Mitschrieb zu Theoretische Physik A: Mechanik

Prof. Dr. Ralph von Baltz, Dr. Jan Brinkmann

Vorlesung Wintersemester 2001/2002

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 21. Februar 2004
Thanx to Hjalmar Peters für die Verbesserungsvorschläge

Mitschrieb der Vorlesung Theoretische Physik A
von Herrn Prof. Dr. Baltz im Wintersemester 2001/2002
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

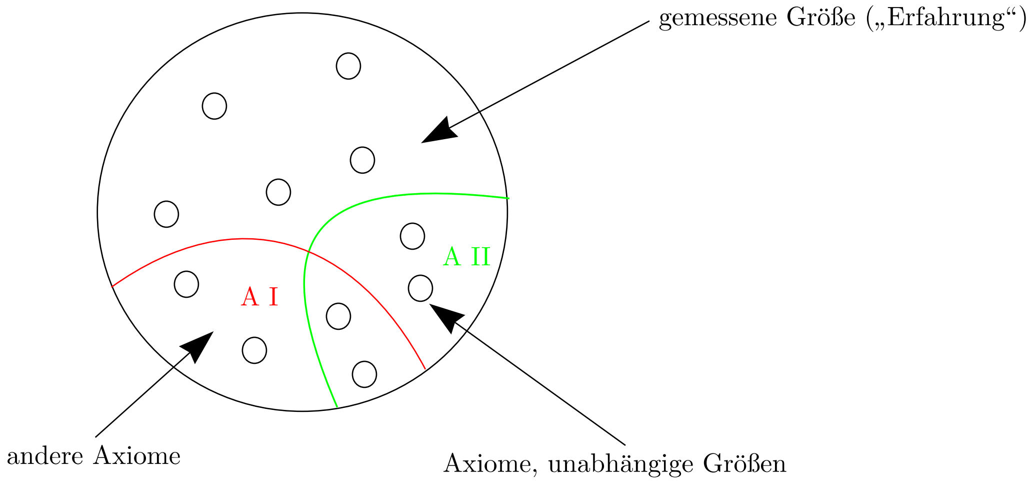
Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Zur begrifflichen Struktur der Physik

1.1.1 Theorie

- Wissens- und Erfahrungsschatz systematisiert
- Bündel von Erfahrungen zusammenfassen
  $\longrightarrow$ BEGRIFFE
  $\longrightarrow$ Kalkül, der Erfahrungen wiedergibt, Vorhersagen
- <u>Vorteil:</u>
  - enorme Datenkompression
  - Vorhersagen
  - höchstmögliche Quantifizierung
- <u>Verstehen:</u>
  - von den Grundannahmen ableitbar!
  - Grundannahmen (sind einer weiteren Erklärung nicht nötig)
  - logisches Schließen, Mathematik

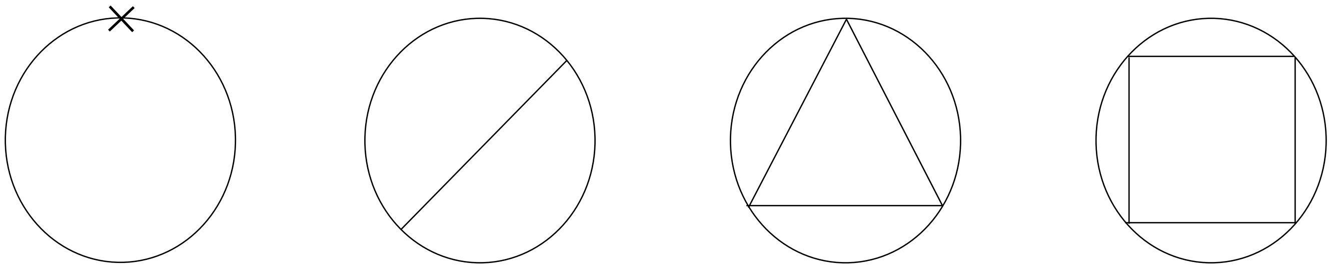


1.1.2 Beispiel zur Theorienbildung

„Massen von Elemntarteilchen“: m={1,2,3,4,5,6,8,10,12,16,17,20,24}

Theorie I:	$m \in \mathbb{N}$:
	Vorhersage: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...
Theorie II:	$m \in$ 1-6 und deren Produkte mit 2^n =1, 2, 3, 8:
	17: Kuckuksei
Theorie III:	Alle Primzahlen, die sich in der Form 2^{k+1} darstellen lassen:
	Vorhersage: (1), 2, 3, 5, ... und Produkte mit 2^n=1, 2, 4, ...

A_2 : Alle Kreisteilungen mit „Zirkel und Lineal“ in kongruente Teile



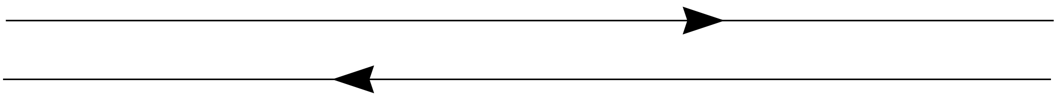
1 2 3 4

1.2 Zustand und physikalische Größen

1.2.1 Physikalische Größe

- Länge, Ort $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, $\vec{F}$
- Impuls, $\boxed{\text{Energie}}$
- Zeit
- Temperatur
- Spannung U, Strom I, Ladung Q, $\vec{E}$, $\vec{B}$, ...
- Dichte $\rho = \dfrac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$

1.2.2 Energieänderung ΔE



ΔE ist immer mit der Änderung von mindestens einer weiteren $\underbrace{\text{extensiven}}_{\text{mengenartig}}$ Größe:

$$\underbrace{\underbrace{\Delta E = v \cdot \Delta p}_{\text{Bewegung}} + \underbrace{(-\vec{F}) \cdot \Delta \vec{r}}_{\text{Verschiebung}} + \underbrace{\omega \cdot \Delta \vec{L}}_{\text{Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls, Rotation}}}_{\text{Mechanik}} +$$

$$+ \underbrace{T \cdot \Delta ? + \underbrace{(-p) \cdot \Delta V}_{\text{Druck, Volumen, Kompressionsenergie}} + ? \cdot \Delta N}_{\text{Thermodynamik}} + \underbrace{\underbrace{\Phi \Delta Q}_{\text{elektrisches Potential}}}_{\text{Elektrodynamik}}$$

Das E-Werk liefert Energie. Ladung erfüllt Erhaltungssatz.

$\Delta E = \Phi_1 \cdot \Delta Q_1 + \Phi_2 \cdot \Delta Q_2$

$\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$

$\Delta E = \underbrace{(\Phi_1 - \Phi_2)}_{U} \cdot \Delta Q_1$

Man unterscheidet zwischen:

- Extenisve Größen:

  Diese sind beispielsweise $E, \vec{p}$ und $\vec{L}$. Solche Größen sind mengenartig, haben Dichte, sind austauschbar mit anderen Systemen (bilanzierbar) und zum Teil erhalten.

- Intensive Größen:

  Hier führen wir $\vec{v}$, T, p und $\vec{F}$ als Beispiele an.

  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'$

  $E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$

Zustand: In einem Zustand ξ hat jede Größe einen Wert $\langle y \rangle$.

Variablen	E	p (Impuls)	v (Geschwindigkeit)	x	x^2	...
Zeit 1, Zustand 1	1 Joule	0,3	7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	1,5	2,25	...
Zeit 2, Zustand 2	...	...	...	...	...	...

Kapitel 2

Klassische Physik

Größen haben immer einen Wert (reelle Zahl mit unendlich vielen Dezimalen!), eventuell kennt man den nicht genau. Die Streuung des Werts einer Größe ist defniert durch:

$\Delta x := \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \geq 0.$

$\langle x \rangle$ sei dabei der Mittelwert einer Meßreihe. In der klassischen Physik ist ΔG eine Folge von Fällen einer Größe G. Die Wirklichkeit erkennen wir dann, wenn wir Atom- und Quantenphysik betreiben. Es gibt Variablen wie beispielsweise p_x, x, wofür es keine Zustande gibt, für die sowohl Δx als auch Δp_x beide („simultan“) $= 0$ sind.

- Zeit:

  Dies ist keine physikalische Größe im obigen Sinn.

- Arbeit:

  $$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

  $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ ist das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{F}$ und $\mathrm{d}\vec{r}$, wobei $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}t$ das sogenannte Differential ist.

  $$\left. W = \int\limits_{t_2}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \right\} \text{Kraft zur Zeit } t \text{ am Ort des Teilchens} \cdot \text{Geschwindigkeit des Teilchens}$$

  W ist Prozessgröße (Folge von Zuständen). x ist eine unabhängige und y eine abhängige Variable.

  $$\left. A = \int\limits_{x_2}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \right\} \text{Fläche (veränderlich, aber keine Variable im eigentlichen Sinn)}$$

2.1 Dynamik eines Systems

Folge von Zuständen, die ein System bei vorgegebenen Kräften „von alleine“ durchläuft.

Bewegungsgleichung: Newton

$$\boxed{m\vec{r}''(t) = \vec{F} \, \left(\vec{F} = m\vec{a}\right)}$$

2.2 Teilchen – Körper – Feld

Teilchen:

E, $\vec{p}$, $\vec{v}$ mit $E = E(\vec{p})$

Energie-Impuls-Transport durch Vakuum mit festem Zusammenhang von E, $\vec{p}$

$E = \frac{m_0}{2}v^2$, $p = m_0 v$, m_0 feste Masse

$$\boxed{E(p) = \frac{p^2}{2m}}$$

Dies gilt für ein nichtrelativistisches Teilchen. Für ein relativistisches Teilchen gilt:

$$E(p) = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2} \geq \underbrace{m_0c^2}_{\text{Ruheenergie}}$$

$m_0 \mathrel{\hat{=}}$ Ruhemasse

$c \mathrel{\hat{=}}$ Lichtgeschwindigkeit

Allgmein:

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}E(p)}{\mathrm{d}p} = E'(p),\ |\vec{p}| = p}$$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ Komposition von $\vec{v}$ mit festen x, y, z

$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ Komposition von $\vec{p}$ mit festen p_x, p_y, p_z

$$v_x = \underbrace{\frac{\partial E(p_x, p_y, p_z)}{\partial p_x} = E'^{p_x}(p_x, p_y, p_z)}_{\text{nach } p_x \text{ differenzierbar, } p_y, p_z = \text{const.}}$$

$\Rightarrow$ partielle Ableitung von E nach p_x mit p_y, p_z konstant.

$$E(p) = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2} \xrightarrow[p\mapsto\infty]{} c|p|$$

$$v = \frac{c^2 \cdot 2p}{2\sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2}} \cdot p$$

$$\lim_{p\mapsto 0} \frac{c^2}{\sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2}} \cdot p = \frac{1}{m} \cdot p$$

$$\lim_{p\mapsto \infty} \frac{c^2}{\sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2}} \cdot p = \frac{c^2}{cp} \cdot p = c$$

① $\cancel{p = m_0 v}$ (falsch!)

② $\boxed{p = m(v)v}$ Definition von $m(v)$

③ $\cancel{p = \ldots v}$ (wird nicht benötigt!)

④ $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ (richtig!)

2.2.1 Näherungsbetrachtung $E(p)$ für kleine p

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots \; |x| \ll 1$

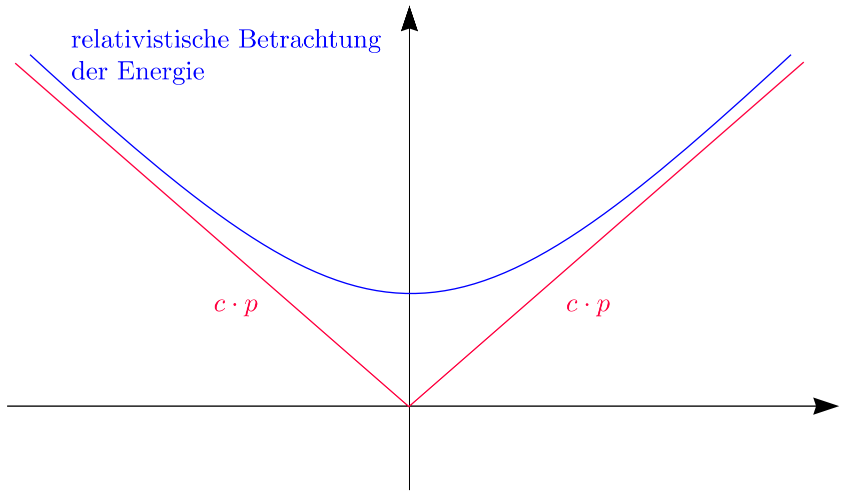
Es gilt für die geometrische Reihe:

$$1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1$$

Wir schreiben nun $q \mapsto x$, womit sich ergibt:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \text{ für } |x| < 1$$

$$\sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2} = \sqrt{(m_0c^2)^2\left[1 + \frac{c^2p^2}{m_0^2c^4}\right]} = m_0c^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2c^2}} =$$
$$= m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2c^2}\ldots\right] = \underbrace{m_0c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0} + \ldots}_{\text{nichtrelativistischer Anteil}}$$



Zusammenfassung:

Teilchen: $E, \vec{p}$ mit $E = E(\vec{p})$

- Nichtrelativistisch: $\frac{\vec{p}^2}{2m}$, $\vec{p} = m_0\vec{v}$, $\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right)$
- Relativistisch: $\boxed{E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2}}$
- Geschwindigkeit: $\boxed{v = E'(p)}$

$$v_x = E'^{\,p_x}(p_x, p_y, p_z) = \frac{\partial E(p_x, \underbrace{p_y, p_z}_{\text{const}})}{\partial p_x}$$

Körper: lokalisierbares Teilchen, hat Bahnkurve

Beispiele:

- „Schrotkügelchen", Golfball
- Elektron, ... (nur näherungsweeise Körper)

- Photon, $m_0 = 0$, $E = c \cdot |\vec{p}|$

$$\left\{ \begin{array}{c} E = h\nu \\ |\vec{p}| = \dfrac{h}{\lambda} \end{array} \right\}$$

<u>Elektromagnetische Wellen:</u> $E = c \cdot |\vec{p}|$

2.2.2 Felder

Physikalische Größen sind räumlich verteilt (Massen-, Energie-,Impuls<u>dichte</u>) wie beispielsweise elektromagnetisches Feld oder Schall in der Luft.

<u>Erhaltung/Stoßprozesse:</u>

$E_{\text{el}}^{(a)} + E_{\text{ph}}^{(a)} = E_{\text{el}}^{(e)} + E_{\text{ph}}^{(e)}$ (1 Gleichung)

$\vec{p}_{\text{el}}^{(a)} + \vec{p}_{\text{ph}}^{(a)} = \vec{p}_{\text{el}}^{(e)} + \vec{p}_{\text{ph}}^{(e)}$ (3 Gleichungen)

$\Rightarrow$ COMPTON-EFFEKT

2.3 Differential-Schreibweise

$y = f(x) \Big\}$ $\qquad y \mathrel{\hat{=}}$ Variable, $f \mathrel{\hat{=}}$ Funktion

$y = y(x)$

Die Ableitung wird dann als Grenzwert des Differentialquotienten definiert:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \mapsto 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \mapsto 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}} \qquad \mathrm{d}f \text{ nach } \mathrm{d}x$$

$\mathrm{d}x \neq \lim\limits_{\Delta x \mapsto 0} \Delta x$

$\mathrm{d}f \neq \lim\limits_{\Delta x \mapsto 0} \Delta f$

$\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}x$ sind jedoch keine infinitesimal kleine Größen. Wir approximieren die Funktion durch eine Tangente:

$$\underbrace{y - y_0}_{\mathrm{d}y} = f'(x_0) \underbrace{(x - x_0)}_{\mathrm{d}x (=\Delta x)}$$

$\mathrm{d}y := f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x_0)$, $x_0 \mapsto x$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)}$$

x, y sei laufender Punkt auf der Tangente.

Beispiel:

- Kettenregel:

  $f(u(x)) \mapsto f'(u(x)) = f'(u) \cdot u'(x)$

- Mehrere Variable:

$$f(x_1, x_2), \quad \frac{\partial f(x_y, x_2)}{\partial x_1} \text{ mit } x_2 = \text{const.}$$
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \text{ mit } x_1 = \text{const.}$$

$\frac{\partial f(\ldots)}{\partial x}$ partielle Ableitung

- Subsitutionsregel bei Integralen:

$$\int \underbrace{f(u(x))}_{\substack{u=u(x)\\ \text{oder}\\ x=x(u)\\ \text{Umkehrfunktion}}} \mathrm{d}x = \int f(u) \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}(x(u)}{\mathrm{d}u}}_{\frac{1}{\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}}} \cdot \mathrm{d}u$$

Und x wird durch u eliminiert!

2.4 Potenzreihenentwicklung einer gegebenen Funktion $f(x)$

Reihe: $\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{S_n} + \ldots \to S$ Konvergenz: S_n konvergiert zu S?
$|S_n - S| < \epsilon \; \forall \; n > n_0(\epsilon)$ (ϵ beliebig (klein) vorgegeben)
Die geomtrische Reihe lautet beispielsweise:

$$1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1$$

Für $q \mapsto x$ gilt:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots}$$

Eine Potenzreihe ist außerdem eine Reihe der Form $a_n = b_n \cdot x^n$, wobei b_n unabhänig von x ist.

Definition:

Wie entwickelt man für beliebige Funktionen $f(x)$ Potenzreihen?

2.5 Taylor-Reihe

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Beispiel:

$$f(x) = e^x, f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$$

$$\boxed{e^x = \underbrace{1 + \frac{1}{1}x}_{\text{Tangentennäherung}} + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!}}$$

Die Reihe kovergiert (für $|x| < 1$) besser als geometrische Reihe.

2.5.1 Naive Kovergenzbetrachtung

Vergleiche mit geometrischer Reihe: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ mit $|q| < 1$

$\frac{x^n}{n!} \triangleq q^n$

x		x		x		x	x			x
1	$\cdot$	2	$\cdot$	3		$[x]$	$([x]+1)$			n

$\xrightarrow[n\mapsto\infty]{\text{mit}} 0$

<u>Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder:</u>

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = x \cdot \frac{1}{n+1} < 1 \text{ konvergiert}$$

Betrachten wir die Taylor-Reihe einer Funktion $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$f(x_0) - f(a) = \int\limits_a^{x_0} f'(x)1 \, \mathrm{d}x, x_0 \geq a, \text{ fest(aber beliebig)}$$

Wir führen eine partielle Integration durch:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u'v\,\mathrm{d}x}$$

$[u(x) \cdot v(x)]' = uv' + u'v$

Außerdem gilt ja:

$$\boxed{\int [uv]'\,\mathrm{d}x = uv}$$

$u(x) = f'(x)$

$v'(x) := 1 \Rightarrow v(x) = x + \text{const.} \qquad (\text{const.} = -x_0)$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(a) + \int\limits_a^{x_0} f'(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x = f(a) + [f'(x)(x-x_0)]_{x=a}^{x=x_0} - \int\limits_a^{x_0} f''(x)\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \\ &= f(a) + f'(x_0)(x_0-x_0) - f'(a)(a-x_0) - \int\limits_a^{x_0} f''(x)\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \\ &= f(a) + f'(a)(x_0-a) - \int\limits_a^{x_0} f''(x)(x-x_0)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Wir integrieren nochmals partiell:

$$f(x_0) = f(a) + f'(a)\frac{x_0-a}{1} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x_0-a)^n}{n!} + R_{n+1}(a,x_0)$$

$$R_{n+1}(a,x_0) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int\limits_a^{x_0} f^{(n+1)}(x)\cdot(x-x_0)^n\,\mathrm{d}x$$

$a \to 0, x_0 \to x$ im Endergebnis

- $R_{n+1}(a,a) = 0 \qquad x_0 = a \forall n$
- $R_{n+1}(a,x_0) \mapsto 0$ mit $n \mapsto \infty$ $(x_0 \neq a)$
  Für $|x_0 - a| < r$ hat die Reihe hat den „Konvergenzradius“ r.
- $R_{n+1} \not\to 0$ für $n \to \infty$ für alle $x_0 \neq a$

Beispiel:

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0} \cdot x + \ldots = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \qquad (r = 1, |x| < 1)$$

$$x = 1 : \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

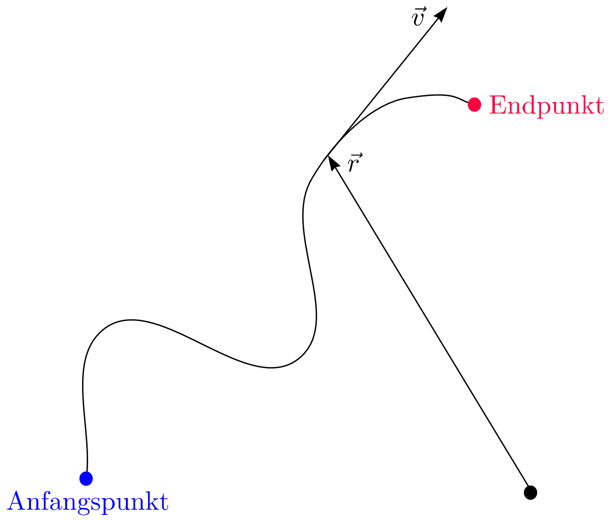
$$x = -1 : \ln(0) = -\infty = -\underbrace{\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right\}}_{\text{konvergiert NICHT!}} \text{ harmonische Reihe}$$

$$\ln(4) = 2\ln(2)$$

$$\ln(5) = \ln(2+3) = \ln\left(4 \cdot \frac{5}{4}\right) = 2\ln(2) + \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

2.6 Kinematik

Es sei einen Bahnkurve C und ein Punkt im Raum $P(x, y, z)$ vorgegeben.



$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \text{Es handelt sich dabei um Funktionen der Zeit.}$$

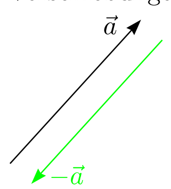
In der Mathematik nennt man t den Kurvenparamter.

Geschwindigkeit: $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \vec{v}(t)$

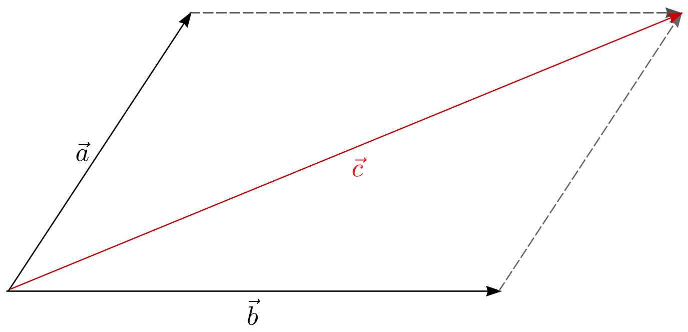
Position: $\vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}(t)$

2.7 Mathematischer Einschub: Vektoren

- gerichtete Größe, Betrag+Richtung: $\vec{r}$
  Ortsvektor (Anfang festgelegt)
- Verschiebungen:



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (kommutativ)



- Mathematik: Vektorraum
- Physik: $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ + Invarianz gegen Drehungen

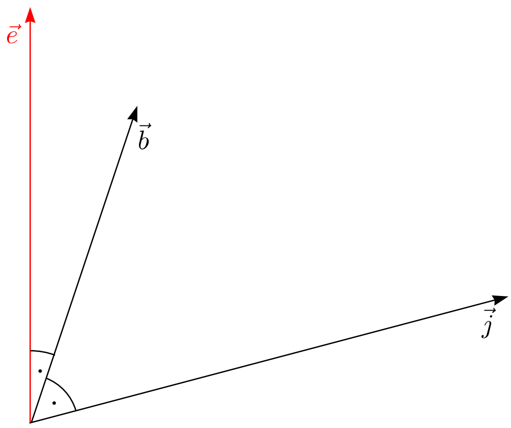
2.7.1 Skalarprodukt

$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

$|\vec{a}|$ = Länge von $\vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2$

2.7.2 Vektorprodukt



$\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e} \perp$ auf $\vec{a}, \vec{b}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| =$ Flächeninhalt des Parallelogramms $\vec{a}, \vec{b}$

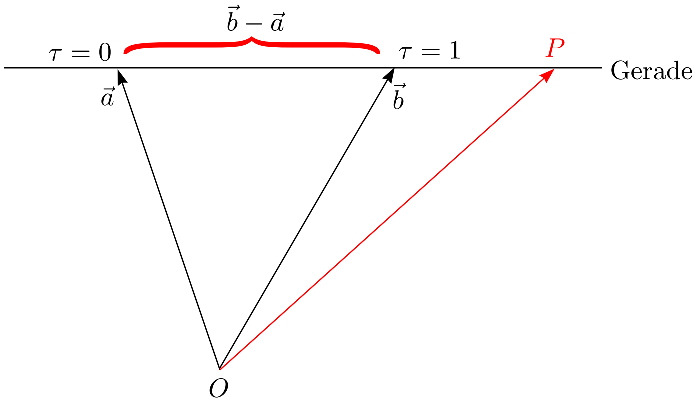
2.7.3 Komponenten

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z \quad , \vec{e}_i$ Einheitsvektor in $x, y, t \perp$ aufeinander

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad$ (Orthonormal-Basis)

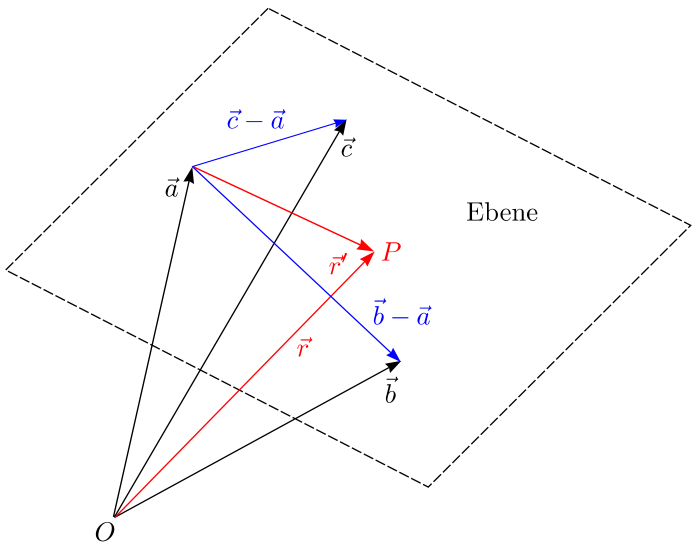
$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad$ (zyklisch vertauscht)

Gerade durch 2 Punkte $\vec{a}, \vec{b}$:



$\vec{r} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \tau$

Ebene durch 3 Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:



$\vec{r} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})\mu + (\vec{c} - \vec{a})\lambda$

μ, λ sind die sogenannten Schar-Paramter.

$\vec{r} \cdot \vec{n} = c$

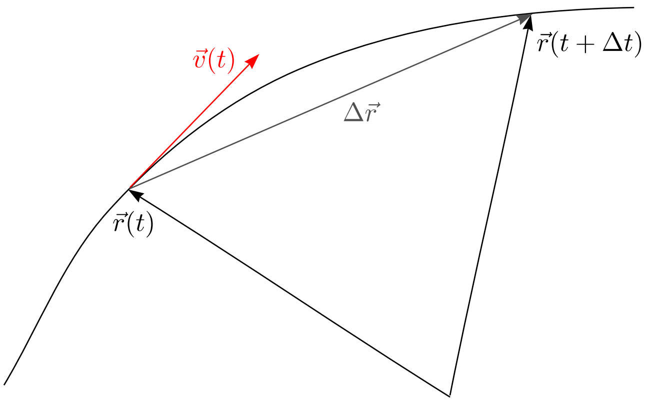
$(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{n} = 0$

$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \beta$

$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ ist das Volumen des Spats, welcher von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

$(\underbrace{\vec{r} - \vec{a}}_{\vec{r}'}) \cdot \Big[(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})\Big] = 0$

Geschwindigkeit:



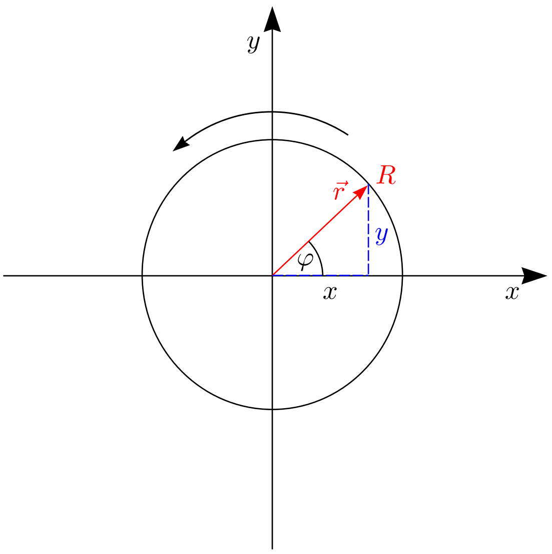
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

Beispiel: Kreisbewegung



$$\varphi = \omega \cdot t, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$T \mathrel{\hat{=}}$ Umlaufszeit, $\omega \mathrel{\hat{=}}$ Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -R^2\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) + r^2\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$$

$\Rightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$

$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$

Spirale:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ v_0 \cdot t \end{pmatrix}$$

Ganghöhe=const.

EnergieÄnderungen:

$$\Delta E = \underbrace{v \cdot \Delta p}_{\text{Bew.-Energie-Änd.}} + \underbrace{(-F)\Delta x}_{\text{Lage-Energie-Änd. (Arbeit)}} + \dots$$

Für ein Teilchen (Körper), 1 Dimension:

Vorsicht:

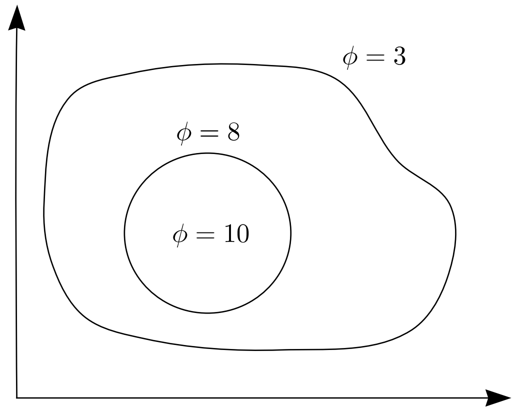
- kinetische Energie: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$
- v, F keine Konstanten, sondern im allgemeinen Funktionen von p, x

  $v = v(p,x), F = F(p,x)$

  $(p \neq mv)$

2.8 Veranschaulichung von Feldern

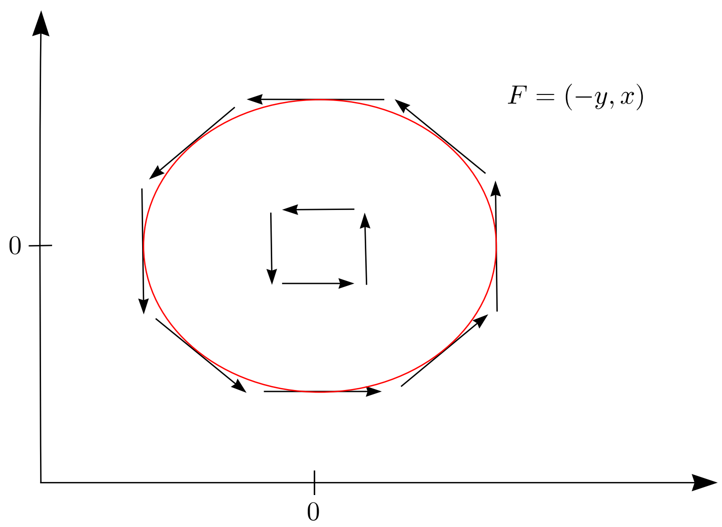
2.8.1 Skalarfeld



Einem Punkt $\vec{r} = (x,y,z)$ wird eine Zahl $\phi = \phi(\vec{r})$ zugeordnet. Die Linien, auf denen ϕ konstant ist, nennt man Iso-ϕ-Linien (Äquipotentialflächen).

2.8.2 Vektorfeld

Jedem Punkt $\vec{r} = (x,y,z)$ wird ein Vektor $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ zugeordnet.



$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \parallel \vec{F}$ auf der Feldlinie

Arbeit:

$W_{12} = \int\limits_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ längs Kurve $\mathcal{C}$ von $\vec{r_1} \to \vec{r_2}$

$\vec{F} = (-y, x)$ (Wirbel)

Längs Feldlinien im Gegenuhrzeiger-Sinn: $W > 0$

$W_{12} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{F}(\vec{r}(\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \cdot \mathrm{d}\tau$

Die Kurve wird beschrieben durch $\vec{r} = \vec{r}(\tau)$. Radial ($\mathcal{C}_2$):

$W = 0$ und $\vec{F} \perp \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\vec{\tau}}$

a.) Beitrag zu $W_a = 0$

b.) Beitrag zu $W_b > 0$

$\vec{r_1} = \vec{r_2}$: keine Verschiebung $W = 0$ (trivial)

$\vec{r_1} = \vec{r_2}$: voller Umlauf $W > 0$

$W_{12} = \int\limits_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$ ist im allgemeinen $\neq$ Funktion)$(\vec{r_1})$ – Funktion)$(\vec{r_2})$

Die Arbeit ist auch mit geeignet gewählter Funktion f abhängig vom <u>Weg</u>, der die Punkte $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ miteinander verbindet. Sie ist eine Prozess-Größe im Gegensatz zur Energie, welche eine Zustandsgröße darstellt. Wir stellen uns deshalb nun die Frage:

Für welche Kraft-Felder ist $W = \int\limits_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = -[\Phi(\vec{r_2}) - \Phi(\vec{r_1}]$ unabhängig vom Weg, der $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ verbindet?

$\Phi(\vec{r})$ entspricht dabei der potentiellen Energie. In einer Dimension gibt es kein Problem mit Wegabhängigkeit:

$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$ normales Integral

Aber in zwei Dimensionen ist $\int \vec{F}(x(\tau), y(\tau)) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right) \mathrm{d}\tau$ verschiedener Integrand für verschiedene Wege.

2.9 Mathematischer Einschub: Vollständiges Differential, Gradient

$f(x,y)$ sei eine Funktion von 2 (und mehr) unabhängigen Variablen. Dabei gilt nun:

- Partielle Ableitungen: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$(mit $y = \text{const.}$)
- Operator-Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{\text{Diff.Op.}} f(x,y)$

$f(x,y)$ mit $x = x(\tau), y = y(\tau)$

Die Funktion $f(x,y)$ liegt somit auf der Kurve $\mathcal{C}$.

$\Phi(t) := f(x(t), y(t))$

$\dot{\Phi}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)$

Beispiel: $f(x,y) = xy$

$\Phi(t) = x(t)y(t)$

Wir leiten $\Phi(t)$ nach der Variable t ab:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \left.\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)}_{\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}}$$

2.9.1 Der Gradient

Der Gradient ist ein Vektor der folgendermaßen definiert ist:

$$\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

Der Gradient hat die Eigenschaft, daß er senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht.

- In 3 Dimensionen: Äquipotentialflächen: $\Phi(x,y,z) = \text{const.}$
- In 2 Dimensionen: Äquipotentiallinien: $\Phi(x,y) = \text{const.}$

Linie auf der Äquipotentialfläche

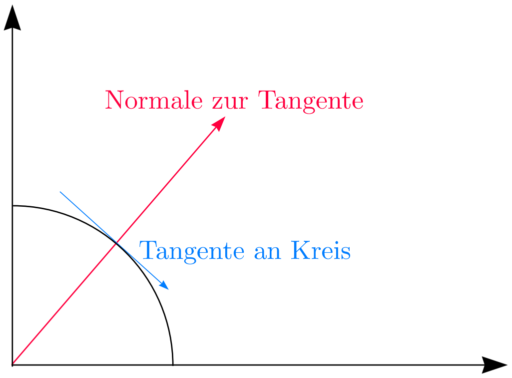
$\Phi(x,y,z) = \text{const.}$

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(x(t), y(t), z(t)) = 0$

$\operatorname{grad} f(x,y,z)|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$

Beispiel:



Kreis: $\underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y)} = R^2$

$\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, 2y) = 2\vec{r}$

2.9.2 Totales (vollständiges) Differential

(Im Gegensatz zur partiellen Ableitung)

$$\mathrm{d}f := \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y$$

$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$

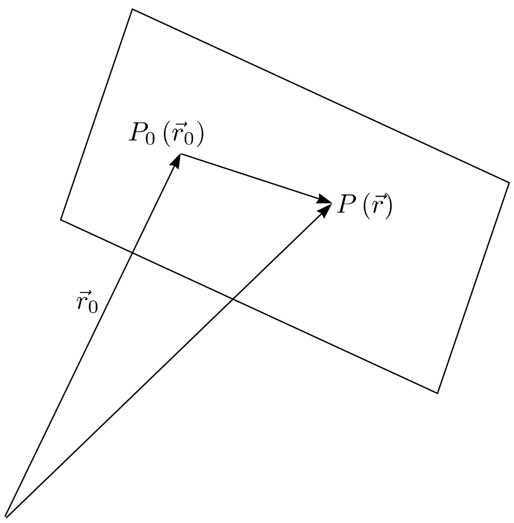
Differential: $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$

Tangente: $\underbrace{y - y_0}_{\mathrm{d}y} = f'(x_0) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\mathrm{d}x}$

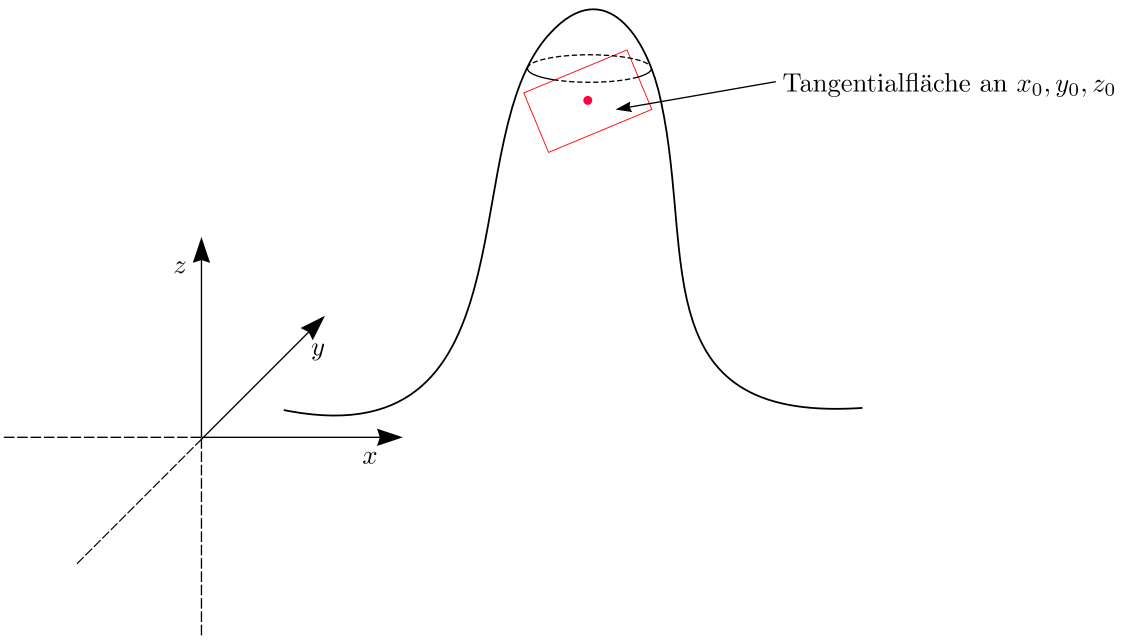
2 unabhängige Variable x, y

$f(x, y, z) = \text{const.}$ Fläche: $z = z(x, y)$

$P_0(x_0, y_0) \mathrel{\hat{=}}$ Tangentialfläche



Tangentialfläche im Punkt (x_0, y_0, z_0)



$\vec{r} - \vec{r_0}$ steht senkrecht zur Normalen der Ebene (Normale der Fläche im Punkt $\vec{r_0}$). $z = \tilde{f}(x, y)$ erhält man durch Auflosen von $f(x, y, z)$ =const.

$F(x, y, z) = \tilde{f}(x, y) - z = 0$

Normale: $\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \operatorname{grad} F = 0 \rightarrow \underbrace{(x - x_0)}_{\mathrm{d}x} \cdot \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right|_0 + \underbrace{(y - y_0)}_{\mathrm{d}y} \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right|_0 + (-1) \cdot \underbrace{(z - z_0)}_{\mathrm{d}f, \mathrm{d}z} = 0$$

2.9.3 Vollständiges Differential einer Funktion $f(x, y)$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial x, y}{\partial y} \mathrm{d}y$$

Auf $C : \vec{r} = \vec{r}(t) : \Phi(t) = f(\vec{r}(t)) \equiv f(x(t), y(t))$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}} \cdot \dot{x}(t) + \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}} \dot{y}(t) = \operatorname{grad} f(x, y) \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Arbeit:

$$\int_1^2 \vec{F}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{F}(\vec{r}) \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}}_{\text{Funktion}(t) = \dot{\Phi}(t)} \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \Phi(t_2) - \Phi(t_1) \qquad \text{Im allgemeinen hängt } \Phi(t) \text{ von Weg } \mathcal{C} \text{ ab!}$$
$$= f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$$

Unter welchen Bedingungen an $\vec{F}(\vec{r})$ hängt W nicht von $\mathcal{C}$ ab?

Resultat:

$\vec{F} = \operatorname{grad} f(\vec{r})$

$\left[\text{Physik: } \vec{F} = -\operatorname{grad} V\right]$

Definition: $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \dots\right)$

Plausibilitätsbetrachtung:

$\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{grad} f$ siehe Einschub

$W = \int \dot{\Phi}(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$

$\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$

$\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{grad} f(\vec{r})$

Wenn dies für alle Wege $\mathcal{C}$ $(1 \mapsto 2)$ gilt, ist dann die hinreichende Forderung auch notwendig? Für benachbarte Punkte $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$ gilt:

$\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int F_x(x,y)\cdot\mathrm{d}x + F_y(x,y)\cdot\mathrm{d}y = F_x(x_1,y_1)\cdot\Delta x + F_y(x_1,y_1)\cdot\Delta y +$ quadratische Anteile in $\Delta x, \Delta y$ etc.

$f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1) \mathrel{\hat{=}} \mathrm{d}f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y +$ quadratische Anteile in $\Delta x, \Delta y$ etc.

Gleichheit für ALLE Kurven $1 \mapsto 2,$ aber $\Delta x, \Delta y$ unabhänig!

$F_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad F_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Das heißt nun:

$\boxed{\vec{F} = \operatorname{grad} f(x,y)}$

Zusammenfassung:

Gegeben sei $\vec{F}(\vec{r})$. Wann gibt es ein $f(\vec{r})$ mit $\vec{F} = \operatorname{grad} f(\vec{r})$ $[\vec{F} = -\operatorname{grad} V]$?

- Eindimensionaler Fall: $F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$

  $V(x) = -\int^{x} F(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$

- Zweidimensionaler Fall: $F_x(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}, F_y(x,y) = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

V existiert nur dann, wenn:

$\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y \partial x}$

$\boxed{\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}}$

Im dreidimensionalen Fall muß diese Bedingung für alle Paare (x,y), (y,z), (x,z) gelten. Dies schreibt man auch als:

rot $F(x,y,z) = \vec{o}$ mit dem Vektoroperator rot $= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times F.$

Beispiele:

* $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

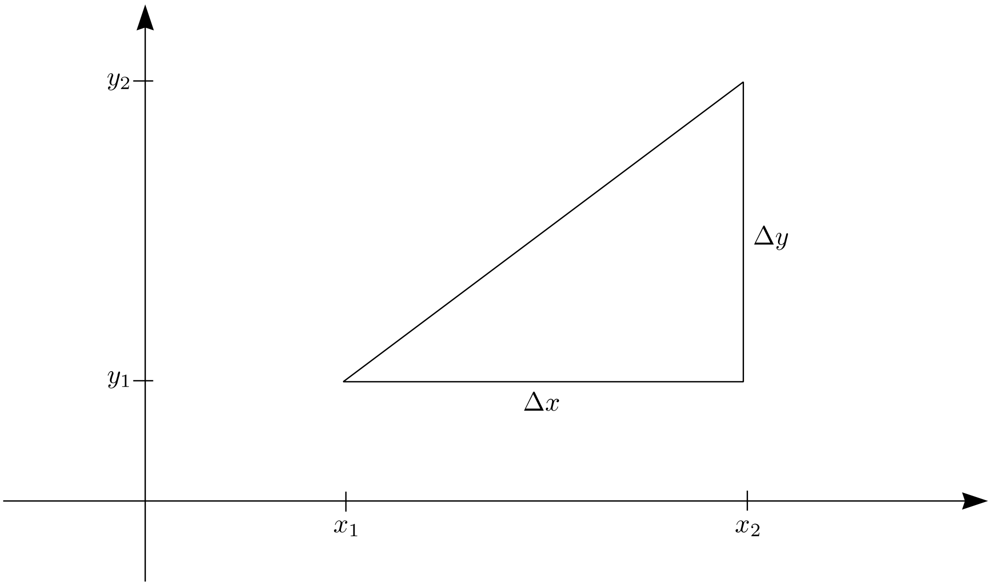
  $$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

* $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

  $$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} = +1$$

Außerdem gilt für eine Funktion F, die ein Potential Φ besitzt, daß das Wegintegral (Ringintagral) $\oint \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$ ist für alle geschlossenen Wege.

2.10 Newton'sche Dynamik von N Punktteilchen



$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{m_j\vec{v}_j(t)}_{\text{Impuls}}}_{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t}(m_j\vec{r}_j(t))=\vec{F}_j} = \vec{F}_j(\vec{r}_1,\vec{v}_1,\vec{r}_2,\vec{v}_2,\dots,\vec{r}_N,\vec{v}_N)$$

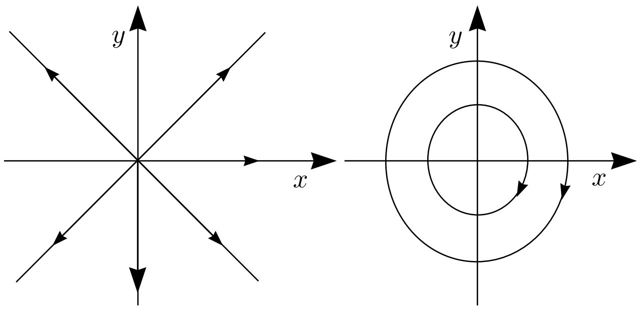
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \text{Impuls=Kraft}}$$

Nebenbemerkung: Kraft=Impulsstrom

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \mathrel{\hat{=}} \text{elektrischer Strom}$$

Newton-Gleichung $\mathrel{\hat{=}}$ Differentialgleichung für $\vec{r}_j = \vec{r}_i(t)$

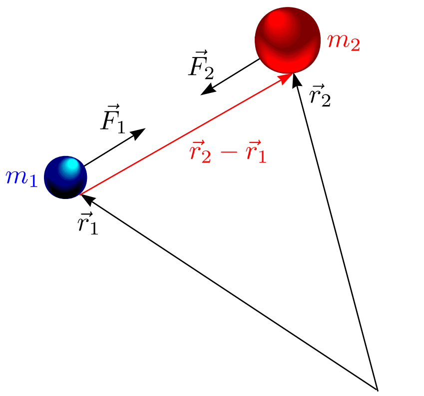
Beispiel zu Kräften:



- $\vec{F} = -Dx$

  Die Feder sei bei $x = 0$ entspannt.

- Gravitation

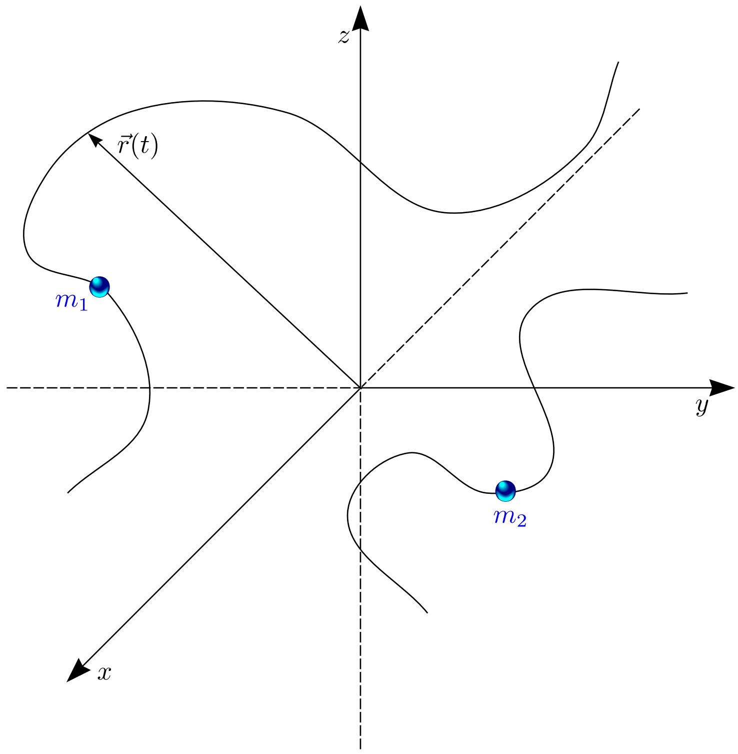


$$\vec{F}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}_{\text{Richtung}}$$

$$\vec{F}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{F}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$\boxed{\text{„actio=reactio“}}$

2.11 Probleme mit traditionaller Fassung der Newton'schen Axiome



- $F = 0$

  Der Körper ist in Ruhe, oder bewegt sich längs einer Gerade mit konstanter Geschwindigkeit.

- Körper bewegt sich ($\neq$ Gerade, $\vec{v} \neq$ const.)

  $\Rightarrow \vec{F} \neq 0$

  $\Rightarrow$ In einem beschleunigtes Bezugssystem (Karussel) nehmen die Kräfte mit steigendem Abstand zu.

Kräfte unterteilt man in innere Kräfte und äußere Kräfte. Äußere Kräfte aus Teilchen j sind unabhänig von $\vec{r}, \vec{v}$ der anderen Teilchen.

2.11.1 Impulssatz

Wenn keine äußeren Kräfte bestehen, dann gilt:

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_j \vec{v}_j) = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)}_{\vec{F}_j = \sum_k \vec{f}k_j} = \sum_k \vec{f}_{kj} = 0$$

2.12 Grundannahmen, Bewegungsgleichungen

Körper, Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$

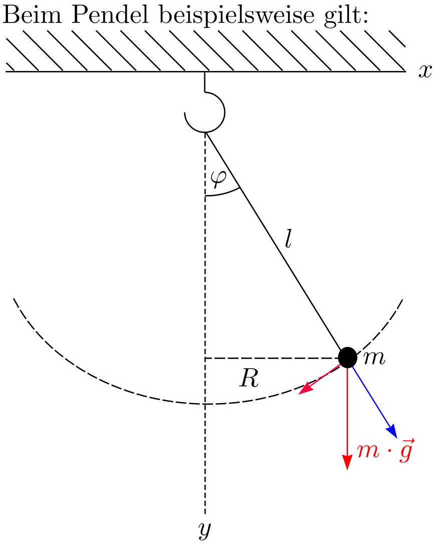
2.12.1 Die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}}$$

Dies gilt für jeden Körper.

- Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$
- Kraft: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{v}_1; \vec{r}_2, \vec{v}_2, \ldots)$

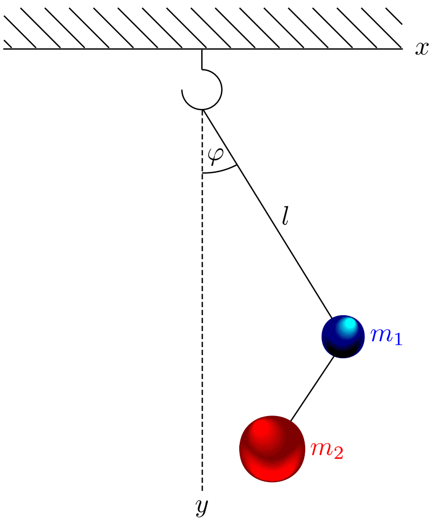
Beim Pendel beispielsweise gilt:



x, y sind nicht unabhängig voneinander. Zwischen ihnen besteht die Zwangsbedingung nach dem Satz des Pythagoras $x^2 + y^2 = l^2 = \text{const}$. Die Bewegungsgleichung lautet:

$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l} \sin\varphi$



Wie lautet hier die Bewegungsgleichung? Mehr dazu in Theorie B.

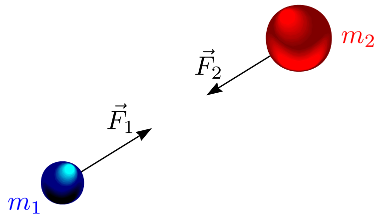
2.13 Newton-Axiome (historisch)

① $\vec{F} = 0, \vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$ mit $\vec{v}_0, \vec{r}_0$ =const.

② $\vec{F} \neq 0 : \dot{p} = \vec{F}$

③ „actio=reactio“

2.13.1 Impulserhaltung



$\dot{p}_1 = \vec{F}_1$

$\dot{p}_2 = \vec{F}_2$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \overset{!}{=} 0$

2.13.2 Energieerhaltung

Für ein Teilchen in einer Dimension gilt:

$\Delta E = v \cdot \Delta p + (-F) \cdot \Delta x + \ldots$

$\frac{\Delta E}{\Delta t} = v \cdot \underbrace{\frac{\Delta p}{\Delta t}}_{F} - F \cdot \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{v} \overset{!}{=} 0$

Sind die Änderungen unabhängig davon, wie sie vollzogen werden („wegunabhängig“)?

$\Delta E = E(r_2, p_2) - E(r_1, p_1)?$

- Eindimensional:

  $$E(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(x), \text{ wenn } F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

- Dreidimensional:

  $$E(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}),\ \vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad} V(\vec{r})$$

- N-Teilchensystem:

  $$E(\vec{r}_1, \vec{p}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_2, ...) = \sum_{g=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m_j} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n)$$

  Die x-Komponente der Kraft auf das j-te Teilchen F_{xj} berechnet sich nach $-\frac{\partial V(r_j, \ldots)}{\partial x_j}$. Kräfte, die ein Potential haben, nennt man auch konservativ.

Für zwei Teilchen, die über eine Feder miteinander verbunden sind, gilt beispielsweise:

$F_1 = +D \cdot (x_2 - x_1 - a)$

$F_2 = -D \cdot (x_2 - x_1 - a)$

$V(x_1, x_2) = \frac{D}{2}(x_2 - x_1 - a)^2$

2.14 Ein Teilchen im konstanten Kraftfeld

Das Schwerefeld der Erde nahe der Oberfläche wird durch folgenden Kraftvektor beschrieben:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Bewegungen in x, y, z sind unabhängig.

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_x(t) = 0 \to v_x(t) = \text{const.} = v_{x0}$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y(t) = 0 \to v_y(t) = \text{const.}$$

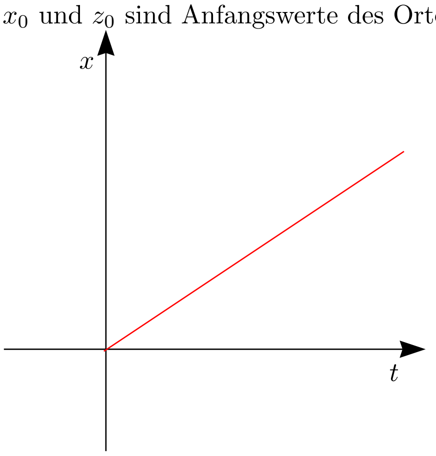
$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_z(t) = -mg \to v_z(t) = -gt + \text{const.} = -gt + v_{z0}$$

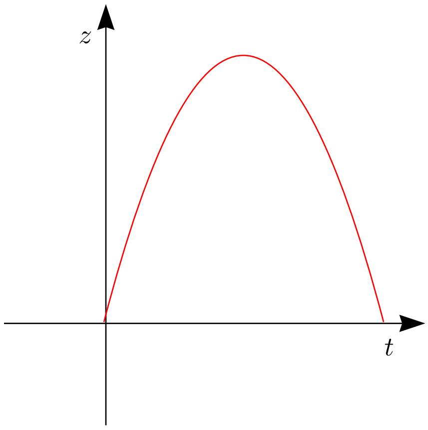
v_{x_0}, v_{y_0} und v_{z_0} sind die Anfangswerte der Geschwindigkeiten.

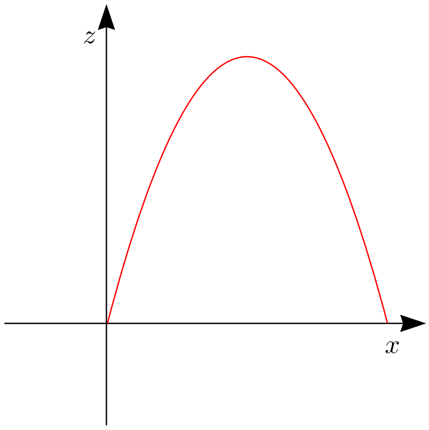
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = v_x(t) \to x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

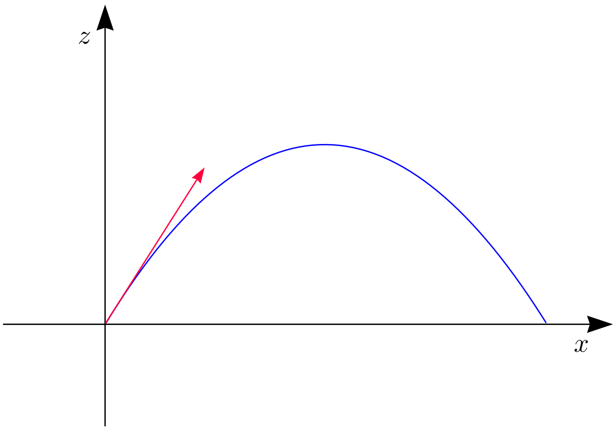
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(z) = -gt + v_{z0} \to z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0$$

x_0 und z_0 sind Anfangswerte des Ortes.









Für $z_0 = 0$ gilt:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{z_0}t = -\frac{g}{2}\left(t - \underbrace{\frac{v_{z_0}}{g}}_{\text{Steigzeit}}\right)^2 + \underbrace{\frac{v_{z_0^2}}{2g}}_{\text{Steighöhe}}$$

2.15 Reibungskräfte

$$\vec{F} = \begin{cases} -m\cdot\gamma\cdot\vec{v} & \text{für kleine } v \\ -m\cdot\delta\cdot v\cdot\vec{v} & \text{für große } v \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = -mg\vec{e}_z - m\gamma\cdot\vec{v}(t)$$

- x-Komponente: $\dot{v}_x(t) + \gamma v_x(t) = 0$
- z-Komponente: $\dot{v}_z(t) + \gamma v_z(t) = -g$

1.Gleichung: $\frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} = -\gamma v_x(t)$ analog: $f'(x) = -\gamma f(x)$

$v_x(t) = \text{const.}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma t} \Rightarrow f(x) = C\cdot\mathrm{e}^{-\gamma x}$

$$\boxed{v_x(t) = v_{x0}\cdot\mathrm{e}^{-\gamma t}}$$

$\frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma\cdot v_z(t) = -g:$

$$v_z(t) = \text{const}_1\mathrm{e}^{-\gamma t} + \underbrace{\text{const}_2}_{-\frac{g}{\gamma}}$$

$$v_z(0) = v_{z_0} = \text{const}_1 - \frac{g}{\gamma} \rightarrow \text{const}_1 = v_{z_0} + \frac{g}{\gamma}$$

$$\boxed{v_z(t) = -\frac{g}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma t}) + v_{z_0}\cdot\mathrm{e}^{-\gamma t} v_x(t) = v_{x_0}\cdot\mathrm{e}^{-\gamma t}}$$

- Ohne Reibung:

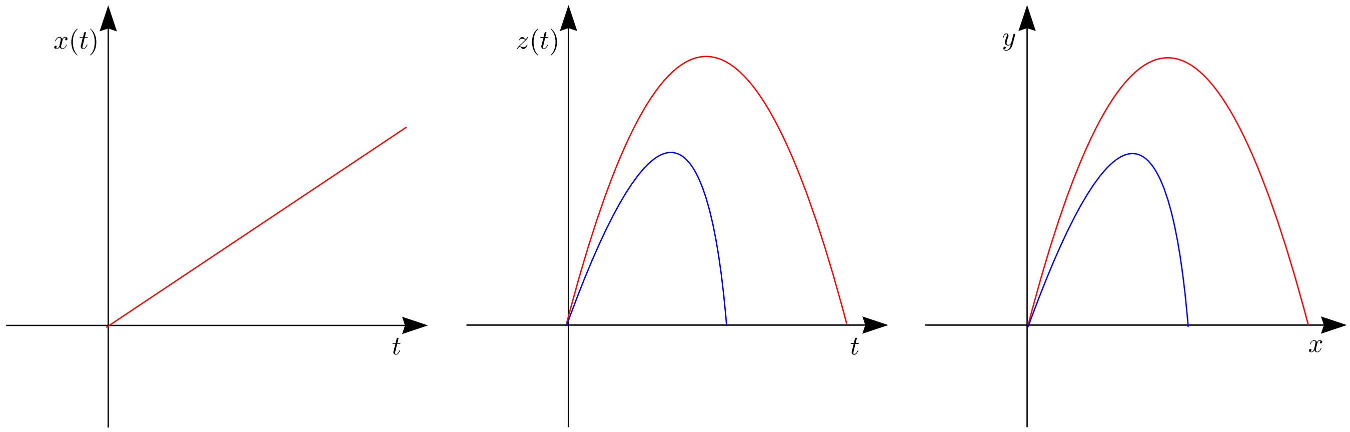
  $v_z(t) = -gt + v_{z_0}$

- Mit Reibung:

  $v_z(t) = -\frac{g}{\gamma}\left(1-\mathrm{e}^{-\gamma t}\right) + v_{z_0}\mathrm{e}^{-\gamma t}$

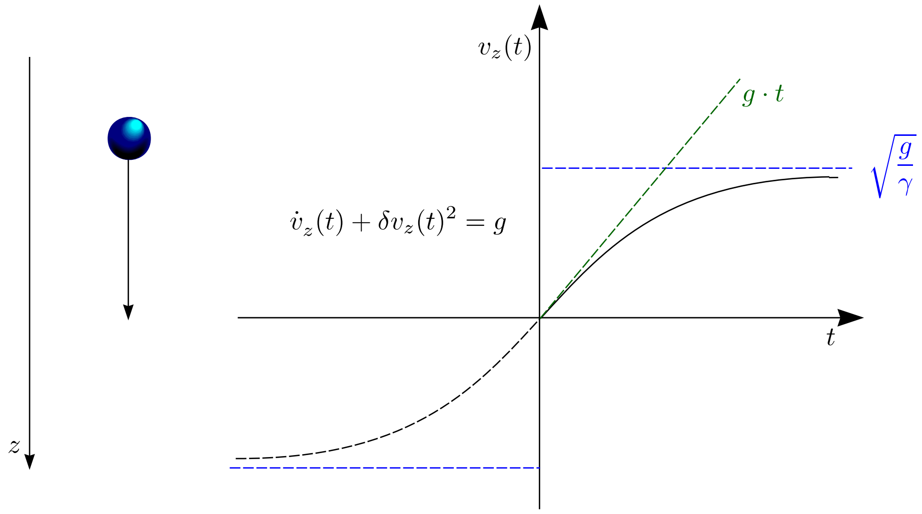
Die Taylor-Reihe lautet:

$$\mathrm{e}^{-\gamma t} = 1 - \gamma t + \frac{\gamma^2}{2}t^2 + \ldots$$



2.16 Quadratische Reihe, Kraft

2.16.1 Senkrechter Fall



$\dot{v}_z(t) + \delta v_z^2(t) = g$

$v \mapsto -v$

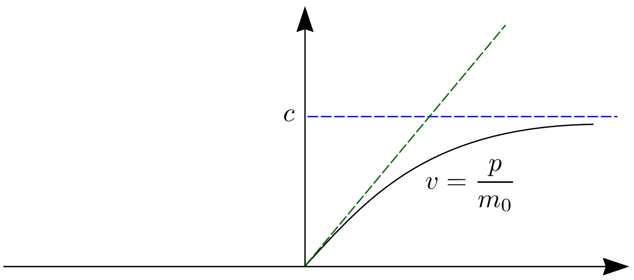
$t \mapsto -t$

$v(-t) = -v(t)!$

Es besteht eine mathematische Symmetrie, doch dies ist physikalisch natürlich falsch.

1.) $\dot{v}(t) + \gamma v(t) = g$

2.) $\dot{v}(t) + \delta v^2(t) = g$



$v(t) = b \cdot \tanh(at)$

2.17 Mathematischer Einschub: Differentialgleichungen

<u>Definition:</u>

$F(y, y', ...y^{(n)}, x) = 0$, x ist unabhängige Variable, $y(x)$ ist abhängige Variable. Dies ist eine Differentialgleichung n-ter Ordnung. Die explizite Form lautet:

$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

1.) Es exisitert eine eindeutige Lösung für die Vorgabe $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0)$, x_0, sofern F, f nicht singulär sind.

2.) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung hat n unabhängige Konstanten.

$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$,

C_j erhält man durch Vorgabe von $y(x_0)$, $y'(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$, wie wir beispielsweise vorher mit den Anfangsbedingungen für die $v(t)$ für einen Fall mit Reibung erhalten haben:

$$v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma}$$

2.17.1 Lineare Differentialgleichung (linear in $y, y', \ldots$)

$$\hat{L}y = A_n(x)y^{(n)}(x) + A_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = f(x)$$

$A_j(x)$ ist eine willkürliche Funktion von x, ebenso $f(x)$. $\hat{L}$ wird als linearer Differentialoperator bezeichnet. Die Lösung ist von der Form $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$.

1.) $y_p(x)$ ist partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

2.) $y_h(x)$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

$$\hat{L}y_h(x) = 0 \text{ mit } y_h(x) := y_h(x, C_1, \ldots, C_n)$$

2.17.2 Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$A_j(x) = \text{const.}$ und $f(x)$ ist beliebig.

$$a_n y^{(x)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + A_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x)$$

Die homogene Differentialgleichung hat die Lösung:

$$\boxed{y_h(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}}$$

$$\left[\underbrace{A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + A_1\lambda + A_0}_{\text{Polynom vom Grad } n \text{ Nullstelle: } \lambda_i}\right] \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

Es gibt n verschiedene Lösungen $y_h(x) = \sum_{f=1}^{n} C_n e^{\lambda_n x}$, wobei die C_j beliebige Konstanten sind. Dies gilt aber nur, wenn die Nullstellen paarweise verschieden sind.

2.17.3 Linearität der homogenen Differentialgleichung

1.) Mit $y_h(x)$ ist auch $C \cdot y_h(x)$ eine Lösung, wobei C eine beliebige Konstante ist.

2.) Die Summe von zwei Lösungen $y_h(x)$ ist auch eine Lösung.

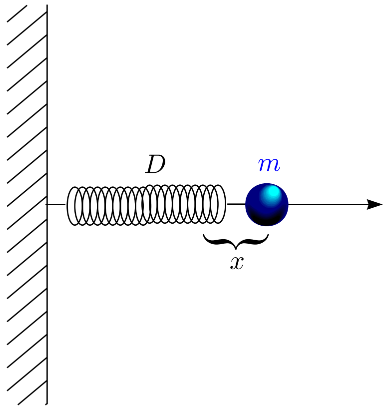
Die λ_j sind reell, aber Vielfache $\neq 1$.

$$A_n\lambda^n + \ldots + A_0 = (\lambda - \lambda_1)^m \cdot (\text{Polynom vom Grad } n - m)$$

Neben $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ ist dann auch $x^j \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ eine Lösung mit $j = 0, 1, \ldots, (m-1)$

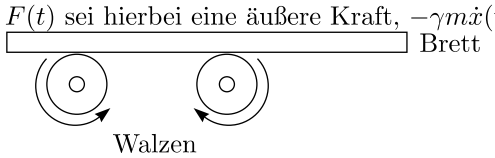
Kapitel 3

Der harmonische Oszillator

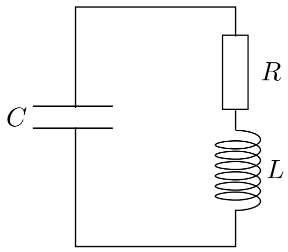


$m\ddot{x}(t) = -Dx + F(t) - 2\gamma m\dot{x}(t)$

$F(t)$ sei hierbei eine äußere Kraft, $-\gamma m\dot{x}(t)$ sei die Reibung.



3.1 Elektrischer Schwingkreis



$T = 2\pi\sqrt{LC}$

$I(t) = \dot{Q}(t), U_C + U_R + U_L = 0$

$\frac{Q}{C} + R \cdot I + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$ nochmal differenzieren!

Die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator lautet:

$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$

- Reibungskonstante: 2γ

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ist die Frequenz des ungedämpften Oszillators.
- $f(t) = \frac{F(t)}{m}$

3.2 Ungedämpfter Oszillator mit $f(t)) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x(t)$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung ergibt sich als:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t - \Phi_S) = B\cos(\omega_0 t - \Phi_C) = C\sin(\omega_0 t) + D\cos(\omega_0 t)$$

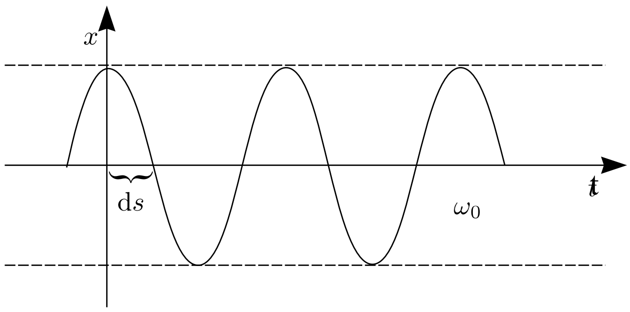
Alle 3 Formen der Lösung sind äquivalent, wie beispielsweise:

$$A\sin(\omega_0 t - \Phi_S) \leftrightarrow B\cos(\omega_0 t - \Phi_C)$$

$$A = B, \Phi_S = \Phi_C - \frac{\pi}{2}$$

Es gilt das Additionstheorem für den Kosinus:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$



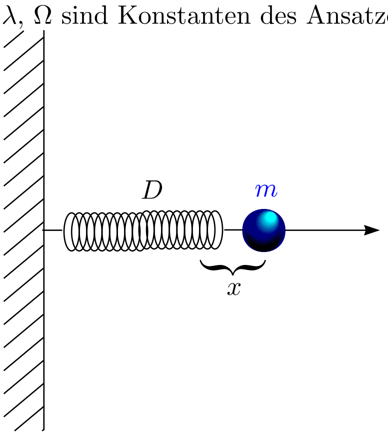
3.3 Oszillator mit Dämpfung (aber $f(t) = 0$)

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0}$$

Wir verwenden zur Lösung den Ansatz:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \sin(\Omega t - \Phi)$$

λ, Ω sind Konstanten des Ansatzes, wobei $\Omega \neq \omega_0$ und λ der Dämpfungsfaktor analog für freien Fall ist.



A und Φ sind freie Konstanten, die nicht durch die Differentialgleichung selbst festgelegt sind, sondern durch Anfangsbedingungen.

$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$, aber nicht $\gamma(t) \Rightarrow$ Homogenität der Zeit

$\sin\Omega t(\omega_0^2 - 2\gamma^2 + (-\lambda)^2)\mathrm{e}^{-\lambda t} + \cos\Omega t(2\Omega(\lambda-\gamma))\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$

Für alle $t : \lambda = \gamma, \lambda^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

- Schwingfall: $\omega_0 > \gamma$, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

  $x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}(C \cdot \sin\Omega t + D \cdot \cos\Omega t)$

  $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t\right)$ $\qquad \lim\limits_{t\mapsto 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- Kriechfall: $\omega_0 < \gamma$

  $x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$

  $(-\lambda)^2 + 2\gamma(-\lambda) + \omega_0^2 = 0$

  $\lambda = \gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{\Gamma}$

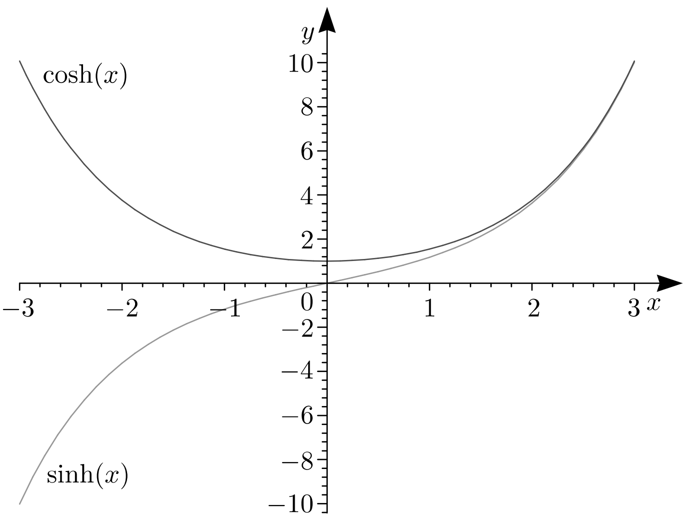
  $\Rightarrow x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(C \cdot \mathrm{e}^{\Gamma t} + D\mathrm{e}^{-\Gamma t}\right)$

  Oder: $\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A \cdot \sinh\Gamma t + B\cosh\Gamma t\right)$

  Die Hyperbolikusfunktionen sind folgendermaßen definiert:

  $\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{+x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$

  $\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{+x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$

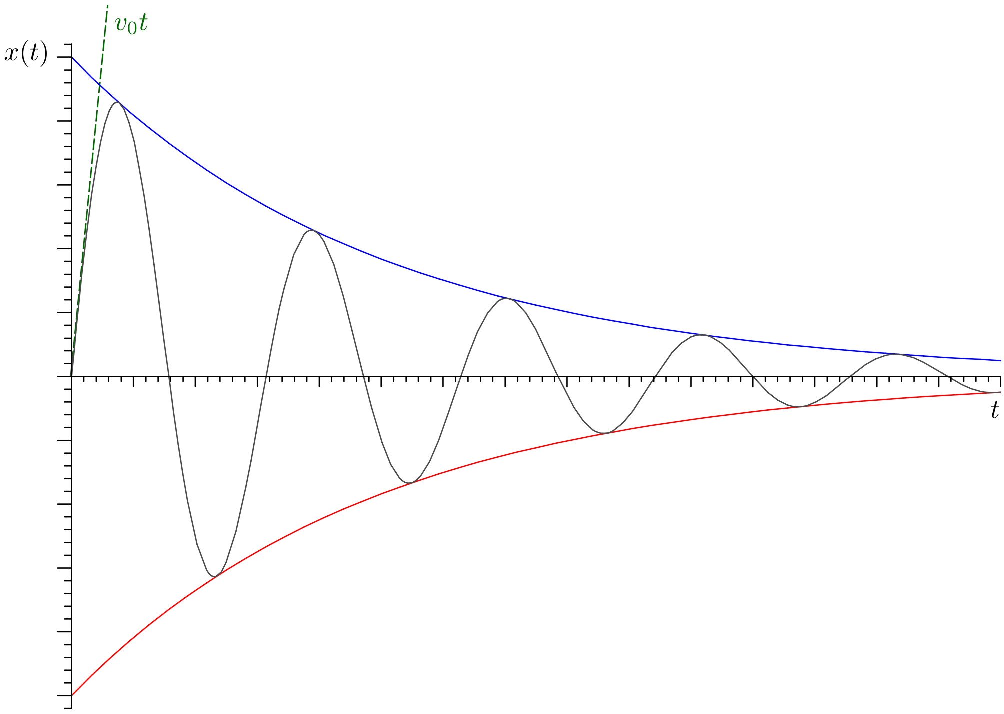


- Aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \gamma$

  Der Ansatz $x = \mathrm{e}^{-\gamma t}$ liefert nur eine Lösung $\lambda = \gamma$. $(\lambda - \gamma)^2 = 0$ besitzt aber eine Doppelnullstelle. Infolgedessen ist mit $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ auch $t \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$ eine Lösung.

  $x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}$

  Speziell: $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0, x(t) = v_0 t\mathrm{e}^{-\gamma t}$



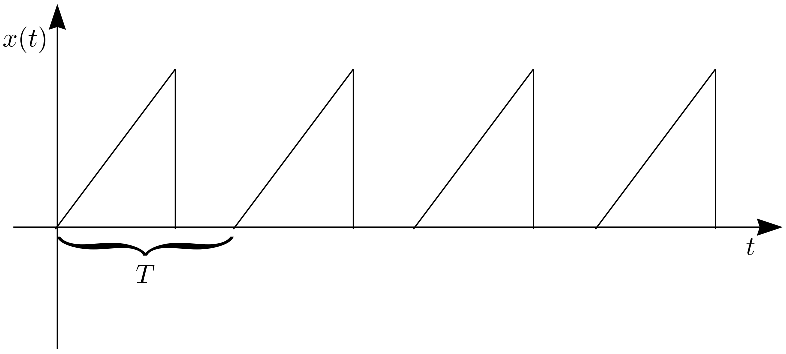
Periodische Funktion: $f(t) = f(t+T), T = \text{Periode}$

Speziell gilt:

$f(t) = \sin \omega t, \omega = \dfrac{\pi}{T}$

$f(t) = \sin \dfrac{\omega t}{2} + \sin \dfrac{\omega t}{3}, T = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{2\pi}{\omega}$

$f(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t$



Der allgemeine komplexe Lösungsansatz lautet:

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$

In die Differentialgleichung eingesetzt, erhält man:

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet:

$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{\neq 0}$

Somit ergibt sich als allgmeine Lösung:

$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$

Aber was ist, wenn λ_1, λ_2 komplex sind, also $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$? Man kommt somit auf den Schwingfall:

$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left\{A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right\}$

$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \mathrm{i}\Omega, \mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{i} = \sqrt{-1}$

3.4 Mathematischer Einschub: Komplexe Zahlen

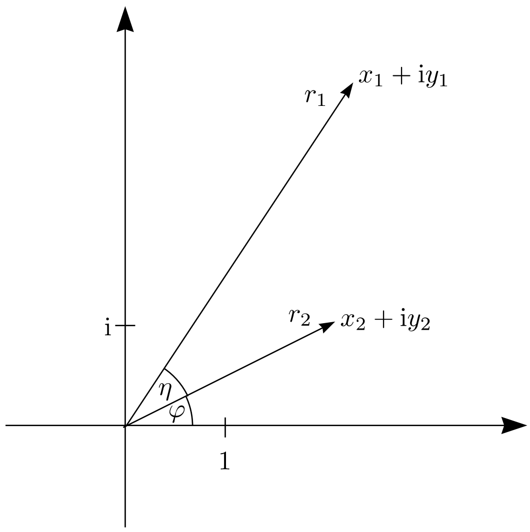
Reelle Zahlen:

- Addition: $a + b = c$
  Die Addition ist kommutativ.
- Multiplikation: $a \cdot b = c$
  Auch die Multiplikation ist kommutativ.

Die Lösung zur Gleichung $x^2 = 2$, nämlich $x = \sqrt{2}$ ist eine irrational Zahl. π, e sind hingegen transzendent (durch Grenzwerte). Wie lautet jedoch die Lösung der Gleichung $x^2 = -1$? Die Gleichung besitzt im Reellen keine Lösung, deshalb erweitert man den Zahlenbereich und führt komplexe Zahlen ein:

$z = x + \mathrm{i}y,$ wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{i}^2 = -1$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + \mathrm{i}(y_1 x_2 + y_2 x_1)$



$$\frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$$

$x - \mathrm{i}y$ ist die konjugiert Komplexe von z. Die physikalische Lösung ist $x(t) = \mathrm{Re}(x^C(t))$, also der Realteil. Der Imaginärteil $\mathrm{i}(x + y)$ besitzt in der Physik keine Bedeutung. $\mathrm{Re}(x^C(t))$ ist auch Lösung, da die Differentialgleichung linear ist.

3.4.1 Eigenschaften von imaginären Zahlen

Betrag von z:

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Winkel (Argument) φ:

$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

Eulersche Formel:

$$z = r \underbrace{(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}_{E(\varphi),|E|=1}$$

Sonstige Rechenregeln:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 E(\varphi_1) \cdot r_2 E(\varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Das heißt: $E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)$

Die Moivresche Formel zur Berechnung von Wurzeln lautet:

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} E(\varphi) = \mathrm{i}E(\varphi)$$

Vermutung:

$$\boxed{E(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$$

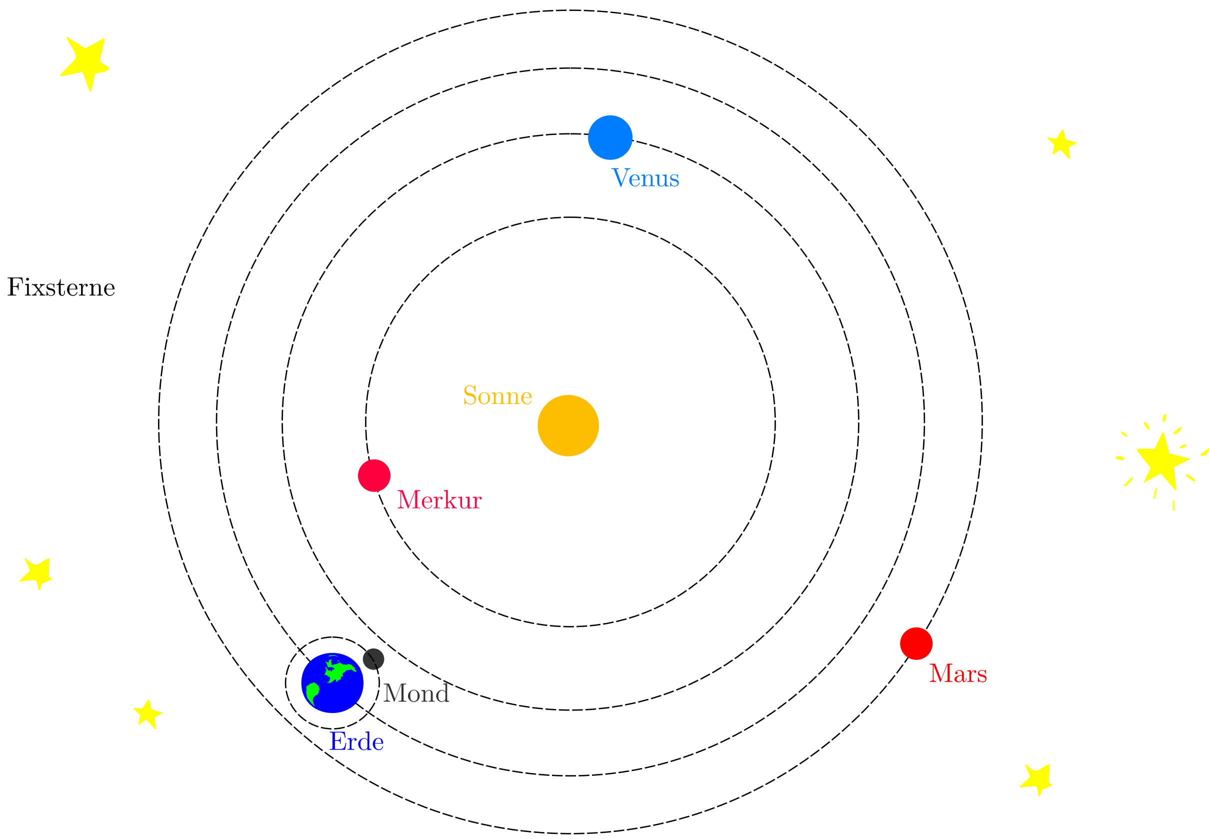
Taylor-Reihe: $\mathrm{e}^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$

Die Reihe konvergiert ABSOLUT:

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \ldots$$

Kapitel 4

Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld



- Kepler-Gesetze: ≈ 1600
- Tycho Brahe: 1600 in Prag Genauigkeit: $2'$

Interessante Websites:

- `http://www.mesa.gov`
- `http://mes.jpl.mesa.gov`

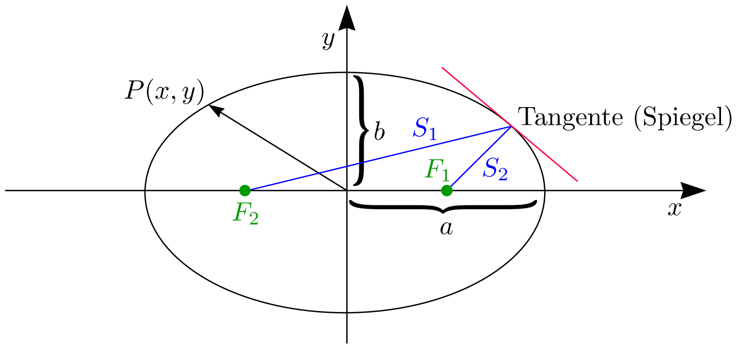
1.) Die Bewegung des Planeten erfolgt in einer Ebene

$$\left.\begin{array}{l}\text{Planeten: Ellipsen}\\ \text{Kometen: Hyperbeln}\end{array}\right\}\ \text{mit Sonne im Brennpunkt}$$

2.) Flächensatz: Fahrstrahl Sonne-Planet (Komet) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3.) $T^2 \sim a^3$
a,b sind die Halbachsen der Ellipse. Die Umlaufzeit ist somit unabhängig von der kleinen Halbachse b.

4.1 Mathematischer Einschub: Ellipsen und Hyperbeln



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parameterdarstellung:

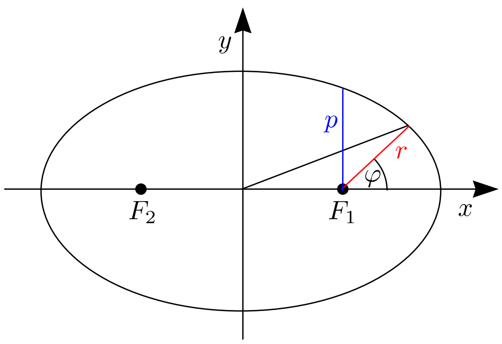
$x = a \cdot \cos\tau$

$y = b \cdot \sin\tau$

$0 \leq \tau \leq 2\pi$

- Brennpunkte: $f = \sqrt{a^2 - b^2}$
- Exzentrizität: $\varepsilon = \frac{f}{a}$
  Für einen Kreis gilt: $a = b$, $\varepsilon = 0$
- Gärtner-Kontruktion: $S_1 + S_2 = \text{const.}$
- Ellipsoid-Spiegel: Reflexionsgesetz an „metallischer“ Ellipse

4.2 Sonne im Brennpunkt



$$\left.\begin{matrix} a = 4 \\ b = 3 \end{matrix}\right\} f = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

Polarkoordinaten:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r(\varphi) = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

$0 < \varepsilon < 1$ Ellipse

Parabel: $\varepsilon = 1$

Hyperbel: $\varepsilon > 1$

4.2.1 Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m\cdot M_{Sonne}}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Die Bahn liegt in einer Ebene. Für den Drehimpuls gilt: $\vec{L} = \vec{r}(t)\times\vec{p}(t)$

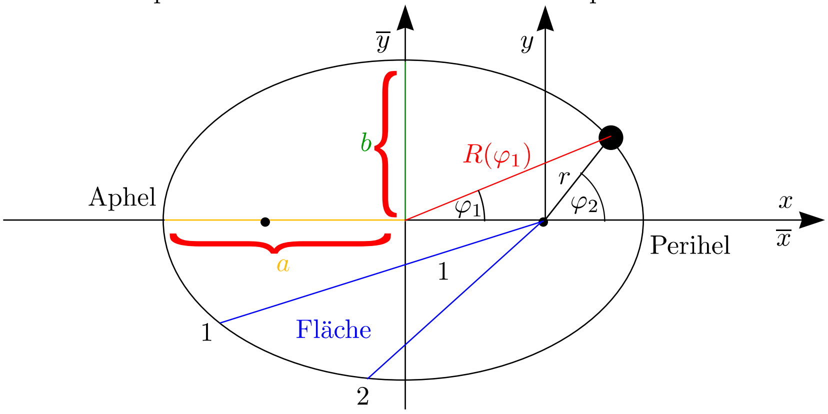
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$\vec{L}$ ist nach Richtung und Betrag fest. $\vec{L}$ steht senkrecht auf der Bahnkurve. Für eine Kreisbahn gilt:

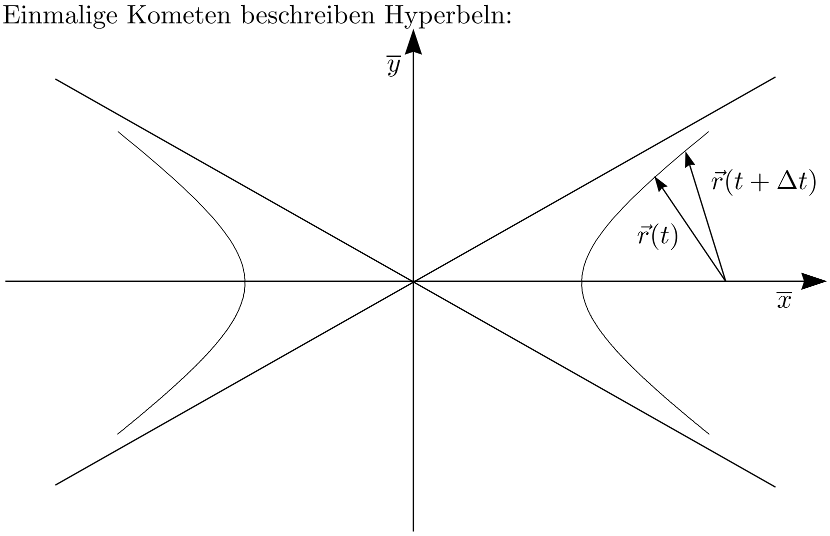
$\vec{L} = r\cdot m\cdot v$

$v = r\cdot\omega$

Planten und periodische Kometen beschreiben Ellipsen:



Einmalige Kometen beschreiben Hyperbeln:



Zusammenfassung:

- Mittelpunkt

  $$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$$

  $$f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

- Parameterdarstellung

  $$x = a \cosh \tau$$

  $$y = b \sinh \tau$$

- Brennpunktlage

  $$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

  Die Exzentrizität ist definiert durch:

  $$\boxed{\epsilon = \frac{f}{a}}$$

  Hierbei gilt nun für die verschiedenen Kegelschnitte:

  - Ellipse: $\epsilon < 1$
  - Kreis: $\epsilon = 1$
  - Hyperbel: $\epsilon > 1$

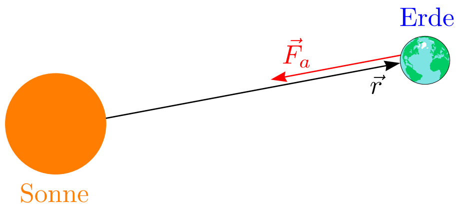
Wiederholung: Kepler-Gesetze

1.) Bahn in einer Ebene, Sonne im Brennpunkt der Ellipsen/Hyperbeln ($\vec{L}$=const.)

2.) Flächensatz (Zeitfall) ($|\vec{L}|$)

3.) $T^2 \sim a^3$ (unabhängig von b)

Bewegungsgleichung:



$$m \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -G \frac{m \cdot M_\circ}{|\vec{r}|^2} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) \text{ nicht linear in } \vec{r}!$$

Die Bahn liegt in einer Ebene. Der Drehimpuls ist somit erhalten:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}}_{\vec{v} \| \vec{p} (=0)} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \| \vec{r} (=0)}$$

4.2.2 Flächensatz

Hier benötigen wir unter anderem $v_\perp = r \cdot \omega$. Dies wollen wir zuerst zeigen:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{r^2}(\vec{r} \times \vec{v}) =$$
$$= \frac{1}{r^2} \cdot (r \cdot v \cdot \sin\alpha) = \frac{1}{r^2} \cdot (r \cdot v_\perp) = \frac{v_\perp}{r}$$

Damit gilt nun:

$$\Delta A = \frac{1}{2}(r \cdot \Delta\varphi) \cdot r + \text{Korrektur in } (\Delta\varphi)^2$$

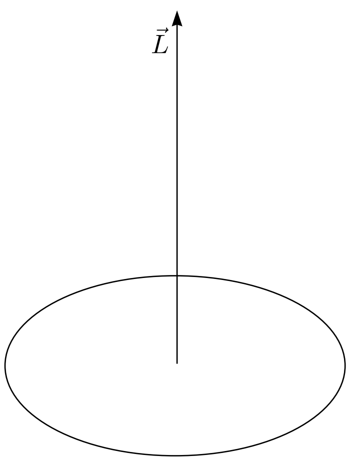
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) \xrightarrow{\Delta t \mapsto 0} \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$$

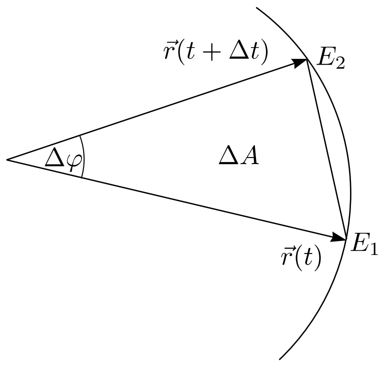
Der Flächensatz folgt auch einfacher direkt aus der Drehimpulserhaltung:

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r \, \mathrm{d}s_\perp$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{2} \cdot v_\perp = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) = \text{const.}$$

4.3 Drehimpuls in Polarkoordinaten





Drehimpuls ist senkrecht zur Bahn

Die Bahn liegt in der x-Ebene, somit ist $\vec{L}$ parallel zur z-Achse.

$$L_z = m \cdot (x \cdot v_y - y \cdot v_x)$$

$$x = r \cdot \cos\varphi \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi + r(-\sin\varphi)\dot{\varphi}$$

$$y = r \cdot \sin\varphi \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r(\cos\varphi)\dot{\varphi}$$

$$x \cdot v_y = r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$-y \cdot v_x = -r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$L_z = m \cdot \left(r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi} - r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}\right) = m \cdot r^2\varphi\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = m \cdot r^2(t) \cdot \dot{\varphi}(t)$$

4.4 Lösung der Bewegungsgleichung (in Parameterform)

$x(\tau) = a(\cos\tau - \epsilon)$, da $a \cdot \epsilon = f$

$y(\tau) = b\sin\tau$

$t(\tau) = c\,(\tau - \epsilon\sin\tau)$

Wir setzen der Einfachkeit halber „ $G = M_{Sonne} = 1$“.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau}} \text{ (Funktion in } \tau)$$

Bemerkung:

Aus $x(\tau) = a(\cos(\tau) - \varepsilon)$ und $y(\tau) = b\sin(\tau)$ folgt wegen der Drehimpulserhaltung zwangsläufig $t(\tau) = c(\tau - \varepsilon\sin(\tau))$. Es gilt nämlich:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{r}\times\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m(\vec{r}\times\vec{a}) + m\underbrace{(\vec{v}\times\vec{v})}_{=0} \stackrel{!}{=} 0$$

Aus $\vec{r}\times\vec{a} = 0$ folgt aber mit dem obigen Ansatz:

$$0 = \vec{r}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = x\ddot{y} - y\ddot{x} =$$

$$= (a\cos(\tau) - a\varepsilon)\left[-b\sin(\tau)\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 + b\cos(\tau)\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}t^2}\right] - (b\sin(\tau))\left[-a\cos(\tau)\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 - a\sin(\tau)\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}t^2}\right] =$$

$$= ab\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}t^2}(1 - \varepsilon\cos(\tau) + ab\varepsilon\sin(\tau)\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Damit ergibt sich dann:

$$\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}t^2} = \frac{-\varepsilon\sin(\tau)}{1-\varepsilon\cos(\tau)}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Wir führen nun folgende Substitution durch:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = z \qquad \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\cdot z$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\cdot z = \frac{-\varepsilon\sin(\tau)}{1-\varepsilon\cos(\tau)}z^2$$

Durch Trennung der Veränderlichen resultiert also:

$$\ln(z) = C - \ln(1 - \varepsilon\cos(\tau))$$

$$\boxed{z = \tilde{C}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon\cos(\tau)}}$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{C}}{1-\varepsilon\cos(\tau)}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = C_1(1 - \varepsilon\cos(\tau))$$

$$\boxed{t(\tau) = C_1(\tau - \varepsilon\sin(\tau)) + C_2}$$

Kapitel 5

Erhaltungsgrößen

Man nennt eine physikalische Größe $G = G(x, v, t)$ eine Erhaltungsgröße, falls $G = G(x(t), v(t), t) = \text{const.}$ längs der Bahnkurve. Wieviele unabhängige Erhaltungsgrößen (Bewegungsintegrale) gibt es überhaupt?

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2S}) \\ v(t) = \dot{x}((t, C_1, C_2, \ldots, C_{2S}) \end{array}\right\} 2S \text{Gleichungen}$$

$\boxed{S\text{=Raumdimension} \times \text{Zahl der Teilchen=Zahl der unabhängigen Koordinaten}}$

Man löst nach C_1, C_2, …, C_{2S} auf. C_j ist eine Funktion von t, x_1, …, x_S, v_1, …, v_S. Auf der Bahnkurve $x_j = x_j(t)$, $v_j = v_j(t)$ ist der Wert dieser Funktion konstant. Erhaltungsgrößen können eine solche Funktion selbst sein oder oder aus Kombinationen dieser Funktionen zusammengesetzt sein.

Bemerkung:

Wenn $\vec{F}$ unabhängig von t ist, dann kommen t, t_0 (Zeitnullpunkt) nur in der Form $t - t_0$ vor.

$$x_j(t) = x_j\left(t - t_0, C_1, \underbrace{C_2, \ldots, C_{2S}}_{2S-1 \text{ IdB}}\right)$$

Es sind somit nur $2S - 1$ Integrale der Bewegung, die nicht explizit von t abhängen.

Eindimensionaler Oszillator (ungedämpt):

$m\ddot{x} = -Dx$

$S = 1,$ Bewegungsintegrale: $2S = 2, 2S - 1 = 1$

Es gibt somit ein Bewegungsintegral, das nicht explizit von t abhängt.

$x = x_0 \cos(\omega t - \phi)$

$v = -x_0 \omega \sin(\omega t - \phi)$

$E(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2 \sim x_0^2$

$E(x, v)$ ist konstant, da x_0 konstant ist!.

$\frac{x}{v} = -\frac{1}{\omega} \cot(\omega t - \phi)$

$\omega t - \phi = \text{arccot}\left(-\frac{x\omega}{v}\right)$

Beispiele:

(Vergleiche hierzu auch Seite 52!)

- Impuls eines Teilchens

  $$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0, \text{ wenn } \vec{p} \text{ erhalten.}$$

- N-Teilchen

  $$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk} + F_j^{ext}$$

  Die Kraft setzt sich also zusammen aus F_{jk}, nämlich der Kräfte auf das Teilchen j, die von allen anderen Teilchen herrühren und der äußeren Kräfte.

- Gesamtimpuls

  $$\vec{P}_{ges} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j$$

  $$\dot{\vec{P}}_{ges} = \underbrace{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk}}_{=0(\text{actio}=\text{reactio})} + \sum_{j} \vec{F}_j^{ext} = \vec{F}_{ges}^{ext} \stackrel{!}{=} 0$$

  Genau dann ist $\vec{P}_{ges}$ erhalten.

$G(x, y)$ ist Funktion von Ort und Geschwindigkeit aller Teilchen. Sie ist erhalten, wenn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G\left(x(t), v(t), t\right) = 0$ ist. Man versucht, Aussagen für <u>ALLE</u> möglichen Bahnen zu liefern.

✳ <u>Bewegungsgleichungen:</u>

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

✳ <u>Impuls:</u>

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F} : \text{ Integral der Bewegung, wenn } \vec{F} = 0$$

✳ <u>Energie:</u>

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

$$m \cdot \vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\vec{F}$$

Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right)}_{E_{kin}} = 0, \text{ wenn } \vec{v} \perp \vec{F}$$

Lorentzkraft:

$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Ladung} \cdot \text{Geschwindigkeit} \times \text{Magnetfeld}$

a.) $E_{kin} = \dfrac{m}{2} v^2$ Dies ist ein Integral der Bewegung: $\vec{v} \perp \vec{F}$

b.) $\vec{F} = -\text{grad} V$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right) = \underbrace{-\text{grad}V(\vec{r}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}}_{\frac{\mathrm{d}V(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t}}$$

Eindimensional: $\dfrac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t}$

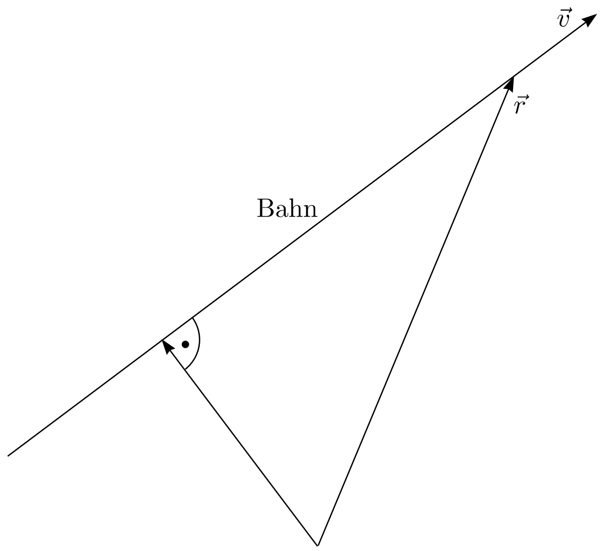
Zusammenfassung: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overbrace{\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2 + V(\vec{r})\right)}^{E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}} = 0$ auf Bahn $\vec{r} = \vec{r}(t)$

c.) Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ geht IMMER.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}}_{=0,\text{ da } v \parallel \vec{p}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \text{ wenn } \vec{F} \parallel \vec{r} \text{ (Zentralkraft)}$$

In diesem Fall ist $\vec{L}$ ein Integral der Bewegung.

Freies Teilchen:



Kepler-Problem

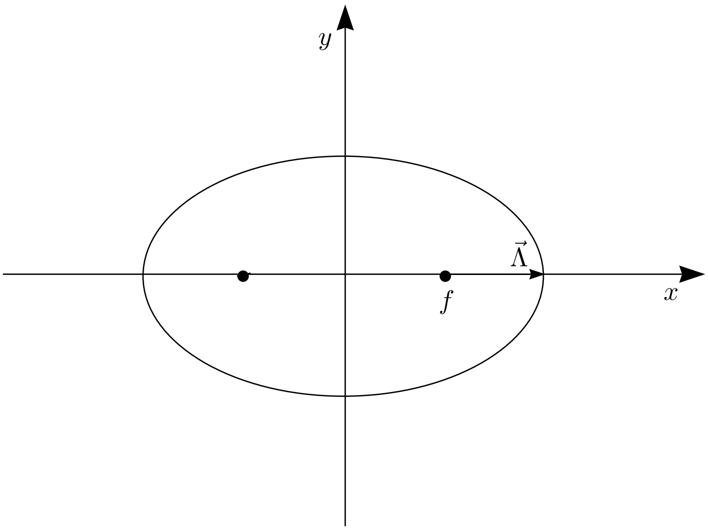
$\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right), V = -G\dfrac{Mm}{r}$

Es gibt $2S - 1 = 5$ unabhängige Erhaltungsgrößen.

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, da Zentralkraft
  3 Integrale der Bewegung
- $E = \dfrac{m}{2}\vec{v}^2 + V(|\vec{r}|)$
  1 Integral der Bewegung

- Eine eindimensionale Erhaltungsgröße: Lenz-Runge-Vektor

  $\vec{\Lambda} = \vec{v} \times \vec{L} - GMm \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$



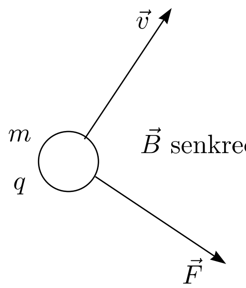
Der Lenz-Vektor zeigt zum Perihel. Die Abweichung von $\vec{F} \sim \frac{1}{r^2}$ führt zur Drehung des Perihels. Die Bahn ist nicht mehr geschlossen. Für den Planeten Merkur gilt beispielsweise:

- Abweichung $\approx \sim 600 \, \frac{\text{Bogensekungen}}{\text{Jahrhundert}}$

Die allgemeine Relativitätstheorie hat einen Beitrag von 42 Bogensekunden.

Kapitel 6

Geladenes Teilchen im Magnetfeld



$\vec{B}$ senkrecht zur Zeichenebene („Pfeilgesetze“)

$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

$m\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$

$\vec{B}$ ist homogen, zeitlich konstant und parallel zur z-Achse.

$m\ddot{x}(t) = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_x = q\left(v_y B_z - v_z B_y\right) = q v_y B$

$m\ddot{y}(t) = -q v_x B$

$m\ddot{z}(t) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{qB}{m} v_y \\ \dot{v}_y &= -\frac{qB}{m} v_x \\ \dot{v}_z &= 0 \end{aligned}\right\} \ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y = \frac{qB}{m}\left(-\frac{qB}{m}\right) v_x \Rightarrow \underbrace{\ddot{v}_x + \omega_C^2 v_x = 0}_{\substack{\text{Harmonischer} \\ \text{Oszillator}}}$$

Es ist ein Glücksfall, da x, y, z nicht explizit in diesen Differentialgleichungen vorkommen. Damit ergibt sich die Zyklotronfrequenz:

$$\boxed{\omega_C = \frac{qB}{m}}$$

$v_x(t) = v_0 \cos(\omega t - \phi)$

$v_y(t) = \dfrac{1}{\omega_C}\dot{v}_x(t) = -v_0 \sin(\omega_C t - \phi)$

v_0 und ϕ sind die beiden unabhängigen Konstanten, die wir benötigen.

$v_z(t) = v_{z_0} = \text{const.}$

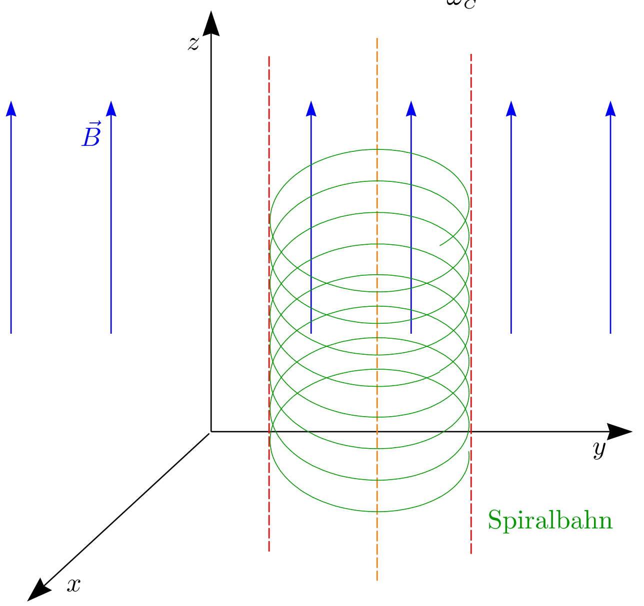
Die Ortskurven folgen durch Integration:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_C}\sin(\omega_C t - \phi) + x_0$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_C}\cos(\omega_C t - \phi) + y_0$$

$$z(t) = v_{z_0} t + z_0$$

x_0, y_0, z_0 sind die drei weiteren Konstanten. Das Teilchen beschreibt eine Kreisbahn in der x-y-Ebene mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und dem Radius $\frac{v_0}{\omega_C}$.



Erhaltungsgrößen:

Hier gibt es wiederum $2S - 1 = 5$ Integrale der Bewegung.

- Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

  $$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \ldots \neq 0, \text{ da die Lorentzkraft keine Zentralkraft ist.}$$

  Aber wenn man die z-Achse auf Spiralachse legt $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, dann ist der Drehimpuls erhalten.

- Energie

  $$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \text{ ist erhalten.}$$

- Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung

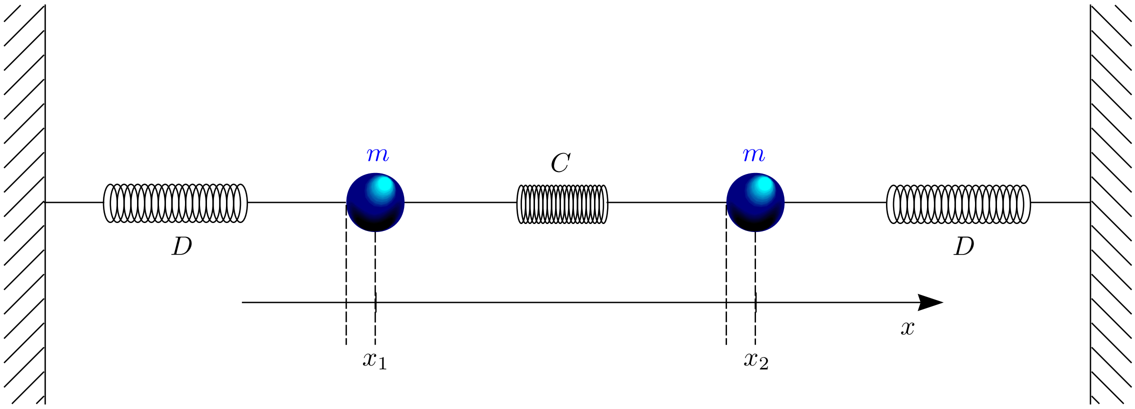
  v_z ist auch ein Integral der Bewegung.

Bewegungsintegrale müssen zeitunabhängig sein für alle möglichen Bahnen (vergleiche Seite 48) und nicht nur für spezielle Bahnen, deren Spiralachse auf der z-Achse liegt! Außerdem ist, selbst unter dieser Bedingung, nur die z-Komponente des Drehimpulses (um den Ursprung) erhalten (es sei denn $v_z = 0$). Vergleiche dazu außerdem Skript Theorie B auf Seite 37.

Kapitel 7

Gekoppelte Schwingungen

7.1 Bewegungsgleichungen



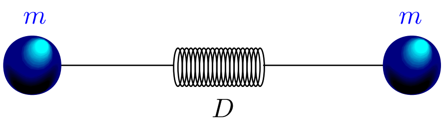
x_1, x_2 sind die Auslenkungen aus der Ruhelage.

$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + C(x_2 - x_1)$

$m\ddot{x}_2 = -Dx_2 + C(x_1 - x_2)$

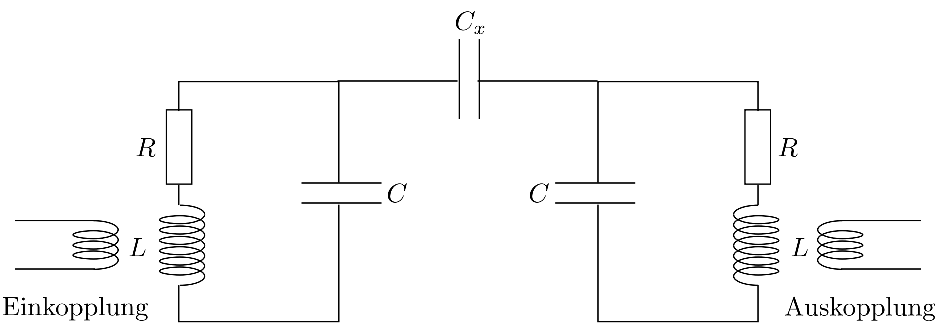
Weitere Beispiele:

Zweiatomiges Molekül:



Die Feder symbolisiert die chemische Bindung.

Nachrichtentechnik, Bandfilter:



7.1.1 Mathematischer Einschub: Lineare Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten ein lineares System von 2 gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zur Lösung verwenden wir den Ansatz:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = a_1 \mathrm{e}^{\lambda t} \\ x_2(t) = a_2 \mathrm{e}^{\lambda t} \end{array}\right\} \lambda = -\mathrm{i}\omega$$

- Beide Teilchen schwingen mit <u>derselben</u> Frequenz.
- a_1, a_2 Amplituden noch nicht festgelegt

$$(-\mathrm{i}\omega)^2 m a_1 = -D a_1 + C(a_1 - a_2)$$

$$(-\mathrm{i}\omega)^2 m a_2 = -D a_2 + C(a_1 - a_2)$$

Das Gleichungssystem besteht aus 2 Gleichungen, ist linear und homogen.

$$\left(D + C - m\omega^2\right) a_1 - C a_2 = 0$$

$$-C a_1 + \left(D + C - m\omega^2\right) a_2 = 0$$

$\Rightarrow \left(D + C - m\omega^2\right) a_2 - C^2 a_2 = 0$ durch Einsetzen!

$a_2 \left(\left(D + C - m\omega^2\right) - C^2\right) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$ triviale Lösung

Die nichttriviale Lösung erfordert, daß

$$\left[D + C - m\omega^2\right]^2 - C^2 = 0$$

Wir schreiben das Gleichungssystem in Matrixform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D + C - m\omega^2 & -C \\ -C & D + C - m\omega^2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix des Gleichungssystems}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{Determinatenmatrix} = 0$$

Wir erhalten somit die Lösung der Gleichungen für ω (Eigenwertgleichungen):

$$\Rightarrow m\omega^2 - (D + C) = \pm C$$

$-$Zeichen: $\omega_1 = \pm\sqrt{\dfrac{D}{m}}$

$+$Zeichen: $\omega_2 = \pm\sqrt{\dfrac{D + 2C}{m}}$

<u>**Schwingungstyp 1:**</u>

$a_1 = a_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>**Schwingungstyp 2:**</u>

$a_1 = -a_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =\sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7.2 Physikalische Bedeutung der beiden Normalschwingungen (Moden)

- $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{D}{m}}$

  $x_1(t) = x_2(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}\right)$

- $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{D+2C}{m}}$

  $x_1(t) = -x_2(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\right)$

Allgemeine Lösung:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2} c_j a_1^{(j)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_j t} \\ x_2(t) &= \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2} c_j a_2^{(j)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_j t} \end{aligned}\right\} = \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2} C_j \vec{a}^{(j)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_j t}$$

Es handelt sich um 2 Komponentenvektoren. Die allgemeine Lösung enthält 4 reelle Konstanten.

$$z_1(t) = \mathrm{Re}\left[C_1 \exp\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) + C_2 \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) + C_3 \exp\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{D+2C}{m}}t\right) + C_4 \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{D+2C}{m}}t\right)\right]$$

$$z_2(t) = \mathrm{Re}\left[C_1 \exp\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) + C_2 \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) - C_3 \exp\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{D+2C}{m}}t\right) - C_4 \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{D+2C}{m}}t\right)\right]$$

7.3 Getriebene Schwingungen

Zusätzliche Kraft an Masse 1:

$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + C(x_2 - x_1) + mf_0 \cos\omega t$$
$$m\ddot{x}_2 = -Dx_2 + C(x_1 - x_2)$$
$$F_1 = mf_0 \cos\omega t$$
$$F_1 = mf_0 \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$$

Ansatz:

$$x_1(t) = A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$
$$x_2(t) = A_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

ω ist beliebig. Wir ersetzen $a_1 \mapsto A_1$, $a_2 \mapsto A_2$:

$$\left[D + C - m\omega^2\right] A_1 - CA_2 = mf_0$$

$\left[D + C - m\omega^2\right] A_2 - CA_1 = -CA_1 + \left[D + C - m\omega^2\right] A_2 = 0$

Dies ist ein inhomogenes Gleichungssystem.

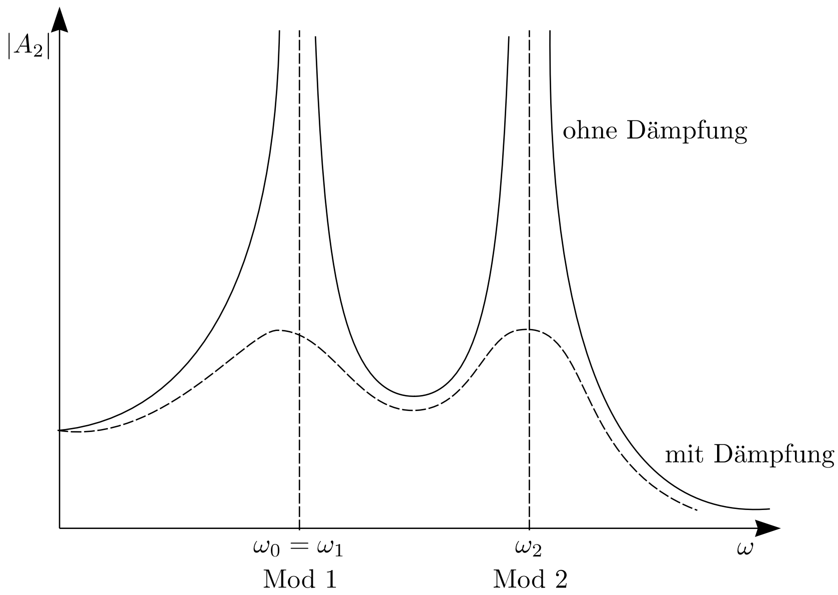
$$A_2 = f_0 \cdot \frac{\omega_C^2}{\left(\underbrace{\omega_0^2 + \omega_C^2}_{\omega_2^2 - \omega_C^2} - \omega^2\right)^2 - \underbrace{\omega_C^4}_{\left(\frac{C}{m}\right)^2}}$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{m}}$ (ungekoppelt)

$\omega_C = \sqrt{\dfrac{C}{m}}$ (Kopplung)

$\omega_1 = \omega_0$

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_C^2}$



$$A_2 = f_0 \frac{\omega_C^2}{(\omega^2 - \omega_1^2) \cdot (\omega^2 - \omega_2^2)}$$

7.4 Mathematischer Einschub: Matrix-Bezeichnung

$x_1, x_2, \ldots, x_N :\Rightarrow$ Spaltenvektor: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$

7.4.1 Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} X(t) = - \left\{ \begin{matrix} D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + \ldots + D_{1N}x_N \\ D_{21}x_1 + D_{22}x_2 + \ldots + D_{2N}x_N \\ \vdots \\ D_{N1}x_1 + D_{N2}x_2 + \ldots + D_{NN}x_N \end{matrix} \right\} = - \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2N} \\ \vdots & & & \\ D_{N1} & D_{N2} & \ldots & D_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$m \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} X(t) = -\mathcal{D}X$ (gleiche Massen)

Wir rechnen mit dem Ansatz $\mathcal{X}(t) = \vec{a} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ wobei $\vec{a}$ ein zeitunabhängiger Vektor ist. $\mathcal{D}$ sei die Federkonstantenmatrix.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{pmatrix}$$

Mit gleichen Massen folgt:

$$(-\mathrm{i}\omega)^2 \vec{a} = -\frac{1}{m} \mathcal{D} \vec{a}$$

$$\left(\mathcal{D} - \omega^2 m \mathcal{I}\right) \vec{a} = 0$$

7.4.2 Einheitsmatrix

Die Einheitmatrix $\mathcal{I}$ sieht folgendermaßen aus:

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

7.4.3 Eigenwertproblem

Zu obiger Aufgabe kann folgendes Eigenwertproblem formuliert werden:

$$\mathcal{D} \vec{a} = \lambda \vec{a}$$

$\det(\mathcal{D} - \lambda \mathcal{I}) = 0$ führt auf ein Polynom N-ten Grades. In unserem Falle erhalten wir $\lambda = m\omega^2$. Zu jedem der N Eigenwerte gibt es Eigenvektoren $a^{(j)}$ mit $j = 1, 2, \dots, N$.

7.4.4 Multiplikation von 2 Matrizen

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & & & \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & & & \\ B_{N1} & B_{N2} & \dots & B_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \sum_{l=1}^{N} A_{il} B_{lk}$$

Kapitel 8

Etwas zu „Computational Physics“

Newtongleichung:

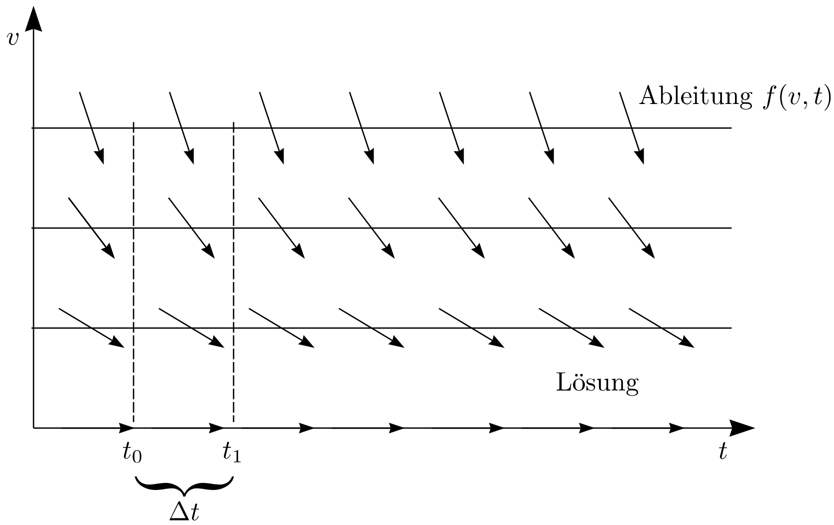
$\ddot{x}(t) = f(x, v, t)$ 1.Teilchen, x-Achse

Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= f(x, v, t) \end{aligned}\right\} \text{2 gekoppelte Differentialgleichungen 1.Ordnung}$$

Eine Differentialgleichung 1.Ordnung lautet $\dot{v} = f(v, t)$. Diese ist beispielsweise für Reibung realisierbar; es gilt nämlich $m\dot{v} = -\gamma v$.

Richtungsfeld:



Wir betrachten eine Differentialgleichung 1.Ordnung $\dot{v} = f(v, t)$ numerisch. Dazu entwickeln wir in eine Taylor-Reihe:

$$v(t_0 + \Delta t) = \underbrace{v(t_0)}_{\text{Anfangsbedinung}} + \underbrace{\dot{v}(t_0)}_{f_0 = f(v, t_0)} \Delta t + \underbrace{\frac{1}{2}\ddot{v}(t_0)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(v,t)) = \phi_0} (\Delta t)^2 + \ldots$$

Beispiel:

$$-\frac{\gamma}{m}\dot{v} = -\frac{\gamma}{m} f_0$$

Newton-Gleichung:

Es gilt:

$\dot{x}(t) = v(t)$

$\dot{v}(t) = f(x, v, t)$

Dann entwickeln wir in eine Taylor-Reihe:

$$\boxed{x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(\Delta t)^2 + \dots}$$

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} f_0 (\Delta t)^2$$

$$\boxed{v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + \dot{v}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{v}(t_0)(\Delta t)^2 + \dots}$$

$$v_1 = v_0 + f_0 \Delta t + \frac{1}{2} \phi_0 (\Delta t)^2$$

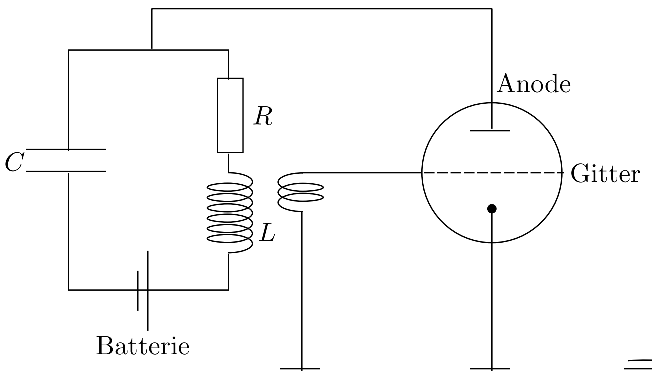
$$f_0 = f(x_0, v_0, t_0), \ \phi_0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), v(t), t)\right|_{t=t_0}$$

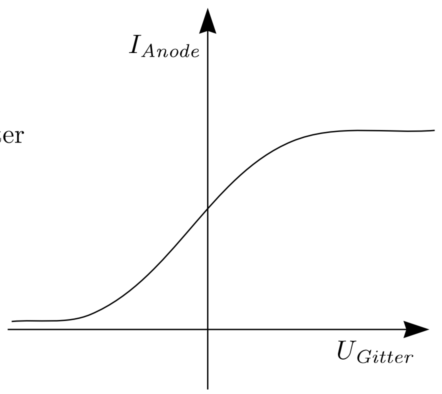
$(x_0, v_0) \mapsto (x_1, v_1) \mapsto (x_2, v_2)$ sei gegeben. Dann folgt durch Iteration:

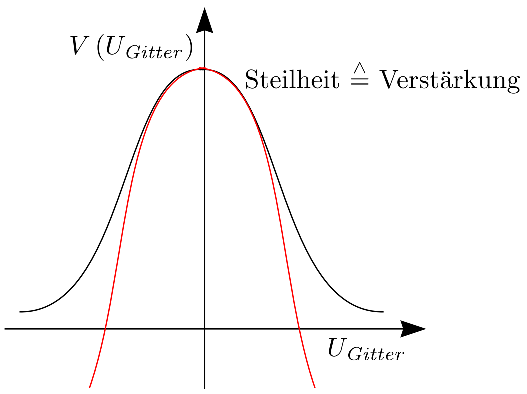
$\ddot{x} = -x$

$x_0 = c,\ v_0 = 1,\ x(t) = \sin t$

8.1 Selbstschwingender Oszillator



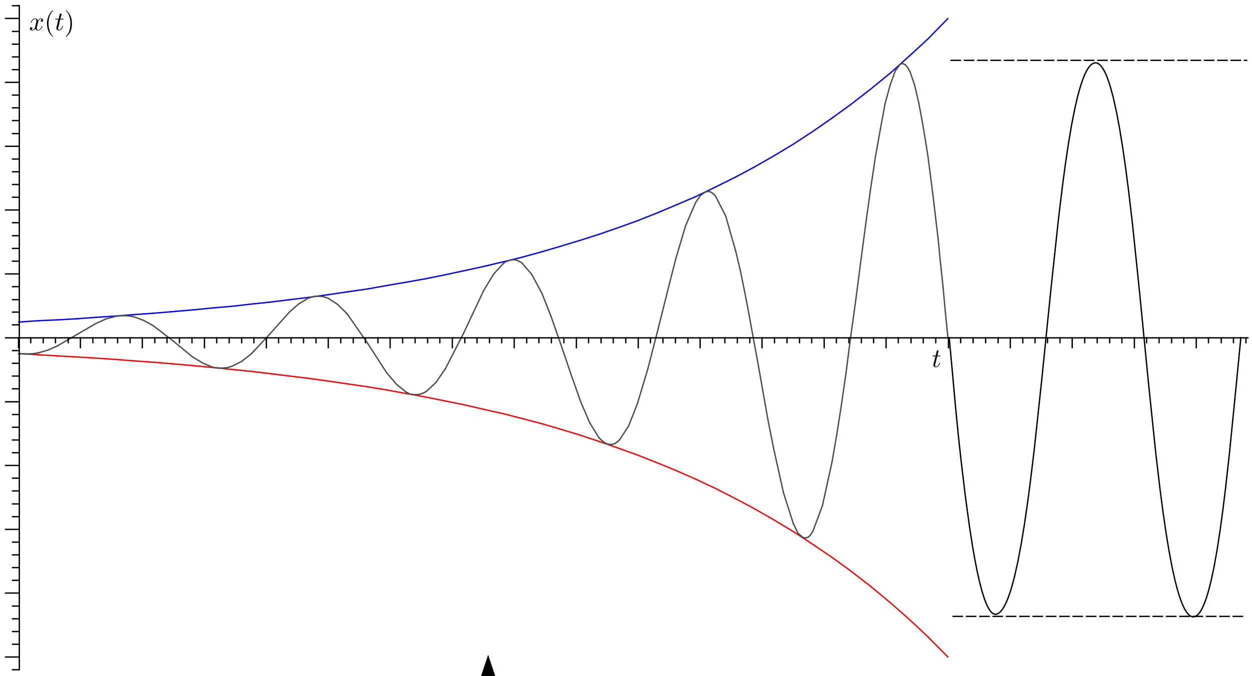


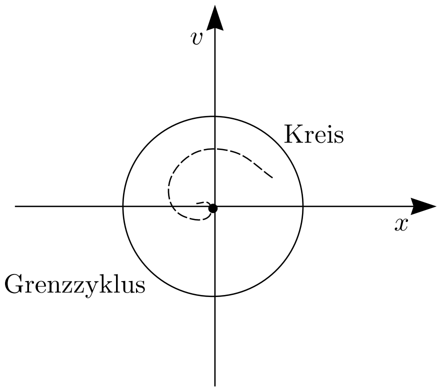


$\ddot{U} + 2\,(\gamma - V(U))\,\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

$x \hat{=}$ Spannung (dimensionslos)

$\dot{x} - 2\gamma\left(1 - x^2\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$





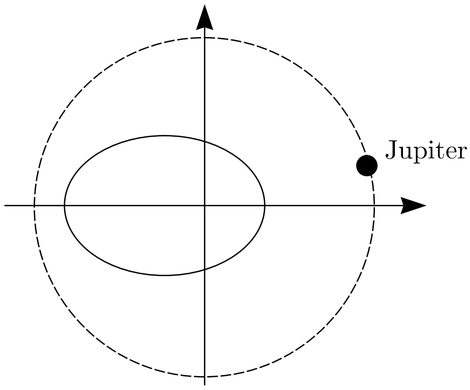
Wenn die Funktion $x(t)$ eine Sinusfunktion ist, so muß man bei der Auftragung von x gegen v einen Kreis erhalten. Wir erhalten keinen exakten Kreis, weil in der Schwingung noch Oberschwingungen verborgen sind.

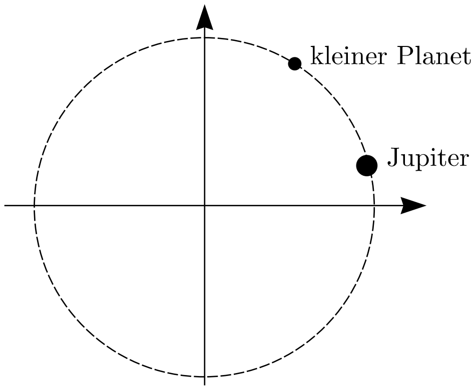
Keplerproblem:

$$m\ddot{\vec{r}} = -GMm\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Dimensionslos:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y} &= -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\}$$


Jupiter


kleiner Planet
Jupiter