Spaß mit Feldern

Felder spielen in der Physik eine bedeutende Rolle, sie beschreiben, wie sich Größen wie Strömung, Temperatur, Ladung, etc. im Raum verteilen. Man unterscheidet:

Skalarfeld $\rightarrow$ ordnet jedem Punkt im Raum einen Wert (skalar) zu
meist $\phi(\vec{x})$

Vektorfeld $\rightarrow$ ordnet jedem Punkt im Raum einen Vektor zu
meist $\vec{A}(\vec{x})$

dabei gilt:

$\vec{\nabla}\,\phi(\vec{x}) = \operatorname{grad}(\phi(\vec{x}))$ ... Gradient des Feldes $\phi(x) \rightarrow$ Vektorfeld

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x}) = \operatorname{div}(\vec{A}(\vec{x}))$ ... Divergenz des Feldes $\vec{A}(\vec{x}) \longrightarrow$ Skalarfeld

$\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}) = \operatorname{rot}(\vec{A}(\vec{x}))$ ... Rotation des Feldes $\vec{A}(\vec{x}) \longrightarrow$ Vektorfeld

Bsp.: i) $\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{grad}\, \phi(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \phi(\vec{x}) = \left(\partial_x \hat{e}_x + \partial_y \hat{e}_y + \partial_z \hat{e}_z\right) \phi(\vec{x})$$

$$= + \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} \frac{1}{2} \hat{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} \hat{e}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}}}$$

Notation: $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$

ii) $\vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \text{div}(\vec{A}(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (\partial_x \cdot 4x) + (\partial_y \cdot y) + (\partial_z \cdot z)$$

$$= 4 + 1 + 1 = \underline{\underline{6}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \text{rot}(\vec{A}(\vec{x})) = \ldots = \underline{\underline{0}}$$

$\rightsquigarrow$ Übung für zu Hause

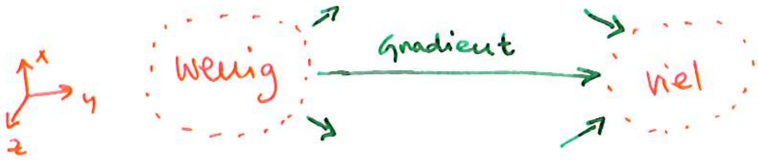
iii) $\vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(0) - \partial_z(x) \\ \partial_z(-y) - \partial_x(0) \\ \partial_x(x) - \partial_y(-y) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

Interpretation der Größen:

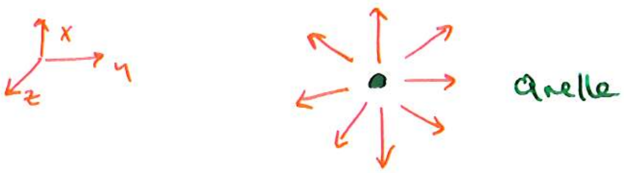
- Gradient

Die <u>Richtungsänderung</u>, in welche ein Feld zunimmt. Gradient = 0 $\Rightarrow$ Feld ist konstant



- Divergenz

Die Divergenz eines Feldes entspricht den <u>Quellen</u> des Vektorfeldes. Ein Feld mit $\mathrm{div}(\vec{A}(\vec{x})) = 0$ ist quellenfrei!



- Rotation

Die Rotation gibt an jedem Ort die ~~die~~ doppelte <u>Winkelgeschwindigkeit</u> an, mit der ein Körper im Feld um eine Achse rotiert.

rechte-Hand-Regel anwenden!

Physikalische Bedeutung

Kraftfelder lassen sich aus zugehörigen Potentialen berechnen:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\,\phi(\vec{x})$$

Die Quellen dieser Potentiale sind damit:

$$\operatorname{div}(\vec{F}(\vec{x})) = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi(\vec{x})) = -\nabla^2\phi(\vec{x})$$

$$= -\Delta\,\phi(\vec{x})$$

⚠ gilt nur für $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$!

Laplace-Operator

$$\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

siehe Poisson-Gleichung

Bsp.:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,c$$

$$-\Delta\phi(x) = 4\pi\alpha\,\rho(r)$$

siehe 3. Semester

α ... Konstante

c ... Ladung

ρ ... Ladungsdichte

Mathematischer Einschub

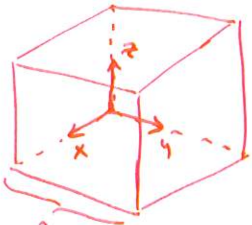
Jacobi-Determinante

Mit der Betrachtung von Feldern werden uns mehrdim. Integrale begegnen. Um diese in versch. Koordinatensystemen zu handhaben benötigt man die <u>Jacobi-Determinante</u>.

Die JD. beschreibt die Änderung des Einheitsvolumenelements mit den (neuen) Koordinaten.

<u>Bsp.:</u>

- Würfel mit Kantenlänge 2

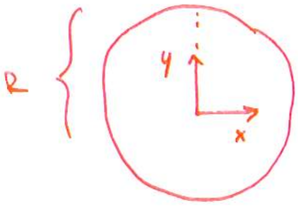


2

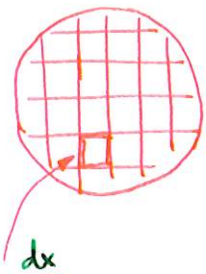
$$V = \int_V dV' = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 dx\, dy\, dz$$

$$= 2 \int_0^2 \int_0^2 dy\, dz = \ldots = 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{8}$$

- Kreis mit Radius 2

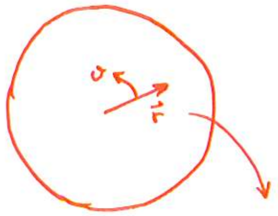


$$A = \int_V dV' = \iint_? dx\, dy$$

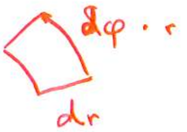


in x-y-Koordinaten sehr aufwändig zu parametrisieren, besser → Polarkoordinaten!

$dA = \overset{dx}{\square}\, dy$ infinitesimales Volumenelement! (Flächenelement)



infinitesimales Flächenelement in Polarkoordinaten

dA = 

⚠ Die Länge von dφ muss mit r multipliziert werden, um das Flächenelement zu berechnen.

$$J_{pol} = \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right) \right| = \text{... wikipedia! ...} = \underline{\underline{r}}$$

↑

Koordinatentransformations-Matrix

Damit wird die Kreisfläche mit Radius R:

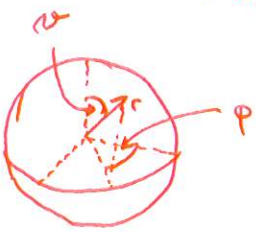
$$A_R = \int_A dA' = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot d\varphi \cdot dr = 2\pi \cdot \left(\tfrac{1}{2} R^2 - 0\right)$$

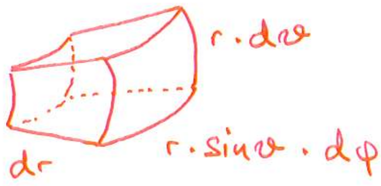
$$= \pi R^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_2 = 4\pi}}$$

- Kugel mit Radius 2

Analog zu oben!



dV = 

$$J_{Kugel} = \left| \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} \right) \right| = r^2 \sin\vartheta$$

$$V_R = \int_V dV' = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \dots = \frac{4}{3}\pi R^3$$

↑ ϑ ↑ φ ↑ r

$$\Rightarrow \underline{\underline{V_2 = \frac{32}{3}\pi}}$$