

Bewegung im Kraftfeld

Aus der bekannten (eindimensionalen) Gleichung

$$W = F \cdot s \quad (\dots \text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg})$$

wird nun:

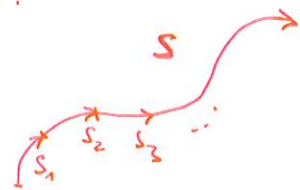
$$W = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

mit einem vektoriellen Kraftfeld $\vec{F}$ und dem Linienelement $d\vec{s}$. $d\vec{s}$ wird am Besten mit Hilfe einer neuen Variable parametrisiert.

$$d\vec{s} = d\vec{s}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} dt$$

Der Weg S kann in zusammenhängende Stücke geteilt werden! $S = S_1 + S_2 + \dots S_n$

$$W = \int_S \vec{F} d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{F} d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{F} d\vec{s}_2 + \dots$$



Kehrt man wieder ~~an~~ den Anfangspunkt zurück, redet man von einem geschlossenen Weg.



$$W = \int_S \vec{F} d\vec{s} = \oint_S \vec{F} d\vec{s} = \int_{\partial A} \vec{F} d\vec{s}$$

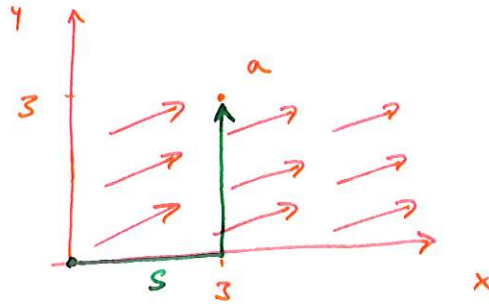


Fläche A wird von S eingeschlossen

$\Rightarrow \partial A \dots$ Rand von $A = S$

Bsp. ∴

$$i) \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$W_a = \int_S \vec{F} d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{F} d\vec{s}_1 + \int_S \vec{F} d\vec{s}_2$$

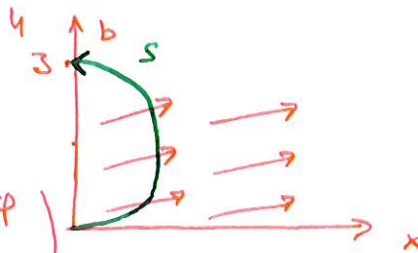
$$S_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 3] \quad S_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 3]$$

$$W_a = \int_0^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\frac{ds_1(t)}{dt}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\frac{ds_2(t)}{dt}} dt + \int_0^3 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^3 1 dt + \int_0^3 \frac{1}{2} dt = 3 + \frac{3}{2}$$

... positive Energiebilanz

$$ii) \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\varphi \in [0, \pi]$$

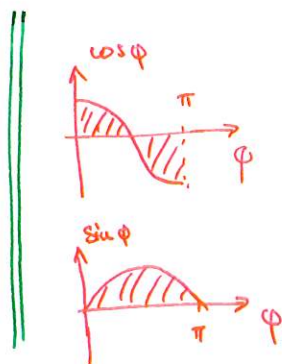
$$W_b = \int_0^\pi \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{3}{2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \right) \right] d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \left(1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sin \varphi \right) d\varphi$$

$$\int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 0 \quad \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$



Existiert zu $\vec{F}$ ein Potential ϕ , sodass

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi \quad \leftarrow \text{Existenz nicht immer gewährleistet!}$$

dann ist $(\vec{F} \dots \text{Gradientenfeld})$

$$\begin{aligned} W &= \int_S \vec{F} d\vec{s} = \int_S (-\vec{\nabla} \phi) d\vec{s} \\ &= -(\phi(\text{Endpunkt}) - \phi(\text{Startpunkt})) \end{aligned}$$

für unser Beispiel:

$$\phi(x) = -(x + \frac{1}{2}y) \Rightarrow -\vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$W_a = -\phi(a) + \phi(0) = -(-(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2})) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \quad \checkmark$$

$$W_b = -\phi(b) + \phi(0) = -(-(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2})) = \frac{3}{4} \quad \checkmark$$

Für $\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi$ gilt damit, dass

alle Integrale wegunabhängig sind.

Für einen geschlossenen Weg ist damit immer:

$$\oint_S \vec{F} d\vec{s} = -(\phi(a) - \phi(a)) = 0$$



Über den Satz von Stokes folgt damit:

$$0 = \oint_S \vec{F} d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0}}$$

GRADIENTENFELDER SIND ROTATIONSFREI,
MAN SPRICHT HIER VON KONSERVATIVEN
FELDERN! IN DIESEN FELDERN IST DIE
~~ENERGIE~~ ENERGIE* ERHALTEN UND GEHT
NICHT (DURCH Z.B. REIBUNG) VERLOREN!

* Summe aus E_{kin} und E_{pot}