

# 7 Harmonischer Oszillator & Schwingungen

Basiert auf einem Skript von Jürgen Markmann

## 7.1 Motivation

Als harmonischen Oszillator bezeichnet man in der Mechanik ein System, das ein Potentialminimum besitzt und bei einer Auslenkung  $x$  aus diesem Minimum eine der Auslenkung *proportionale* Rückstellkraft  $F_R$  erfährt. Abweichungen von dieser einfachen Proportionalität werden als Anharmonizitäten bezeichnet und können zu komplexeren Bewegungsabläufen bis hin zu einer chaotischen Dynamik des Systems führen.

## 7.2 Lösen der Differentialgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators

Die Differentialgleichung (DGL) des ungedämpften harmonischen Oszillators soll hier exemplarisch anhand der Kräftebilanz eines mechanischen Oszillators, z.B. eines Federpendels, abgeleitet werden. Bei einer Auslenkung  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  aus der Ruhelage erfährt eine Masse eine Kraft in entgegengesetzter Richtung zur Auslenkung und proportional zum Betrag des Auslenkung. Man spricht von einer Rückstellkraft  $F_R$ :

$$F_R = -kx(t) \quad (1)$$

Gemäß den Newtonschen Axiomen der Mechanik ist die Summe aller wirkenden Kräfte gleich der Trägheitskraft  $F$ . Also gilt:

$$\begin{aligned} F = m\ddot{x}(t) &= -kx(t) = F_R \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{k}{m}x(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Im folgenden wird bei  $x(t)$  die Zeitabhängigkeit nicht mehr explizit erwähnt und in Vorausschau auf das Ergebnis wird  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  gesetzt. Dies ist möglich, da  $k$  und  $m$  positive Größen sind. Daraus ergibt sich dann die folgende DGL:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3)$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Grades; homogen, da kein Störterm vorhanden ist, der nicht von  $x$  oder einer zeitlichen Ableitung von  $x$  abhängig ist und linear, da die Funktion  $x$  und ihre Ableitungen nur mit konstanten Faktoren versehen sind und addiert werden. (Man spricht von einer Linearkombination.)

Man kann zeigen, daß jede Linearkombination zweier voneinander linear unabhängiger Lösungsfunktionen ebenfalls die DGL löst. Ebenso kann man zeigen, daß eine lineare DGL 2.Grades maximal 2 voneinander linear unabhängige Lösungen haben kann. Deshalb ist eine allgemeine Lösung eine Linearkombination aus zwei linear unabhängigen Lösungen. Um eine solche Funktion zu berechnen, macht man nun folgenden Ansatz:

$$x = Ce^{\lambda t} \quad (4)$$

Damit ist:

$$\ddot{x} = \lambda^2 C e^{\lambda t} \quad (5)$$

Dies setzt man nun in die DGL (3) ein und erhält:

$$\begin{aligned} \lambda^2 C e^{\lambda t} + \omega_0^2 C e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2 + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Gleichung (6) bezeichnet man als charakteristisches Polynom der Differentialgleichung (3). Wie man leicht sieht, ist diese Gleichung im Reellen nicht lösbar, also müssen wir ins Komplexe ausweichen. Dabei ist zu beachten, daß die Ergebnisse ebenfalls komplex werden und deshalb die reellen Lösungen noch als „physikalisch sinnvoll“ aus dem Ergebnis extrahiert werden müssen. (Denn was soll schon eine komplexe Auslenkung in x-Richtung darstellen?) Gleichung (6) hat die Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Einsetzen in den Lösungsansatz (4) ergibt zwei Lösungsfunktionen:

$$z_1 = C_1 e^{i\omega_0 t} \quad z_2 = C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad ; z_1, z_2, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Diese beiden Lösungen sind voneinander linear unabhängig. Die allgemeine Lösung ist also eine Linearkombination aus beiden Lösungen und lautet:

$$z = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (7)$$

Wie oben schon erwähnt ist dies jedoch eine komplexe Lösung, wobei  $C_1$  und  $C_2$  komplexe Konstanten sind. Will man eine rein reelle Lösung, muß man das Ergebnis in Real- und Imaginärteil aufspalten und die Lösungen extrahieren, deren Imaginärteil = 0 ist. Dazu schreibt man die Konstanten in Polarkoordinaten:

$$C_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad C_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

Die Form der Lösung entspricht dann:

$$\begin{aligned} z &= \rho_1 e^{i\varphi_1} e^{i\omega_0 t} + \rho_2 e^{i\varphi_2} e^{-i\omega_0 t} \\ &= \rho_1 e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} + \rho_2 e^{i(-\omega_0 t + \varphi_2)} \\ &= \rho_1 (\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + i \sin(\omega_0 t + \varphi_1)) + \rho_2 (\cos(-\omega_0 t + \varphi_2) + i \sin(-\omega_0 t + \varphi_2)) \\ &= \rho_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(-\omega_0 t + \varphi_2) + i [\rho_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(-\omega_0 t + \varphi_2)] \end{aligned}$$

Bei den physikalisch sinnvollen Lösungen muß der Imaginärteil von  $x$  für alle Zeiten  $t$  gleich Null sein, d.h.

$$\begin{aligned} \rho_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(-\omega_0 t + \varphi_2) &= 0 \\ \rho_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) &= \rho_2 \sin(\omega_0 t - \varphi_2) \end{aligned}$$

Da  $\rho$  und  $\varphi$  konstant sind, muß

$$\rho_1 = \rho_2 \quad \varphi_1 = -\varphi_2$$

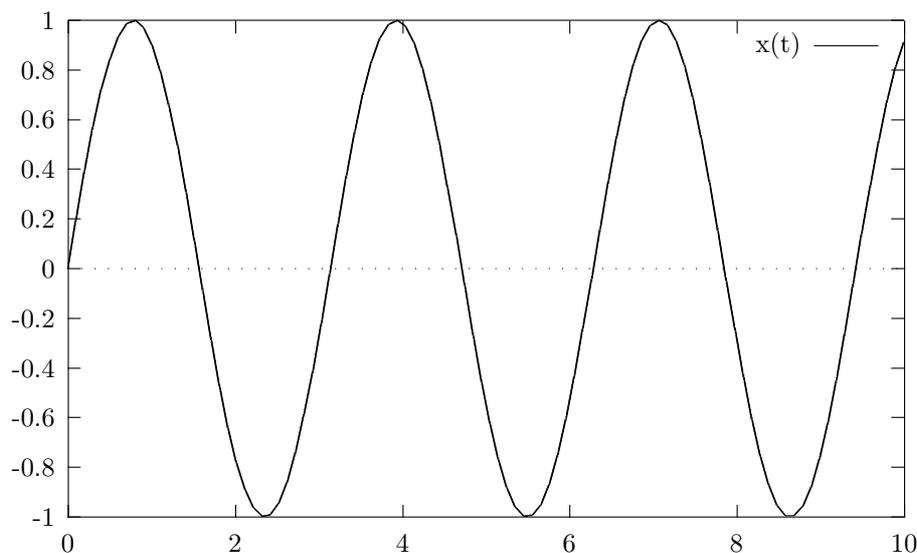
sein, was bedeutet, daß  $C_2 = C_1^*$ . Dies setzt man in den verbleibenden Realteil ein und erhält die allgemeine reelle Lösung der DGL:

$$\begin{aligned} x &= \rho_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \rho_1 \cos(-\omega_0 t - \varphi_1) \\ &= \rho_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \rho_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ &= 2\rho_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \end{aligned}$$

Führt man nun noch die gängigen Bezeichnungen  $A = 2\rho_1$  und  $\Delta = \varphi_1$  ein, folgt für die Lösung:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \Delta), \quad (8)$$

wobei  $A$  und  $\Delta$  *reelle* Konstanten sind. Die Lösungsfunktion beschreibt einen sinusförmigen Weg-Zeit-Verlauf mit der Amplitude  $A$  und der Phasenverschiebung  $\Delta$ . In Abbildung 1 ist der zeitliche Verlauf der Elongation  $x(t)$  mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1$  abgebildet.



**Abbildung 1:** Beispiel für  $x(t)$  des homogenen ungedämpften Oszillators mit  $\omega_0 = 2$ .

### 7.3 Lösen der DGL des gedämpften harmonischen Oszillators

Zusätzlich zur Rückstellkraft betrachten wir nun eine Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{x}$  ist. Für die auftretenden Kräfte gilt dann:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx$$

Üblicherweise schreibt man sie in der Form:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (9)$$

mit  $\gamma = \frac{\beta}{m}$  und  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Auch dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Grades. Die Bezeichnung des Vorfaktors von  $x$  als  $\omega_0^2$  rührt übrigens daher, daß  $\omega_0$  im ungedämpften Fall (für  $\gamma = 0$ ) gerade die Frequenz der Schwingung des Oszillators wäre.

Wie oben macht man nun folgenden Ansatz:

$$x = Ae^{\lambda t}$$

Damit sind:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda Ae^{\lambda t} \\ \ddot{x} &= \lambda^2 Ae^{\lambda t} \end{aligned}$$

Dies setzt man nun in die DGL (9) ein und erhält:

$$\begin{aligned} \lambda^2 Ae^{\lambda t} + \gamma \lambda Ae^{\lambda t} + \omega_0^2 Ae^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Gleichung (10) ist das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (9). Auch hier ist es eine quadratische Gleichung; für sie gilt:

$$\left(\lambda + \frac{\gamma}{2}\right)^2 = -\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}$$

Abhängig vom Vorzeichen der rechten Seite der Gleichung, muß man drei Fälle unterscheiden.

1. Kriechfall  $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$

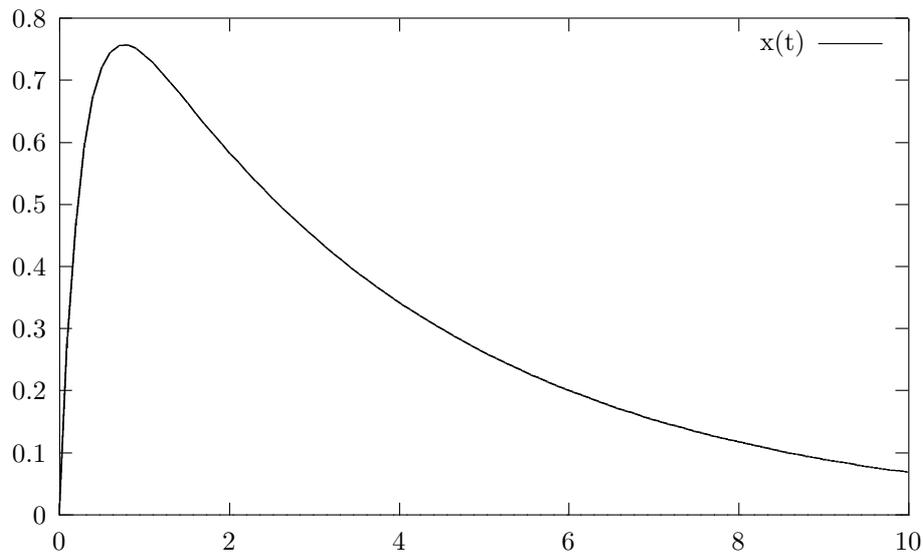
In diesem überdämpften Fall sind die Lösungen für  $\lambda$  reell und lauten:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Analog zu oben lautet dann die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right)t} \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( A_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}t} \right) \end{aligned}$$

Diese Funktion zeigt für typische Anfangsbedingungen nach kurzem Anstieg einen exponentiell abfallenden Verlauf,  $x$  wechselt während des gesamten Bewegungsverlaufes sein Vorzeichen nicht. Abbildung 2 zeigt den Verlauf der Bewegung eines gedämpften harmonischen Oszillators im Kriechfall mit  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1$ .



**Abbildung 2:** Beispiel für  $x(t)$  des gedämpften harmonischen Oszillators mit  $\gamma = 4$  und  $\omega_0 = 1$  für den Kriechfall.

2. aperiodischer Grenzfall  $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$   
 Hier erhält man nur einen Wert für  $\lambda$ , nämlich

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2}$$

Man spricht von einer Entartung des Lösungsraumes. In diesem Fall kann man zeigen, daß die Lösungen von der Form

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t}$$

sind. Also lautet sie in diesem Fall:

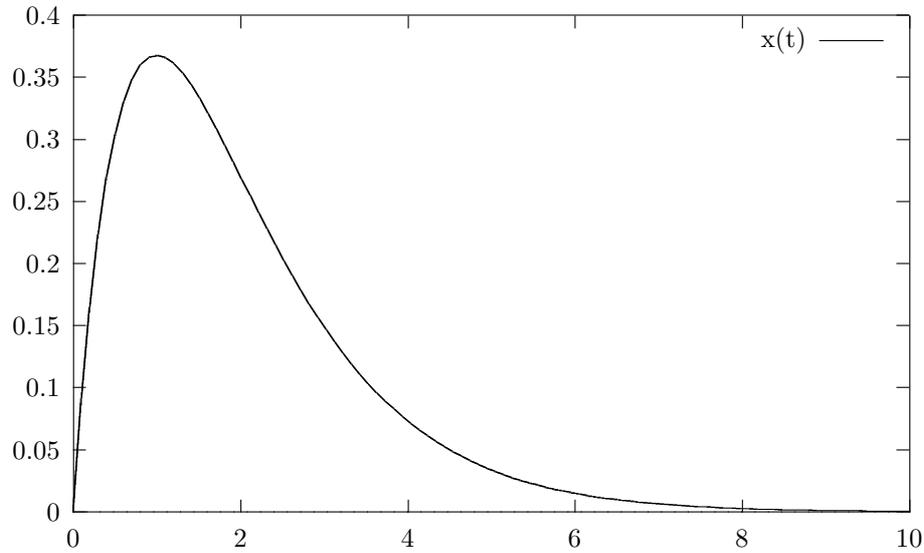
$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

Abbildung 3 zeigt den Verlauf der Bewegung für die Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1$ . Der Verlauf von  $x$  sieht dem des Kriechfalles sehr ähnlich, allerdings mit dem wichtigen Unterschied, daß diese Funktion viel schneller abfällt.

3. Schwingfall  $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$

Nur in diesem Fall findet überhaupt eine echte Schwingung statt. Das charakteristische Polynom ist allerdings wieder nur im komplexen lösbar. Analog zum ungedämpften Fall erhält man für  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$



**Abbildung 3:** Beispiel für  $x(t)$  des gedämpften harmonischen Oszillators mit  $\gamma = 2$  und damit  $\omega_0 = 1$  für den aperiodischen Grenzfall.

Die allgemeine Lösung lautet dann:

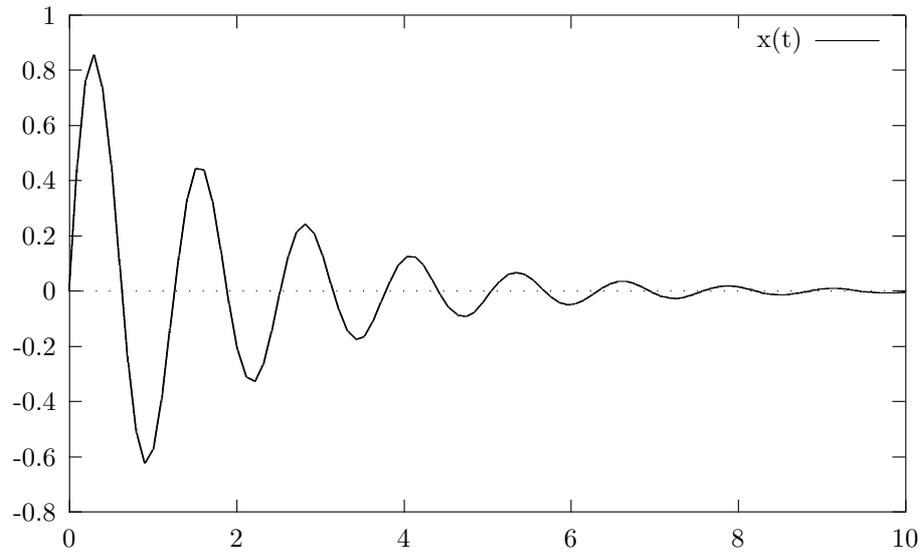
$$z = C_1 e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{\gamma}{2} - i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right)t}$$

$$z = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( C_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t} \right)$$

Auch hier ist zu beachten, daß diese Lösung komplex ist. Also müssen die reellen Lösungen wieder wie im ungedämpften Fall durch Separation in Real- und Imaginärteil gefunden werden. Das funktioniert hier absolut analog, nur daß an die Stelle von  $\omega_0$  nun  $\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$  tritt. Damit lautet die reelle Lösung:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t + \Delta\right) \quad (11)$$

Abbildung 4 zeigt den Verlauf der Elongation eines gedämpften harmonischen Oszillators im Schwingfall mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1$ . Zur Verdeutlichung der Schwingung wurde  $\omega_0$  diesmal etwas höher gewählt. Diese Lösung hat wiederum einen sinusförmigen Weg-Zeit-Verlauf, der allerdings von einer fallenden Exponentialfunktion eingehüllt wird, so daß die Schwingungsamplitude für große Zeiten  $t$  gegen 0 geht. Die Frequenz, mit der das System schwingt, ist  $\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$  und damit kleiner als die Frequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Oszillators. Oft benutzt man den Logarithmus des Verhältnisses der Auslenkung zweier aufeinanderfolgender Maxima der Schwingung um die Dämpfung zu beschreiben. Diese Größe nennt man das



**Abbildung 4:** Beispiel für  $x(t)$  des gedämpften harmonischen Oszillators mit  $\gamma = 1$  und  $\omega_0 = 5$  für den Schwingfall.

logarithmische Dekrement  $\Lambda$ . Um die Zeit  $t_n$  zu berechnen, bei der der Oszillator maximale Auslenkung zeigt, setzt man an:

$$\begin{aligned}
 \cos(\omega t_n + \Delta) &= 1 \\
 \omega t_n + \Delta &= 2\pi n \quad ; n \in \mathbb{Z} \\
 t_n &= \frac{2\pi n - \Delta}{\omega}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Daraus errechnet sich dann das logarithmische Dekrement zu

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \ln \frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})} \\
 &= \ln \frac{Ae^{-\frac{\gamma}{2}t_n} \cos(\omega t_n - \Delta)}{Ae^{-\frac{\gamma}{2}t_{n+1}} \cos(\omega t_{n+1} - \Delta)} \\
 &= \ln e^{-\frac{\gamma}{2}t_n - (-\frac{\gamma}{2}t_{n+1})} \\
 &= \frac{\gamma}{2}(t_{n+1} - t_n) \\
 &= \frac{\gamma}{2} \left( \frac{2\pi(n+1) - \Delta}{\omega} - \frac{2\pi n - \Delta}{\omega} \right) \\
 &= \frac{\pi\gamma}{\omega}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$= \frac{\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \tag{14}$$

## 7.4 Lösen der DGL des gedämpften harmonischen Oszillators bei periodischer, äußerer Kraft

Wir betrachten nun einen Oszillator, der von einer äußeren, periodischen Kraft

$$F_A = F_0 \cos(\omega t + \delta)$$

erzwungene Schwingungen ausführt. Betrachtet man die wirkenden Kräfte, so ist:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx + F_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Man schreibt die DGL in der Form:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \delta) \quad (15)$$

Dies ist eine inhomogene lineare DGL 2. Grades.  $\frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \delta)$  bezeichnet man als Störung und  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$  als die zugehörige homogene DGL. Man kann zeigen, daß die Lösungen solcher DGLn sich schreiben lassen als Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung (auch partikuläre Lösung genannt) der inhomogenen, d.h. vollständigen, DGL. Sei  $x_H$  also die Lösung aus dem vorherigen Kapitel und  $x_S$  eine spezielle Lösung dieser inhomogenen DGL, dann ist die allgemeine Lösung:

$$x = x_H + x_S \quad (16)$$

Die Lösung der homogenen DGL ist bereits bekannt, es muß nur noch eine spezielle Lösung  $x_S$  gefunden werden. Dafür existieren in der Mathematik mehrere Verfahren. Eines davon ist die sogenannte „Kochrezeptmethode“ für spezielle Störterme. Allgemeiner ist das Verfahren der Variation der Konstanten. In einem solchen einfachen Fall wie diesem kann man aber eine spezielle Lösung durch „scharfes Hinsehen“ erkennen. Es vereinfacht die folgenden Rechnungen ganz erheblich, wenn man  $F_A$  einen Imaginärteil hinzufügt, etwa:

$$F_A = F_0(\cos(\omega t + \delta) + i \sin(\omega t + \delta)) = F_0 e^{i(\omega t + \delta)}$$

Dann lautet die DGL (im komplexen):

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i(\omega t + \delta)} \quad (17)$$

Betrachtet man den Realteil dieser Gleichung,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z] &= \operatorname{Re}\left[\frac{F_0}{m} e^{i(\omega t + \delta)}\right] \\ \operatorname{Re}[\ddot{z}] + \gamma\operatorname{Re}[\dot{z}] + \omega_0^2 \operatorname{Re}[z] &= \frac{F_0}{m} \operatorname{Re}[\cos(\omega t + \delta) + i \sin(\omega t + \delta)] \\ (\operatorname{Re}[z])'' + \gamma(\operatorname{Re}[z])' + \omega_0^2 \operatorname{Re}[z] &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \delta), \end{aligned}$$

so erkennt man, daß dieser äquivalent zu Gleichung (15) ist. Das bedeutet, daß der Realteil der Lösung von DGL (17) der Lösung von DGL (15) entspricht.

Im folgenden soll eine Lösung für die komplexe Differentialgleichung gefunden werden. Mit  $F' = \frac{F_0}{m} e^{i\delta}$  folgt für die DGL (17):

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = F' e^{i\omega t} \quad (18)$$

Dann erkennt man auch leicht eine partikuläre Lösung:

$$z_S = A' e^{i\omega t} \quad (19)$$

$A'$  bestimmt man durch Einsetzen von (19) in die DGL (17). Dafür berechnet man noch die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \dot{z}_S &= i\omega A' e^{i\omega t} \\ \ddot{z}_S &= -\omega^2 A' e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt das:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A' e^{i\omega t} + i\omega\gamma A' e^{i\omega t} + \omega_0^2 A' e^{i\omega t} &= F' e^{i\omega t} \\ A' (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma) &= F' \\ A' &= \frac{F'}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung setzen wir  $A = A' e^{-i\delta}$ , d.h. wir betrachten eine Amplitude  $A$ , aus der die Phase  $\delta$  der Erregerschwingung „herausgerechnet“ wurde. Für dieses  $A$  gilt:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \quad (20)$$

Nun muß der Nenner reell gemacht werden. Dafür erweitert man den Bruch mit dem konjugiert Komplexen des Nenners. Man erhält:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{F_0}{m}(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \\ &= \frac{\frac{F_0}{m}(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} + i \frac{-\frac{F_0}{m}\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Polardarstellung von  $A$  benötigt man den Betrag von  $A$  und den Phasenwinkel.

$$A = |A| e^{i\varphi}$$

$$\begin{aligned}
|A| &= \frac{\frac{F_0}{m} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \\
&= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \\
\tan \varphi &= \frac{-\frac{F_0}{m} \omega\gamma}{\frac{F_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2)} \\
&= \frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für  $z_S$ :

$$\begin{aligned}
z_S &= A' e^{i\omega t} = A e^{i\delta} e^{i\omega t} = |A| e^{i\varphi} e^{i\delta} e^{i\omega t} = |A| e^{i(\omega t + \varphi + \delta)} \\
z_S &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} e^{i(\omega t + \arctan\left(\frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \delta)}
\end{aligned}$$

Nun hat man eine komplexe Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (17). Wie vorher gezeigt wurde, ist der Realteil von  $z_S$  Lösung der (reellen) Differentialgleichung (15):

$$\begin{aligned}
x_S &= \operatorname{Re}[z_S] \\
&= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \delta\right). \quad (21)
\end{aligned}$$

Gemäß Gleichung (16) lauten dann die vollständigen Lösungen, unterschieden nach den Fällen wie im vorherigen Kapitel:

1. Kriechfall:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( A_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}t} \right) \\
&\quad + \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \delta\right) \quad (22)
\end{aligned}$$

2. aperiodischer Grenzfall:

$$\begin{aligned}
x(t) &= (A_1 + A_2 t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\
&\quad + \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \delta\right) \quad (23)
\end{aligned}$$

3. Schwingfall:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t + \Delta\right) \\
&\quad + \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \delta\right) \quad (24)
\end{aligned}$$

Diese Weg-Zeit-Gesetze beschreiben eine Überlagerung von zwei Bewegungen. Für große Zeiten  $t$  geht der Anteil von  $x_H$  in allen Fällen gegen Null. Die Bewegung wird dann nur noch durch  $x_S$  beschrieben; deshalb nennt man  $x_S$  auch die stationäre Lösung. Die Überlagerung beider Bewegungen für kleine  $t$  bezeichnet man als Einschwingvorgang. Obige Unterteilung bezieht sich nur auf die Art der „Eigenschwingung“ des Oszillators. Auch im Kriechfall führt das System für große  $t$  noch eine oszillierende Bewegung aus. Der Unterschied zum Schwingfall besteht darin, daß der Einschwingvorgang bereits nach weniger als einer Periode der Eigenschwingung beendet ist bzw. erst gar nicht zum Tragen kommt, wenn die Dämpfung so groß ist, daß der Einfluß der Eigenschwingung von Anfang an vernachlässigt werden kann.

Interessant ist bei diesen Schwingungen das Auftreten von Resonanzphänomenen. Dazu betrachtet man die Frequenzabhängigkeit der Amplitude  $A$  der stationären Lösung. Es war  $A = |A|e^{i\varphi}$  mit

$$|A| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \quad (25)$$

$$\tan \varphi = \frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (26)$$

Im folgenden wird der Verlauf des Betrags der Amplitude gegen die Erregerfrequenz  $\omega$  diskutiert. Dafür setzt man:

$$\frac{\partial |A(\omega)|}{\partial \omega} = 0$$

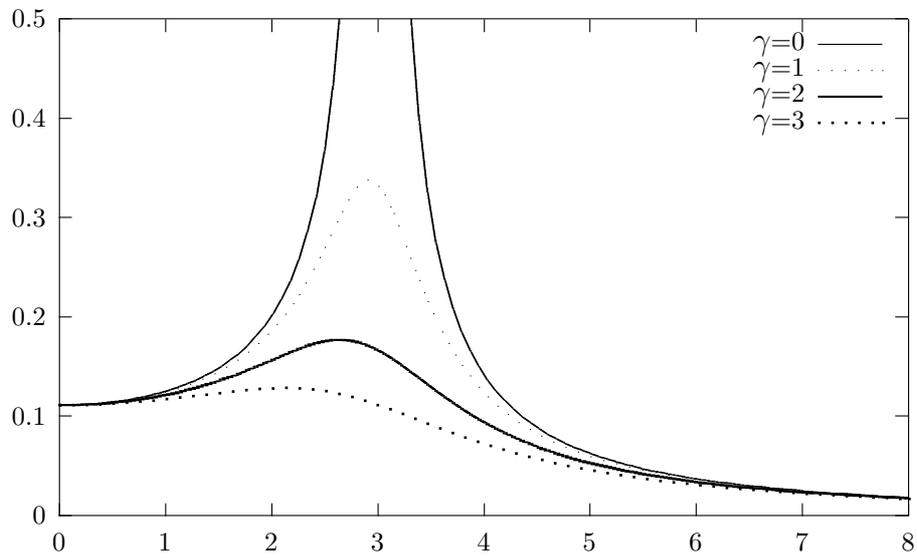
Führt man die Differentiation durch, so erkennt man, daß für  $\gamma < \sqrt{2}\omega_0$  ein Maximum existiert mit:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \quad (27)$$

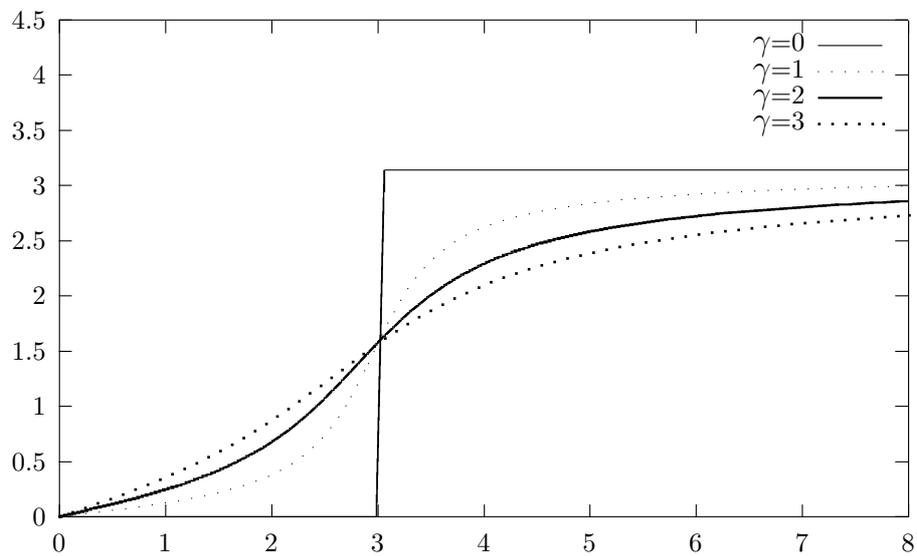
$$|A|_{\max} = \frac{F_0}{m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \quad (28)$$

$\omega = \omega_{\max}$  bezeichnet man als Resonanzbedingung. Mit kleiner werdender Dämpfung  $\gamma$  verschiebt sich die Position des Maximums zu größeren Frequenzen und der Betrag der Amplitude wird größer. Im Grenzfall  $\gamma \rightarrow 0$  wird die Amplitude sogar unendlich groß; man spricht von einer Resonanzkatastrophe. Abbildung 5 zeigt den Verlauf von  $|A(\omega)|$  für verschiedene Dämpfungskoeffizienten  $\gamma$ .

Der Verlauf der Phasenverschiebung  $-\varphi(\omega)$  zwischen Erregerschwingung und stationärer Schwingung beschreibt einen Arcustangens und wird für verschiedene Dämpfungskoeffizienten  $\gamma$  in Abbildung 6 dargestellt. Der Wert  $\frac{\pi}{2}$  stellt sich bei  $\omega = \omega_0$  ein, unabhängig von der Dämpfung  $\gamma$ , für große  $\omega$  stellt sich der Wert  $\pi$  ein.



**Abbildung 5:** Verlauf von  $|A(\omega)|$  für verschiedene Werte von  $\gamma$  für  $\omega_0 = 3$  und  $\frac{F_0}{m} = 1$ .



**Abbildung 6:** Verlauf von  $-\varphi(\omega)$  für verschiedene Werte von  $\gamma$  für  $\omega_0 = 3$  und  $\frac{F_0}{m} = 1$ .