Differentialgleichungen

Prozesse in der Natur werden idR durch Lösungen von Differentialgleichungen (DGLen) modelliert und beschrieben. Zunächst beschränken wir uns auf gewöhnliche und lineare DGLen ($\Leftrightarrow$ nur eine Variable, nur lineare Terme).

$$a\, f(x) + b \frac{d}{dx} f(x) + \ldots\, z \frac{d^n}{dx^n} f(x) = 0$$

$\ldots = 0 \Leftrightarrow$ homogene DGL

Ein bekanntes Beispiel ist hier:

$$\omega^2 f(x) + \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0$$

$\boxed{\text{HARMONISCHER OSZILLATOR}}$

Solche Gleichungen werden im Allgemeinen mit dem Ansatz(*) $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ gelöst.

$\Rightarrow$ Einsetzen und Konstanten bestimmen

⚠ Um alle Konstanten eindeutig zu bestimmen sind Randbedingungen (z.B. $f(0) = 5$) nötig.

An dieser Stelle wurden komplexe Zahlen noch nicht ausführlich behandelt, wir greifen also auf unser Wissen über die trigonometrischen Fkt.en sin / cos zurück!

(*) mit $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

$\Rightarrow$ nach zweifachem Ableiten repliziert sich eine trig. Funktion bis auf ein Vorzeichen

Ansatz: $f(x) = a \cdot \sin(\lambda x) + b \cdot \cos(\lambda x)$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dx} f(x) = \lambda \left(a \cos(\lambda x) - b \sin(\lambda x) \right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lambda^2 \left(-a \sin(\lambda x) - b \cos(\lambda x) \right)$$

$$= -\lambda^2 f(x)$$

$\Rightarrow \lambda^2 f(x) + \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0 \Rightarrow$ für $\lambda = (\pm)\omega$ erfüllt der Ansatz die DGL

Randbedingungen nötig um $a, b, (\lambda)$ eindeutig zu ~~definieren~~ bestimmen.

Bsp.: $f(0) = 5$, $f'(0) = -10$

hier stehen i.A. keine dimensionslosen Größen!

- $5 \stackrel{!}{=} a \cdot \sin(\lambda \cdot 0) + b \cdot \cos(\lambda \cdot 0)$
- $-10 \stackrel{!}{=} \lambda \left(a \cos(\lambda \cdot 0) - b \sin(\lambda \cdot 0) \right)$

$$\Rightarrow \quad 5 \stackrel{!}{=} b$$

$$-10 \stackrel{!}{=} \lambda \cdot a$$

$$(\lambda = (\pm)\omega)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{10}{\omega} \sin(\omega x) + 5 \cos(\omega x)$$

Enthalten solche DGLen eine zusätzliche Konstante, spricht man von einer <u>inhomogenen</u> DGL.

<u>Bsp.:</u> $$f(x) - \eta \cdot f'(x) = 5$$

Die Lösung einer inhom. DGL ist die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und <u>einer</u> partikulären Lösung.

$\Rightarrow \quad f_h - \eta \cdot f_h' = 0$ <u>Ansatz:</u> $f_h = a \cdot e^{\lambda x}$

$$a \cdot e^{\lambda x} - \eta \cdot a \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$a \cdot e^{\lambda x} (1 - \eta \cdot \lambda) = 0$$

$\Rightarrow$ wird gelöst durch $\lambda = \frac{1}{\eta}$ (oder $a = 0$, allerdings ist die triviale Lösung idR uninteressant)

eine partikuläre Lösung für

$f_p - \eta f_p' = 5$ wäre z.B. $f_p(x) = 5$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f_h(x) + f_p(x)$$

$$= \underline{\underline{a \cdot e^{\frac{x}{\eta}} + 5}}$$

(a wird über RB definiert)

Lösungen von DGLen spannen einen Vektorraum von Funktionen auf und können daher per Linearkombination neue Lösungen bilden!

Es gibt kein allgemeines Lösungsverfahren, das für alle DGLen gültig ist – oft ist gar die Frage nach Lösbarkeit schwer genug.

Bei komplexeren DGLen bieten sich unterschiedliche Verfahren an, eines davon ist die

Separation der Variablen:

Dies ist keine ~~lineare~~ DGL mehr

Bsp.: $\frac{1}{f'(x)} = x \quad , \quad f(1) \overset{!}{=} 0$

Idee: alle Differentiale auf eine Seite des Gleichheitszeichen bringen (nach Variablen getrennt)

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{dx}{df}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{df} = x \Rightarrow df = \frac{dx}{x}$$

beide Seiten lassen sich integrieren:

$$\int_0^f df' = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'}$$

$$f = \ln(x) \underbrace{- \ln(x_0)}_{C}$$

RB: $f(1) = 0$

$\Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \ln(x)}}$$

⚠ funktioniert so nur für DGLen 1. Ordnung

Der Differential(gleichungs)operator wird in der Literatur oft mit D, $\hat{D}$, $D_{x_1, x_2, \dots}$ oder Ähnlichem bezeichnet. Dies ist nur eine Schreibweise und beschreibt eine herkömmliche DGL! Für unser erstes Beispiel:

$$\omega^2 f + \frac{d^2}{dx^2} f = 0 \quad \overset{!}{=} \quad D f = 0$$

$$\Rightarrow \quad D = \left(\omega^2 + \frac{d^2}{dx^2} \right)$$

D ist keine Zahl, sondern ein Operator, der f auf eine andere Funktion abbildet. D wird auf alle Funktionen angewandt, die rechts davon stehen und nicht von Klammern ausgeschlossen werden!

$$D f_1 f_2 \neq f_1 D f_2 \neq f_2 D f_1$$

$$(D f_1) f_2 = f_2 D f_1$$

Hängt D von einer anderen Variable ab, als die nachstehende Funktion, bleibt diese unverändert.

<u>Bsp</u>: $D := 1 + \frac{d}{dt}$, $f_1 = f(t)$, $f_2 = f(x)$

<u>hier</u>:

$$D f_1 f_2 = f_2 D f_1 \neq f_1 D f_2$$

$$\left(1 + \frac{d}{dt}\right) f(t) f(x) = f(x) \left(1 + \frac{d}{dt}\right) f(t) \neq f(t) \left(1 + \frac{d}{dt}\right) f(x)$$

Im Laufe des Studiums wird man DGLen mit mehreren Variablen begegnen (Schrödingergleichung, Maxwellgleichungen, etc.). Eine Möglichkeit diese Gleichungen zu lösen, ist der <u>Separationsansatz:</u>

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

<u>Bsp.:</u>

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) - f(x,t) = 0$$

Notation:
$f(x,t) \equiv f$
$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x$

$$\partial_t f - \partial_x^2 f - f = 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t f = (\partial_x^2 + 1) f$$

<u>Ansatz:</u> $f(x,t) = h(x) \cdot g(t)$

$$\partial_t h \cdot g = (\partial_x^2 + 1)\, h \cdot g$$

$$h \cdot \partial_t g = g \cdot (\partial_x^2 + 1) \cdot h$$

$$\frac{\partial_t g}{g} = \frac{(\partial_x^2 + 1) h}{h}$$

$g = a \cdot e^{\lambda_t \cdot t}$
$h = b \cdot e^{\lambda_x \cdot x}$

$$\frac{\partial_t (a\, e^{\lambda_t t})}{a \cdot e^{\lambda_t t}} = \frac{(\partial_x^2 + 1)(b\, e^{\lambda_x x})}{b\, e^{\lambda_x x}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda_t = \lambda_x^2 + 1}}$$

$\lambda_x := \omega$

$$f(x,t) = g \cdot h = a \cdot b \cdot e^{\omega^2 t + \omega x + t}$$

für $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ beschreibt diese Lösung eine Welle in Raum und Zeit (Bsp.: $\omega = \sqrt{2} \cdot i$)