Gleichzeitig wissen wir:

$$u_{\text{Kreis}} = 2\pi \cdot R \quad \text{und}$$

$$v_{\text{start}} \cdot t_1 = u_{\text{Kreis}} \quad \text{mit } t_1 \dots \text{Zeitpunkt der Umrundung}$$

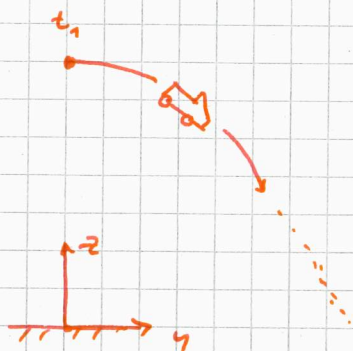
$$\Rightarrow t_1 = \frac{2\pi R}{v_{\text{start}}} = \frac{2\pi \cdot 5\text{m}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{(2\pi) \text{s}}}$$

Sobald  $t$  den Wert  $2\pi$  einnimmt, ist der Kreis umrundet, wir finden also:

$$\omega = 1 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\vec{r}(0 \leq t < t_1) = \begin{pmatrix} -R \cos\left(\frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \\ R \sin\left(\frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \\ 20\text{m} \end{pmatrix}$$

Ab dem Zeitpunkt  $t_1$  stürzt das Auto in die Tiefe. Die Bewegung in pos.  $y$ -Richtung bleibt vom Fall unbeeinflusst.



In negative  $z$ -Richtung führt der Wagen eine beschleunigte Bewegung aus. Die Kraft, die dies bedingt, ist die Erdaufziehung.

$$F = G$$

$$m \cdot a = m \cdot g$$

$$\Rightarrow a = g$$

Es wird also mit  $a \approx 10 \frac{m}{s^2}$  nach unten beschleunigt. Der Weg einer beschleunigten Bewegung errechnet sich durch zweimaliges Integrieren über die Zeit:

$$v(t) = \int_{t_0}^t a \, d\tau = a \cdot t - \underbrace{a \cdot t_0}_{=0}$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t a \cdot \tau \, d\tau = \frac{1}{2} a t^2 - \underbrace{\frac{1}{2} a t_0^2}_{=: s_0}$$

← wird als Startwert genutzt

Mit einer Starthöhe von  $z_{0m}$  und Beschleunigung nach unten ergibt sich also hier:

$$z(t) = z_{0m} - \frac{1}{2} g t^2 \quad (t_1 \leq t < T)$$

Wohingegen in  $y$ -Richtung die Geschwindigkeit konstant bleibt:

$$y(t) = v_{\text{start}} \cdot t \quad (t_1 \leq t < T)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t_1 \leq t < T) = \begin{pmatrix} -R \\ v_{\text{start}} \cdot t \\ z_{0m} - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Bahn des Wagens vollständig parametrisiert.

(\*)



Streng genommen muss für  $t_1 \leq t < T$   $t_1$  auch auf 0 gesetzt werden, oder  $t \rightarrow t - t_1$  substituiert werden. Der Übersicht wegen, wird darauf verzichtet.

Als nächstes möchten wir den Zeitpunkt des Aufpralls  $T$  errechnen. Dazu genügt es zu betrachten, wann die Bewegung in negative  $z$ -Richtung den Boden erreicht.

$$0 = 20\text{ m} - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{für } t = T' = T - t_1$$

$$\Rightarrow T' = \frac{2}{g} \cdot 20\text{ m} = \frac{40}{10} \frac{\text{s}^2 \cdot \text{m}}{\text{m}} = 4\text{ s}$$

$$\Rightarrow T' = 2\text{ s} \quad (\text{die negative Lösung ist unphysikalisch})$$

Insgesamt hat der Wagen also

$$T = T' + t_1 \approx 8.28\text{ s}$$

bis zum Aufprall.

Für die insgesamt zurückgelegte Strecke benötigen wir die Geschwindigkeit des Wagens in Abhängigkeit von  $t$  als skalare Größe!

Allgemein ist die Geschwindigkeit die Zeitableitung des Ortes, dies gilt auch hier vektoriell für unser Beispiel:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

Betrachten wir die Intervalle  $0 \leq t < t_1$  und  $t_1 \leq t < T$  wieder separat. für die Kreisbahn gilt:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ 20\text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (-R \cos(\omega t)) \\ \frac{d}{dt} R \sin(\omega t) \\ \frac{d}{dt} 20\text{ m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t < t_1)$$

einfach  
komponenten-  
weise ableiten

... und für den Absturz:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -R \\ v_{\text{start}} \cdot t \\ 2\omega - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\text{start}} \\ -g \cdot t \end{pmatrix}$$

Die absolute Geschwindigkeit ist nun der Betrag dieser Vektoren.

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t)|$$

• für  $0 \leq t < t_1$ :

$$v(t) = \left| R\omega \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{R^2\omega^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))}$$

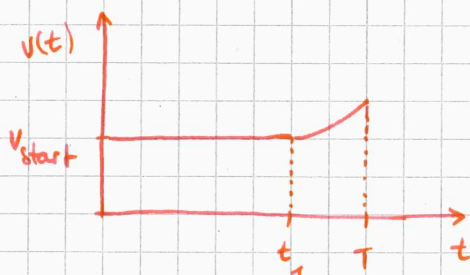
$$= R \cdot \omega = 5 \text{ m} \cdot 1 \frac{1}{\text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_{\text{start}}$$

⚠ Es gilt  
 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$   
 für alle  $x$ !

... wie aus Aufgabenstellung erwartet

• für  $t_1 \leq t < T$ :

$$v(t) = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\text{start}} \\ -g \cdot t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{v_{\text{start}}^2 + (g \cdot t)^2}$$



Es fehlt nur noch die zurückgelegte Strecke insgesamt!

Nun die zurückgelegte Strecke bis zum Aufprall auf der Kreisbahn und in der Luft zu berechnen, berechnen wir die Strecke  $s(t)$  und setzen dann  $t = T$ .

Die Strecke ist gegeben durch:

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

Wir haben  $v(t)$  abschnittsweise definiert, also zerlegen wir das Integral:

$$s(t) = \int_0^{t_1} v(\tau) d\tau + \int_0^T v(\tau) d\tau \quad (*) \text{ Hier Anmerkung beachten.}$$

$\uparrow$   $v$  für  $t < t_1$        $\uparrow$   $v$  für  $t > t_1$

• für  $0 \leq t < t_1$

$$s(t) = \int_0^t v_{\text{start}} d\tau = v_{\text{start}} \cdot t - 0$$

$$s(t_1) = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\pi \text{ s} \approx 31.46 \text{ m}$$

$=: s_1$

• für  $t_1 \leq t < T$  (wir setzen  $t_1 = 0$  und  $T = 2$ )

$$s(t) = s_1 + \int_0^t \sqrt{v_{\text{start}}^2 + (g \cdot \tau)^2} d\tau$$

$$= s_1 + \int_0^t v_{\text{start}} \sqrt{1 + \left(\frac{g \cdot \tau}{v_{\text{start}}}\right)^2} d\tau$$

Subs.:  $\frac{g \tau}{v_{\text{start}}} = u \Rightarrow du = \frac{g}{v_{\text{start}}} d\tau$

$$= s_1 + \int_0^{\frac{g}{v} t} \frac{v_{\text{start}}^2}{g} \sqrt{1 + u^2} du \quad \frac{g}{v} t =: u$$

$$= s_1 + \frac{v_{\text{start}}^2}{g} \int_0^{u_0} \sqrt{1 + u^2} du$$

Subs.:  $u = \sinh(\varphi) \Rightarrow \cancel{du = d\varphi \cosh(\varphi)}$

$$du = d\varphi \cosh(\varphi)$$

$$\dots = S_1 + \frac{v_{\text{start}}^2}{g} \int_0^{\text{arsinh}(u_0)} \underbrace{\sqrt{1 + \sinh^2(\varphi)}}_{= \cosh^2(\varphi)} \cosh(\varphi) d\varphi$$

Additionstheorem!

$$= S_1 + \frac{v_{\text{start}}^2}{g} \int_0^{\text{arsinh}(u_0)} \cosh^2(\varphi) d\varphi$$

↑  
Lösen mit partieller Integration!  $\int \cosh^2(x) dx = \frac{1}{2}x + \sinh(x)\cosh(x)$

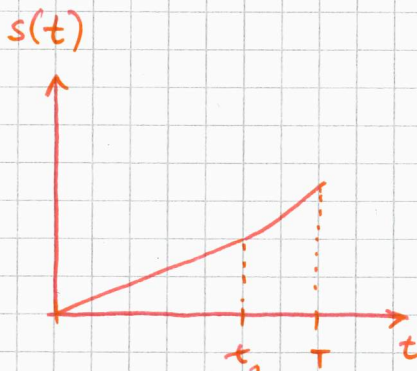
$$= S_1 + \frac{v_{\text{start}}^2}{g} \cdot \frac{1}{2} \left[ \varphi \Big|_0^{\text{arsinh}(u_0)} + \right.$$

$$\left. u_0 \cdot \cosh(\text{arsinh}(u_0)) \right]$$

Benutze:  $\text{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$\cosh(\text{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\dots = S_1 + \frac{v_{\text{start}}^2}{g} \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{g}{v_{\text{start}}} \cdot t + \sqrt{\left( \frac{g \cdot t}{v_{\text{start}}} \right)^2 + 1} \right) + \frac{g \cdot t}{v_{\text{start}}} \cdot \sqrt{\left( \frac{g \cdot t}{v_{\text{start}}} \right)^2 + 1} \right)$$



$s(t)$  wächst zunächst linear an und nimmt dann ein komplizierteres Verhalten an. Setzt man alle Zahlenwerte korrekt ein, erhält man für

$$s = s(T) \approx 54,65$$

Um Ergebnisse auf Konsistenz zu prüfen, empfiehlt es sich immer, die Einheiten nachzurechnen - tun Sie dies!

Größen im Argument von Funktionen sollten einheitliches sein.