Komplexe Zahlen

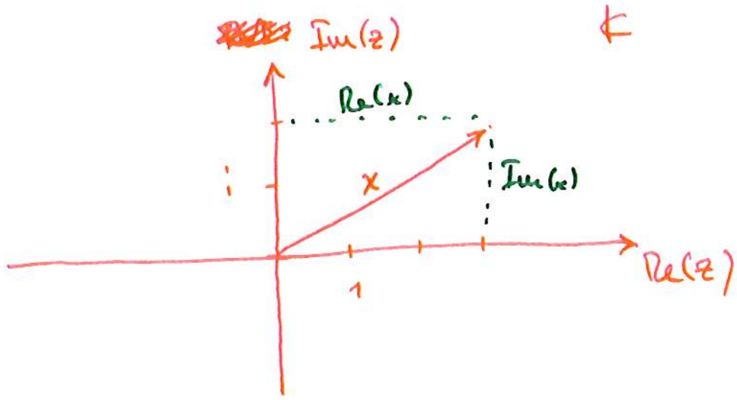
Motivation: Cardano (ital. Mathematiker) suchte im 16. Jhrh. nach Lösungen gewisser quadr. Gleichungen und stieß auf die Zahl $\sqrt{-15}$.

Anfang des 19. Jhrh. wurden komplexe Zahlen als Zahlenpaar geordneter reeller Zahlen eingeführt: $a + ib \quad , a, b \in \mathbb{R}$

1000 Jahre nach Entdeckung der irrationalen Zahlen, 3000 Jahre nach frühester Verwendung der Null.

$i = \sqrt{-1}$ ... imaginäre Einheit

Zahlenstrahl wird zur Gauss'schen Zahlenebene erweitert:



Bsp.:

$x = 3 + 2i$

$\|x\| = \sqrt{9 + 4}$

Betrag $\hat{=}$ Norm

Äquivalent* zu einem zweidimensionalen, reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$

* nicht math. äquivalent. besser: isomorph

Angenommen man potenziert die Zahl e mit einer Zahl $\in \mathbb{C}$, die keinen Realteil besitzt,

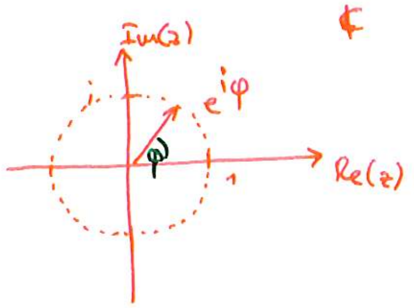
$$e^{i\varphi} = \ldots \text{Taylorreihe} \ldots = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2} + \frac{(i\varphi)^3}{3!}$$

bemerke $i^2 = -1$ und $i^4 = 1$ usw ...

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right)}_{\cos(\varphi)} + \underbrace{i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \ldots\right)}_{i \cdot \sin(\varphi)}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\|e^{i\varphi}\| = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} = \underline{\underline{1}}$$



$e^{i\varphi}$ liegt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis um 0 in der komplexen Ebene!

$\Rightarrow$ Mit Hilfe des Winkels φ in der komplexen Zahlenebene lassen sich Zahlen $z \in \mathbb{C}$ parametrisieren durch:

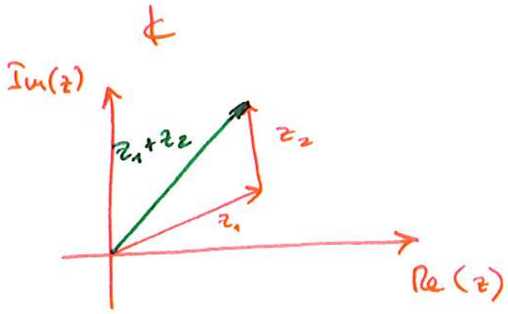
$$z = \|z\| \cdot e^{i\varphi} \qquad \text{mit} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$$

für $z = a + ib$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

... Polarform der komplexen Zahlen

Rechenregeln:



$z_1 = a + ib$

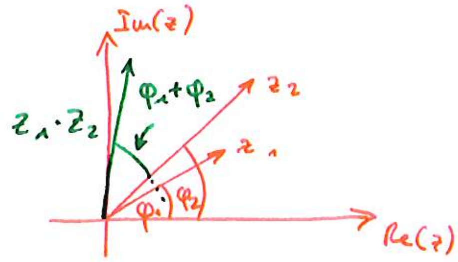
$z_2 = \alpha + i\beta$

- $z_1 + z_2 = (a+\alpha) + i(b+\beta)$

  ... Subtraktion analog

- $z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(\alpha+i\beta) = (a\alpha - \beta b) + i(a\beta + \alpha b)$

  oder:



$$\dots = \left(\|z_1\| e^{i\varphi_1}\right) \cdot \left(\|z_2\| e^{i\varphi_2}\right)$$

$$= \|z_1\| \, \|z_2\| \, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{\alpha+i\beta} \overset{\text{erweitern um } \alpha - i\beta}{=} \frac{(a+ib)(\alpha-i\beta)}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= \frac{(a\alpha+\beta b) + i(b\alpha - a\beta)}{\alpha^2+\beta^2}$$

  oder:

$$\dots = \frac{\|z_1\| \, e^{i\varphi_1}}{\|z_2\| \, e^{i\varphi_2}}$$

$$= \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Bsp.:

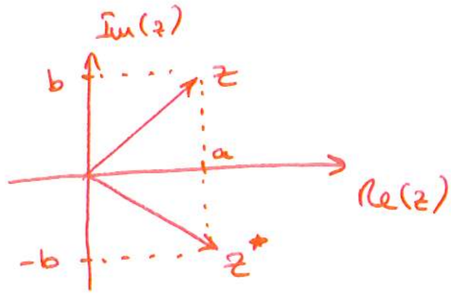
- $4 + (7-2i) = 11 - 2i$
- $\frac{2}{i} = -2i$
- $e^{i\pi} + 1 = 0$
- $(i)^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i\cdot\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}} \simeq 0.208$

komplexe Konjugation

Eine Zahlenoperation, die mit reellen Zahlen nicht möglich ist (bzw. einfach keine Auswirkung hat), ist die <u>kompl. Konjugation</u>.
Hierbei wird der Imaginärteil mit (-1) multipliziert.
Man schreibt:

$$z \longmapsto z^*$$ (manchmal $\bar{z}$)

$$a + ib \longmapsto a - ib$$



Damit ergibt sich:

$$z \cdot z^* = (a + ib)(a - ib)$$

$$= a^2 + b^2 = \|z\|^2$$

alternativ:

$$= \|z\| e^{i\varphi} \cdot \|z\| e^{i(-\varphi)} = \|z\|^2 \underbrace{e^{i(\varphi-\varphi)}}_{=1}$$

$$= \|z\|^2$$

Eine komplexe Zahl, multipliziert mit ihrem kompl. Konjugierten, ergibt ihren Betrag zum Quadrat!

Das wird in späteren Semestern enorm wichtig werden! (Quantenmechanik)