

Theoretische Physik A (Einführung)

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila

Vorlesung Wintersemester 2007/2008

Mitschrieb von Florian Keller

Letzte Aktualisierung February 27, 2008

Zum erstenmal veröffentlicht 14. Januar 2008

Ich erhebe keinen Anspruch darauf, dass dieses Skript
komplett oder frei von Fehlern ist.

Contents

1	Grundbegriffe	4
2	Kinetmatik	5
2.1	Mathematischer Einschub	5
2.1.1	Vektoren	5
2.1.2	Differentialrechnung	6
2.2	Bahnkurven	8
2.2.1	Bewegung in 1 Dimension	8
2.2.2	Bewegung im \mathbb{R}^3	9
2.3	Koordinatensysteme	18
2.3.1	Mathematischer Einschub Matrizen	18
2.3.2	Drehungen	21
2.3.3	Wechsel der Variablen in 2 und 3 Dimensionen vorteilhaft. Verwende der Symmetrie des Problems angepasste Variablen	25
2.4	Inertialsystem und Galilei-Transformation	29
2.4.1	Eigentliche GT	29
2.4.2	Uneigentliche GT	32
3	Newton'sche Axiome	33
3.1	Vorbemerkung	33
3.1.1	Grundlegende Begriffe	33
3.1.2	Kräfte	34
3.2	NEWTON'sche Axiome	36
3.3	Mathematischer Einschub Gradient, Rotation, Divergenz	39
3.4	Erhaltungssätze	43
3.4.1	Impulserhaltung	43
3.4.2	Energieerhaltung	43
3.4.3	Drehimpulserhaltung	50
4	Beschleunigte Bezugssysteme - Scheinkräfte	51
4.1	Koordinaten Transformation	52
4.2	Scheinkräfte	53
4.2.1	Translationskraft	53
4.2.2	Zentrifugalkraft	54
4.2.3	Corioliskraft	55
4.2.4	Azimutal-Kraft	56

5	Schwingungen/Harmonischer Oszillator (HO)	56
5.1	Motivation	56
5.2	Mathematischer Einschub	59
5.2.1	Komplexe Zahlen	59
5.2.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	60
5.3	Harmonischer Oszillator (HO)	62
5.3.1	HO ohne Reibung (1-dimensional)	62
5.3.2	HO mit Reibung	62
5.3.3	Erzwungene Schwingungen	64
5.4	Mathematischer Einschub δ -Funktion	65
5.5	Kraftstoß	67
6	Zweiteilchensysteme (mit Zentralkraft)	70
6.1	Relativ- und Schwerpunktkoordinaten	70
6.2	Drehimpulserhaltung, Bahnkurven	72
6.3	Mathematischer Einschub Ellipse und Hyperbel	73
6.4	Planetenbewegungen/KEPLER-Problem	75
6.4.1	Nachtrag: Qualitative Diskussion der Bahnkurve für allgemeines Potential $U(r)$	76
6.4.2	LENZ-RUNGE-Vektor	78
7	Streuung von Teilchen	78
7.1	Allgemeine Überlegungen	78
7.2	RUTHERFORD-Streuung	80
8	Vielteilchensysteme	82
8.1	Notation	82
8.2	Erhaltungssätze	82

1 Grundbegriffe

Was ist theoretische Physik?

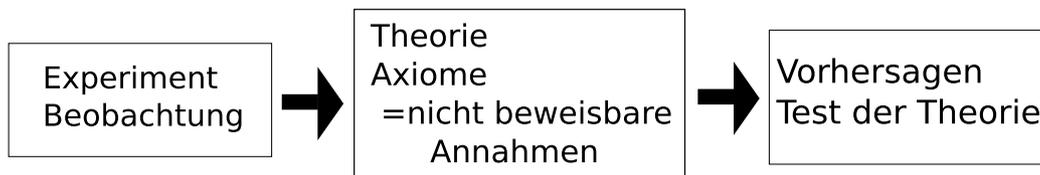
Physik: Aufdeckung und die math. Beschreibung von Naturgesetzen

Strategie:

- gezielte Experimente
- Interpretiert/Vorhersagen durch Aufstellen allgemeiner mathematischer Zusammenhänge zwischen Meßgrößen

Aufgaben der Theoretischen Physik:

- Theorie zur Beschreibung/Vorhersage von experimentellen Resultaten
- neue Konzepte (16/17 Jhdt. Galileo Galilei, Newton; Ende 19 Jhdt. Maxwell; ART; Quantenmechanik)
- Theorie und Experiment sind für umfassende aussagekräftige Naturbeschreibung notwendig
- Jede Theorie muss experimentell überprüfbar sein
- Experiment entscheidet über Richtigkeit der Theorie



In dieser VL

- NEWTON'sche Mechanik
→ Einführung in die Denkweise der theoretischen Physik
- Mechanik
 - ältestes Teilgebiet der Physik
 - Grundlage für die ganze theoretische Physik

2 Kinetmatik

2.1 Mathematischer Einschub

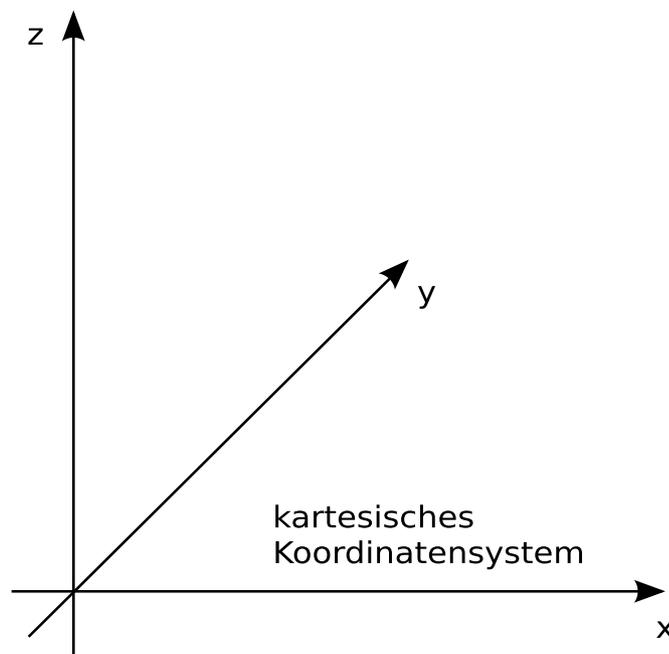
2.1.1 Vektoren

(a) \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) = Menge der n-Tupel (x_1, \dots, x_n) , $x_i \in \mathbb{R}$

hier

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^3; \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ Vektorraum}$$

Punkte des physikalischen Raums können durch Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben werden. Notwendig: Koordinatensystem mit Ursprung.



$$\text{Def: } \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren stehen senkrecht aufeinander

\Rightarrow bilden orthonormale Basis

$$\Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

a_x, a_y, a_z Koordinaten bezüglich $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

(b) 1. Skalarprodukt

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

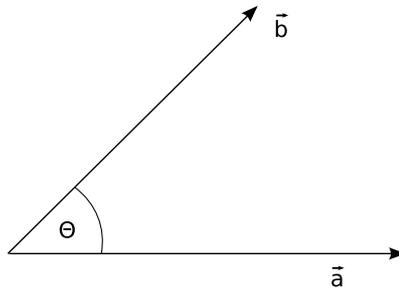
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Länge/Betrag eines Vektors ("Norm")

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2} = a$$

Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \Theta$$



Bemerkungen:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ falls: $\Theta = \frac{\pi}{2}$
oder $a = 0$ oder $b = 0$
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist skalar
 \Rightarrow unabhängig vom Koordinatensystem

(b) 2. Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z & - & a_z b_y \\ a_z b_x & - & a_x b_z \\ a_x b_y & - & a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \text{ und } \perp \vec{b}$$

2.1.2 Differentialrechnung

(a) Differentiation

$$\text{reelle Funktion } f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

Ableitung nach x

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ableitung nach der Zeit:

$$\dot{f}(t) = \frac{df(x)}{dt}$$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

(b) Integration

geg.: $f(x)$

ges.: $F(x)$ derart, dass $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

$$F(x) = \int^x f(x') dx'$$

Beispiele:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$$

$$f(x) = e^{ax} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$$

unbestimmte Integration: (Suche Stammfunktion $F(X)$)

mit $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

bestimmte Integration:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

partielle Integration:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x) dx$$

$$\text{Bsp.: } \int_a^b x e^x dx = x e^x \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b 1 \cdot e^x dx}_{e^x \Big|_a^b}$$

Substitutionsregel

$$\int_{g_1}^{g_2} dg f(g) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(g(x)) g'(x)$$

$$\text{Bsp.: } \int_a^b \frac{x dx}{x^2 + 1} = \left| \begin{array}{l} y = x^2 + 1 \\ dy = 2x dx \end{array} \right| = \int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{1}{2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}$$

2.2 Bahnkurven

- betrachte Massenpunkt
- freier Massenpunkt, falls keine einschränkenden Zwangsbedingungen vorliegen.

2.2.1 Bewegung in 1 Dimension

(a) Lage/Ort des Massenpunktes als Funktion der Zeit: $x(t)$

Geschwindigkeit:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

$v(t) \geq 0, \leq 0$ möglich

Beschleunigung:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = a(t)$$

(b) Beispiel

geg.: Bewegung mit Geschwindigkeit: $v(t)$

Anfangszeitpunkt: t_1

Endzeitpunkt: t_2

Abstand

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \right|$$

zurückgelegter Weg

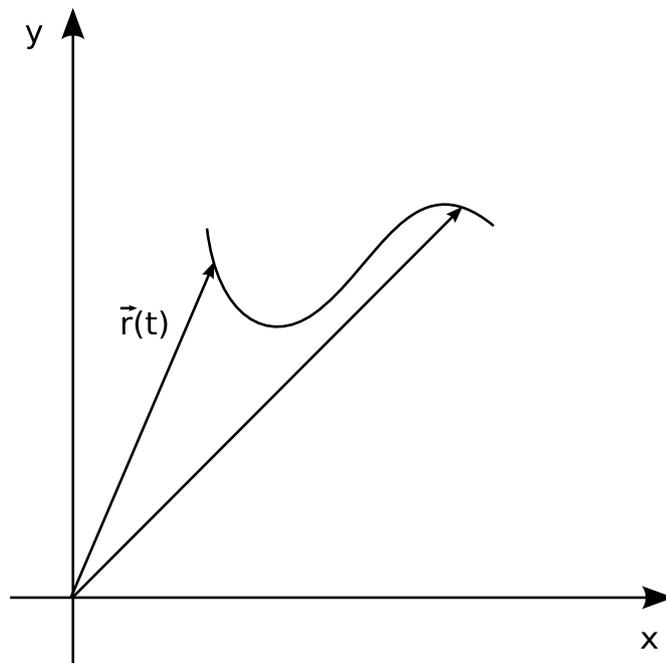
$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$$

2.2.2 Bewegung im \mathbb{R}^3

(a) Ort des Massenpunktes zur Zeit $\vec{r}(t)$

Kartesisches Koordinatensystem

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



Bemerkungen:

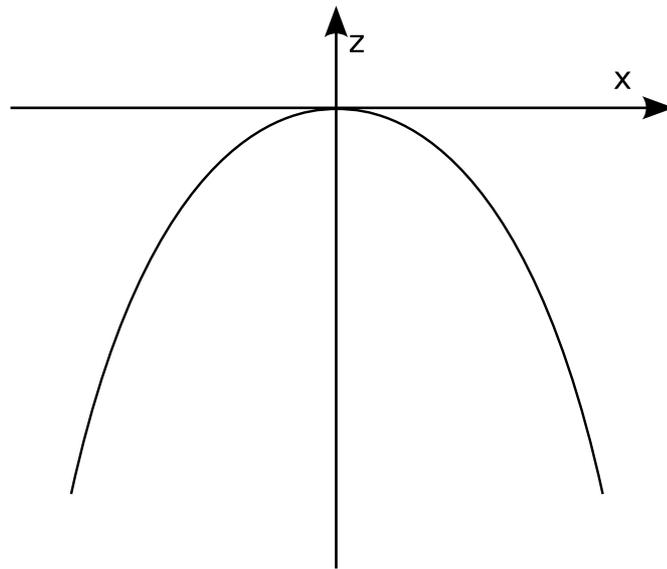
- $\vec{r}(t)$ Zeit als Parameter
allgemein $\vec{r} \quad s \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

- $\vec{r}(t)$ enthält die volle Information über die Bewegung des Massenpunktes

Beispiel: Wurfparabel im Schwerfeld der Erde

Bewegung in x-z-Ebene: $y(t) = 0$

Scheitelpunkt: $t = 0, \vec{r}(t) = 0$



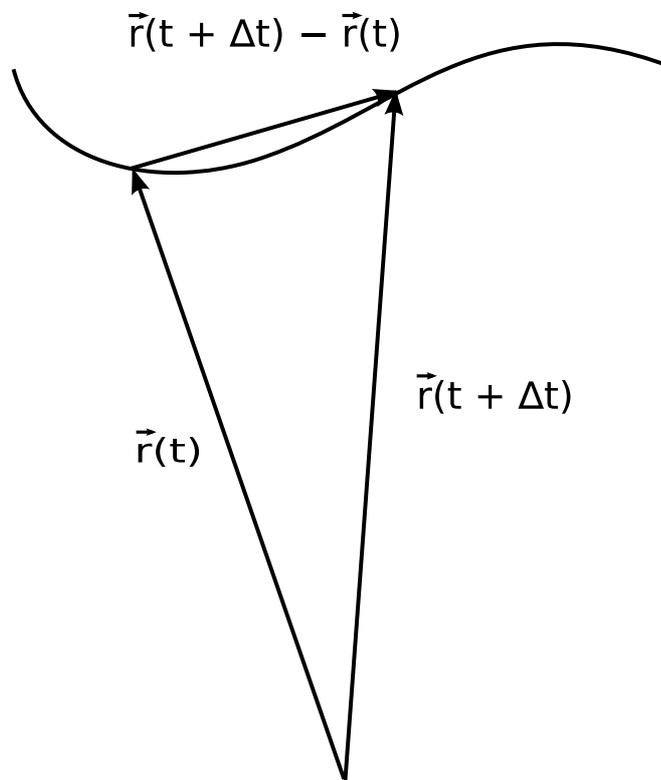
$$x(t) = v_x t$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} \text{ mit } g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x \cdot t \\ 0 \\ -\frac{gt^2}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Geschwindigkeit und Beschleunigung



Geschwindigkeit:

$$v(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{v}(t)$ ist Tangente an die Bahnkurve $\vec{r}(t)$

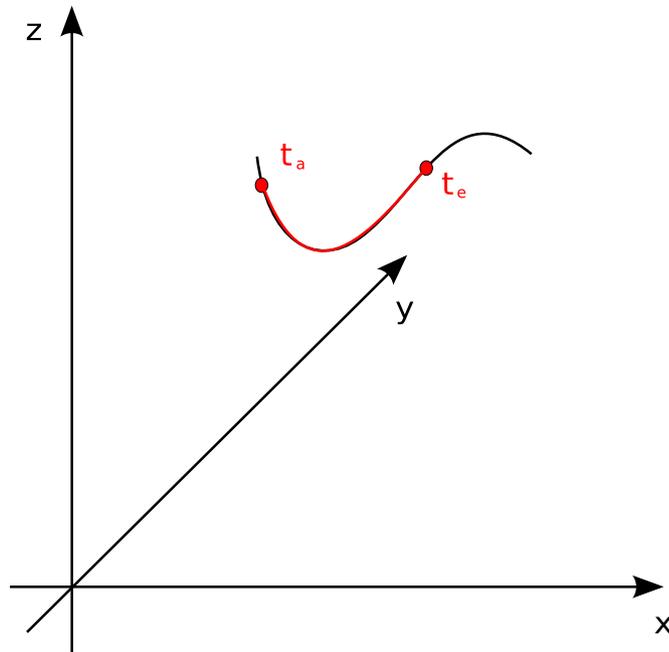
Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Beispiel: Wurfparabel

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}; \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

- (c) Bogenlänge s
= Länge der Raumkurve



$$\vec{r}_a = \vec{r}(t_a)$$

$$\vec{r}_b = \vec{r}(t_b)$$

Zerlege Intervall $[t_a, t_e]$
 $t_n = t_a + n \cdot \Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$
 mit $t_0 = t_a$; $t_N = t_e \rightarrow \Delta t = \frac{t_e - t_a}{N}$
 $\vec{r}(t_n) = \vec{r}_n$

Verbinde \vec{r}_n mit Geradenstücken
 \rightarrow Polygonzug mit der Länge L:

$$L(t_a, t_e) = \sum_{n=0}^{N-1} |\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n|$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n|}{\Delta t} \Delta t$$

$$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_a}^{t_e} |\vec{v}(t)| dt = \text{Bogenlänge}$$

Bogenlänge:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt} t' \right| dt'$$

Beachte:

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \geq 0$$

$\Rightarrow s(t)$ ist monoton wachsende Funktion, die eindeutig nach t aufgelöst werden kann:

$$t = t(s)$$

\Rightarrow Benutze s zur Parametrisierung von \vec{r} :

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t(s)) = r(s)$$

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} =: \vec{\tau} \text{ (Tangenteneinheitsvektor)}$$

$$|\vec{\tau}(s)| = 1$$

Beispiel: Wurfparabel - berechne Bogenlänge

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}; \text{ Wähle: } t_0 = 0$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{v_x^2 + g^2 t'^2} dt' \\ &= \frac{1}{2} \left[t \sqrt{v_x^2 + t^2 g^2} + \frac{v_x^2}{g} \cdot \operatorname{Arsinh}\left(t \frac{g}{v_x}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[t \sqrt{v_x^2 + t^2 g^2} + \frac{v_x^2}{g} \cdot \ln \left(t \frac{g}{v_x} + \sqrt{1 + \frac{t^2 g^2}{v_x^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

Grenzfälle:

$$g \rightarrow 0 \Rightarrow s(t) \rightarrow \frac{1}{2} \left[t v_x + \frac{v_x^2}{g} t \frac{g}{v_x} + \dots \right] = v_x t \hat{=} \text{ gleichförmige Bewegung in x-Richtung}$$

$$v_x \rightarrow 0 \Rightarrow s(t) \rightarrow \frac{1}{2} \left[t^2 g + \underbrace{\frac{v_x^2}{g} t \ln \left(\frac{tg}{v_x} + \dots \right)}_{\rightarrow 0 \text{ für } v_x \rightarrow 0} \right] = \frac{1}{2} g t^2 \hat{=} \text{freier Fall}$$

(d) (nochmal) Beschleunigung

$$\vec{a} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}$$

$$a = \dot{v} = \frac{d}{dt} |\vec{v}|$$

Betrachte nun $\vec{v}(s)$

$$\vec{v}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau}(s) \cdot v$$

$$\vec{a}(s) = \frac{d\vec{v}(s)}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\tau} \cdot v] = \vec{\tau} v + \vec{\tau} a$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} v^2 + \vec{\tau} a$$

Interpretation:

- $\vec{\tau}$ Tangenteneinheitsvektor an der Bahnkurve
- $\vec{\tau}(s) \rightarrow$ Richtung vom $\vec{\tau}$ ändert sich mit s
 \rightarrow Änderung von $\vec{\tau}$ ist Maß für Krümmung

Definition:

$$\kappa := \left| \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} \right| \quad \text{Krümmung}$$

$$\rho := \frac{1}{\kappa} \quad \text{Krümmungsradius}$$

Beispiel: Richtung von τ ändert sich nicht

$$\kappa = 0, \rho = \infty \text{ (Gerade)}$$

$$\bullet \quad \vec{\tau}^2 = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{\tau}^2 = 2\vec{\tau} \dot{\vec{\tau}} = 2v\tau \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

- $\vec{a}_{\parallel} := \vec{\tau} a, a = \dot{v}$ Beschleunigung in Bewegungsrichtung
ändert Betrag der Geschwindigkeit

- $\vec{a}_\perp := v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ Zentripetalbeschleunigung
ändert die Richtung der Bewegung
- $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$

Achtung:

$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \neq \frac{d}{dt} |\vec{v}| \quad |\vec{a}| \neq a$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{\vec{v}}{v^2} \dot{v} + \frac{\vec{a}}{v}$$

$$\vec{a}_\perp = -\frac{\vec{v}}{v} a + \vec{a} = \vec{a} - \vec{a}_\parallel$$

$$\vec{a}_\parallel = \frac{a}{v} \vec{v}$$

Beispiel: Wurfparabel

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

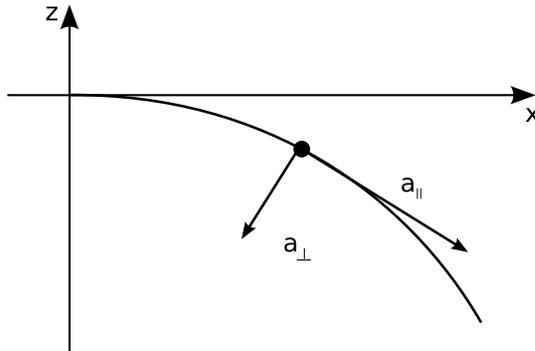
$$a = \dot{v} = \frac{g^2 t}{v}$$

$$\vec{a}_\parallel = \frac{g^2 t}{v^2} \vec{v}$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \frac{g^2 t}{v^2} \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a}_\perp &= -\frac{g^2 t}{v^2} \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ gt - \frac{g^2 v^2}{tg^2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{g^2 t}{v^2} \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ \frac{v_x^2}{gt} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{a}_\perp \cdot \vec{v} = -\frac{g^2 t}{v^2} \left(v_x^2 - \frac{v_x^2}{gt} gt \right) = 0$$



$$|\vec{a}_{\parallel}| = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}}$$

$$|\vec{a}_{\perp}| = \frac{g^2 t \sqrt{v_x^2 + \frac{v_x^4}{g^2 t^2}}}{v_x^2 + g^2 t^2} = \frac{g \cdot v_x}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}}$$

Grenzfälle:

- * $t \rightarrow 0$ $|\vec{a}_{\parallel}| = 0$, \vec{a}_{\perp} zeigt in negative z -Richtung
- * $t \rightarrow \infty$ $|\vec{a}_{\parallel}| \rightarrow g$, $|\vec{a}_{\perp}| \rightarrow 0 \hat{=}$ freier Fall
- * $v_x = 0$ $|\vec{a}_{\perp}| = 0 \hat{=}$ freier Fall
- * $g = 0$ $|\vec{a}_{\parallel}| = |\vec{a}_{\perp}| = 0 \hat{=}$ gleichförmige Bewegung in x -Richtung

(b) (i) Kreisbahn, mit Radius R

$$\vec{r}(s) = R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \end{pmatrix} \quad s = (s(t))$$

(ii) Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot v = v \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{R} \\ \cos \frac{s}{R} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\vec{r} = 0$$

(iii) Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds} v^2 + \vec{v} a \quad a = \dot{v}$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{v}}{v} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{R} \\ \cos \frac{s}{R} \end{pmatrix}; \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{R} \\ -\sin \frac{s}{R} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \underbrace{-\frac{v^2}{r^2} \vec{r}}_{=\vec{a}_\perp} + \underbrace{a \frac{\vec{v}}{v}}_{=\vec{a}_\parallel}$$

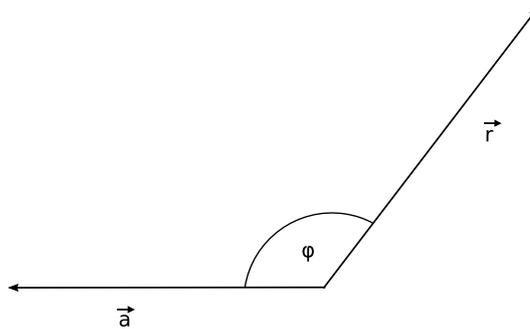
(iv) Betrachte $s(t) = \frac{a_0}{2} t^2 \Rightarrow v = a_0 t \Rightarrow a = a_0$

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{v^2}{R} = \frac{a_0^2 t^2}{R}$$

$$|\vec{a}_\parallel| = a_0$$

Frage:

Wie groß ist der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{a} ?



$$\cos \varphi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{a}|}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = \underbrace{\vec{r} \vec{a}_\perp + \vec{r} \vec{a}_\parallel}_0 = -v^2$$

$$|\vec{r}| = R$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}_\perp^2 + \vec{a}_\parallel^2 + \underbrace{2\vec{a}_\perp \vec{a}_\parallel}_0} = a_0 \sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^4}{R^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = -\frac{a_0^2 t^2}{R a_0 \sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^4}{R^2}}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos -\frac{a_0 t^2}{R \sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^4}{R^2}}}$$

Grenzfälle:

$$t = 0, \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{r}$$

$$t \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow \arccos(-1), \varphi \rightarrow \pi$$

(f) Typische Fragestellung

geg.: $\vec{a}(t), \vec{v}(t), \vec{v}(t_0)$

ges.: $\vec{r}(t)$

⋮

$$\text{Lösung : } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t')$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \vec{a}(t'')$$

2.3 Koordinatensysteme

2.3.1 Mathematischer Einschub Matrizen

Bisher Vektoren $\hat{=}$ Zahlentupel

(a) Def: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gegeben durch

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{m \text{ Spalten}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}} \right\} n \text{ Zeilen}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \text{heißt Matrix}$$

Schreibweise:

$$(A)_{ij} = a_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots m \end{array}$$

(b) spezielle Matrizen

(i) $n = m$ "quadratische" Matrix

(ii) $m = 1$ n -Tupel "Spaltenvektor"

(iii) $n = 1$ "Zeilenvektor"

(c) Rechenregeln

(i) Multiplikation mit Zahl
 $\lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda a_{ij}$

(ii) Addition von Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$
 $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$

(iii) Multiplikation $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times k}$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} b_{lj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

Regel:

Multipliziere i -te Zeile von A mit j -tem Spaltenvektor um das Element (ij) des Produktes (AB) zu bekommen.

Bemerkungen:

- $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times k}, B \cdot A$ nicht definiert für $k \neq m$
- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad A \cdot B \neq B \cdot A$
- $A \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ Zeilenvektor
 $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ Spaltenvektor
 $\Rightarrow A \cdot B = \text{"Zahl"}, B \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- $\left. \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ b \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\} A \cdot b \in \mathbb{R}^n, \quad (Ab)_i = \sum_{l=1}^m A_{il} b_l$

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Determinante einer Matrix

Für $n \times n$ -Matrix rekursiv definiert. Hier nur $n = 2$ und $n = 3$

$$n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Beispiel:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0 + 30 + 42 - 48 - 0 - 24 = 0$$

Bemerkungen:

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Falls $\det(A) = 0 \rightarrow$ mindestens eine Zeile(Spalte) ist Linearkombination der anderen Zeilen(Spalten)

(v) A^T ist die transponierte Matrix von A

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

(d) Weitere spezielle Matrizen

(i) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt Diagonalmatrix, falls

$$a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

$$A = \begin{pmatrix} x & \cdots & 0 \\ \vdots & x & \vdots \\ 0 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

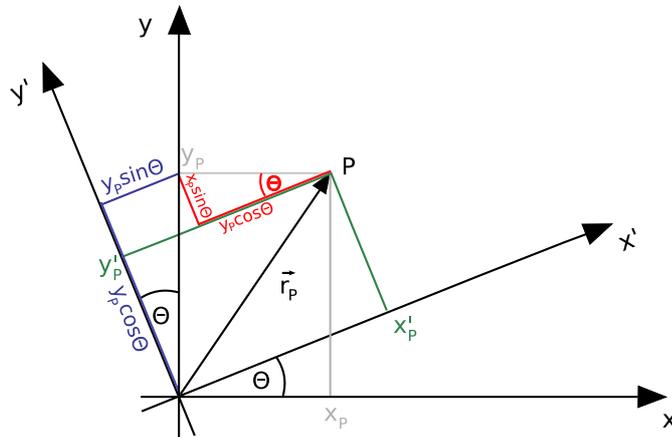
(ii) Diagonalmatrix mit $a_{ii} = 1$ heißt Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (iii) B ist die inverse Matrix von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ falls gilt
 $B \cdot A = \mathbb{1}$
 Schreibweise: $B = A^{-1}$
 Es gilt: $B \cdot A = A \cdot B = \mathbb{1}$
 ! Achtung nicht alle Matrizen haben eine Inverse (nur solche mit $\det A \neq 0$)

2.3.2 Drehungen

- (a) Drehung in 2 Dimensionen
 System S' ist gegenüber S um $\angle \Theta$ verdreht.
 Frage: Koordinaten von P in S' ?



- (i) aus der Skizze

$$y'_P = y_P \cos \Theta - x_P \sin \Theta$$

$$x'_P = x_P \cos \Theta + y_P \sin \Theta$$
- (ii) $x_P = x'_P \cos \Theta - y'_P \sin \Theta$
 $y_P = y'_P \cos \Theta + x'_P \sin \Theta$
 $\vec{r}_P = x_P \vec{e}_x + y_P \vec{e}_y = x'_P \vec{e}'_x + y'_P \vec{e}'_y$
- (iii) 2 Drehungen zuerst um Θ , dann um Φ
 $(x_P, y_P) \xrightarrow{\Theta} (x'_P, y'_P) \xrightarrow{\Phi} (x''_P, y''_P)$

$$x''_P = x'_P \cos \varphi + y'_P \sin \varphi$$

$$= (x_P \cos \Theta + y_P \sin \Theta) \cos \varphi + (y_P \cos \Theta - x_P \sin \Theta) \sin \varphi$$

$$= x_P \underbrace{(\cos \Theta \cos \varphi - \sin \Theta \sin \varphi)}_{=\cos(\Theta+\varphi)} + y_P \underbrace{(\sin \Theta \cos \varphi + \cos \Theta \sin \varphi)}_{=\sin(\Theta+\varphi)}$$

Analog:

$$y_P'' = y_P \cos(\Theta + \varphi) - x_P \sin(\Theta + \varphi) \\ \hat{=} \text{einer Drehung um } \sphericalangle (\Theta + \varphi)$$

(b) kompakte Schreibweisen

$$\begin{pmatrix} x_P' \\ y_P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \rightarrow (x_1, y_1)$$

unterdrücke Index "P"

$$\vec{x} = O\vec{x} \text{ mit } O = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Frage: Welche Eigenschaften muss Matrix O haben, damit sie eine Drehung beschreibt?

(i) $\det O = 1$

(ii) Zeilen und Spalten müssen Länge 1 haben

(iii) Zeilen und Spalten müssen orthogonal zueinander sein

(iv) $O^T = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad O^T \cdot O = \mathbb{K}$

(Bemerkung (ii)+(iii) \leftrightarrow (iv))

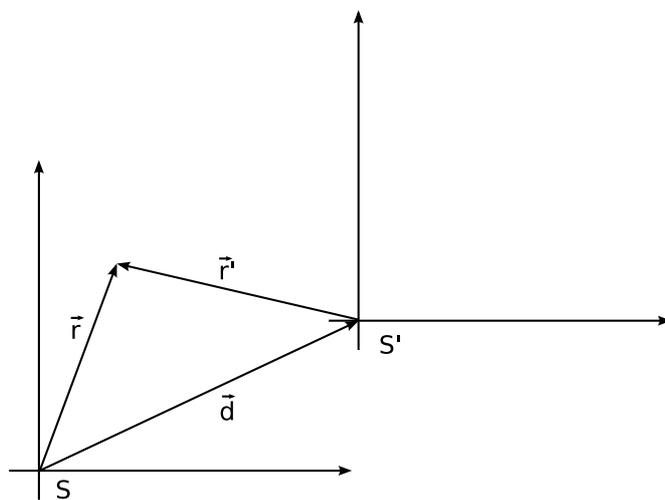
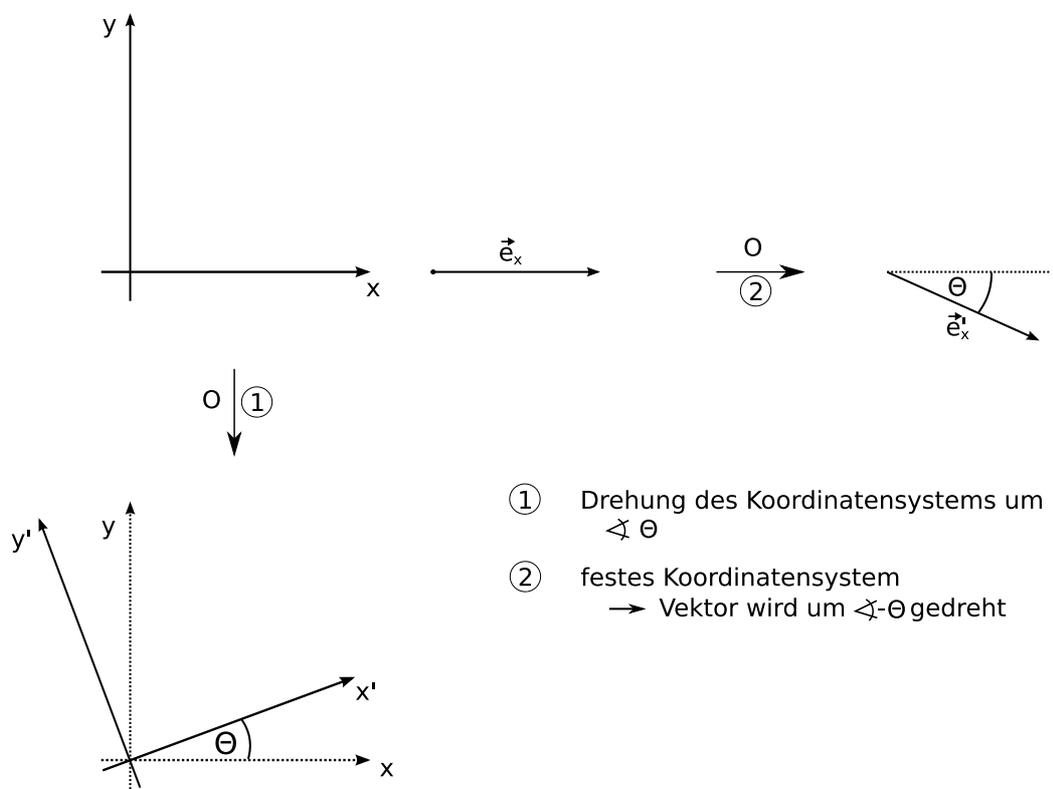
Matrizen mit den Eigenschaften (i) - (iv) nennt man orthonormale Matrizen

Betrachte: $|O\vec{x}| = |\vec{x}|$

Beweis: $|O\vec{x}|^2 = (O\vec{x})^T(O\vec{x}) = \vec{x}^T \underbrace{O^T O}_{\mathbb{K}} \vec{x} = |\vec{x}|^2$

Wende $O = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$ auf einen \vec{e}_x an.

$$O\vec{e}_x = \begin{pmatrix} \cos \Theta \\ -\sin \Theta \end{pmatrix}$$



$$O_{S'} = O_S + \vec{d}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$$

(c) Drehung in 3 Dimensionen (\rightarrow orthogonale 3×3 Matrizen)

(i) Drehung um Koordinatenachsen

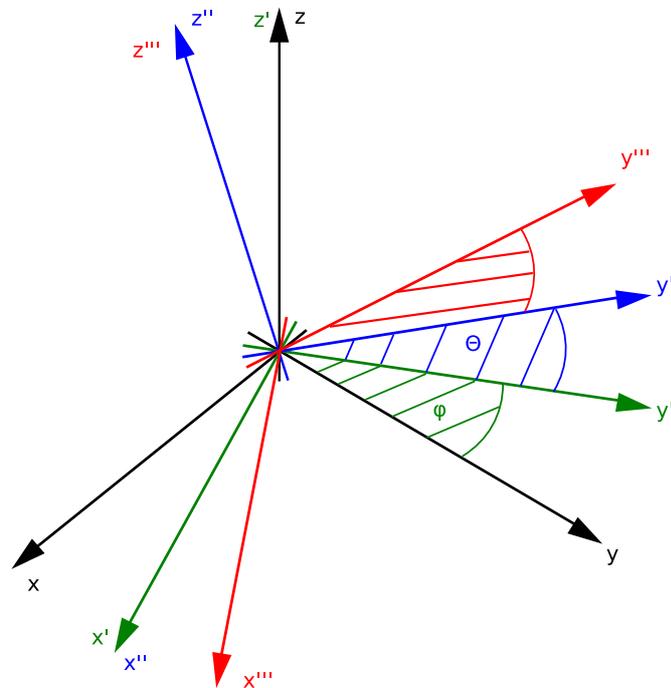
$$\begin{array}{l} \text{z-Achse} \\ O_z = \begin{pmatrix} \cos \Theta_z & \sin \Theta_z & 0 \\ -\sin \Theta_z & \cos \Theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{x-Achse} \\ O_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta_x & \sin \Theta_x \\ 0 & -\sin \Theta_x & \cos \Theta_x \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{y-Achse} \\ O_y = \begin{pmatrix} \cos \Theta_y & 0 & -\sin \Theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta_y & 0 & \cos \Theta_y \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) Jede beliebige Drehung läßt sich folgendermaßen darstellen:

- (1) Drehung um z -Achse $\triangleleft \varphi$
 - (2) Drehung um x -Achse $\triangleleft \Theta$
 - (3) Drehung um z -Achse $\triangleleft \psi$
- φ, Θ, ψ 3 EULER-Winkel
 $O = O_z(\psi)O_x(\Theta)O_z(\varphi)$



$$\begin{aligned}
 (x, y, z) &\xrightarrow{\varphi} (x', y', z') \\
 &\xrightarrow{\Theta} (x'', y'', z'') \\
 &\xrightarrow{\psi} (x''', y''', z''')
 \end{aligned}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ in } K, \text{ Drehung } K \rightarrow K'$$

$$\vec{e}_{(x\ y\ z)^T} = O \vec{e}_{(x' y' z')^T} \text{ ("passive Drehung")}$$

$$= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

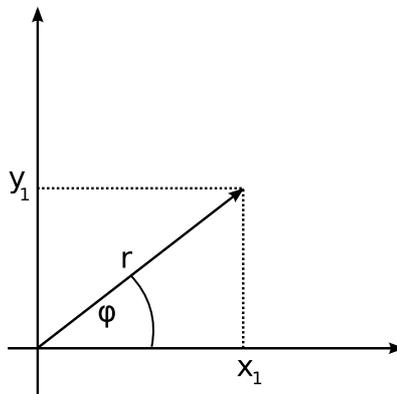
$$= x' \vec{e}'_x + y' \vec{e}'_y + z' \vec{e}'_z \leftarrow$$

gedrehter Vektor in K

$$\begin{aligned}
 \vec{r}' &= x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z \\
 O \vec{r}' &= x' \vec{e}'_x + y' \vec{e}'_y + z' \vec{e}'_z = \vec{r} \\
 \Rightarrow \vec{r}' &= O^{-1} \vec{r} \rightarrow \text{"aktive Drehung"}
 \end{aligned}$$

2.3.3 Wechsel der Variablen in 2 und 3 Dimensionen vorteilhaft. Verwende der Symmetrie des Problems angepasste Variablen

(a) Polarkoordinaten



$$(x_1, y_1) \rightarrow (r, \varphi)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = r \cos \varphi \\ y_1 = r \sin \varphi \end{array} \right\} (*)$$

(r, φ) -Ebene wird Punkt für Punkt in (x, y) -Ebene abgebildet.

$$\begin{aligned} r &\neq 0 \\ r &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y_1}{x_1} \end{aligned}$$

Jeder Punkt (x_1, y_1) ist eindeutig einem (r, φ) zugeordnet, d.h. $(*)$ ist umkehrbar.

$r = 0$ Alle Punkte $(=, \varphi)$ werden auf $(x_1 = 0, y_1 = 0)$ abgebildet.

- (b) Kommentare zur allgemeinen Variablentransformation in d -Dimensionen
 $(x_1, x_2, \dots, x_d) \leftrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_d)$

Forderungen:

1. Jeder Punkt (x_1, x_2, \dots, x_d) ist durch die neue Koordinate (y_1, y_2, \dots, y_d) darstellbar.
2. Die Transformation soll fast immer lokal umkehrbar sein.
(*) (+)

(*) nicht umkehrbar, nur in Bereichen mit Dimensionen $d' < d$

(+) zu jedem (x_1, x_2, \dots, x_d) gehört genau ein (y_1, y_2, \dots, y_d)

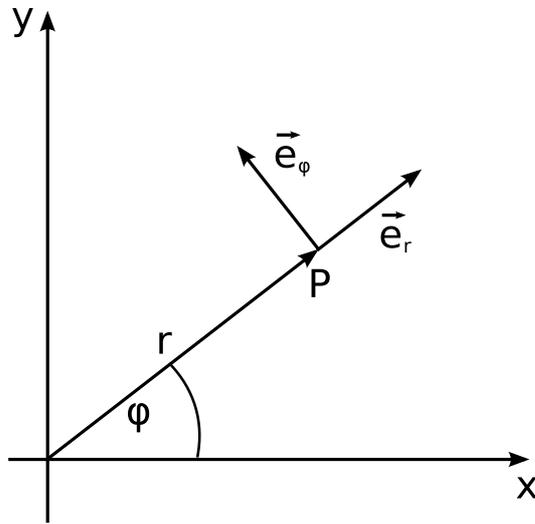
- (c) Nochmal Polarkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = r \cdot \vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ sind Einheitsvektoren, orthogonal \rightarrow lokales Koordinatensystem



$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Beispiel: Massenpunkt auf Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit

kartesische Koordinaten:

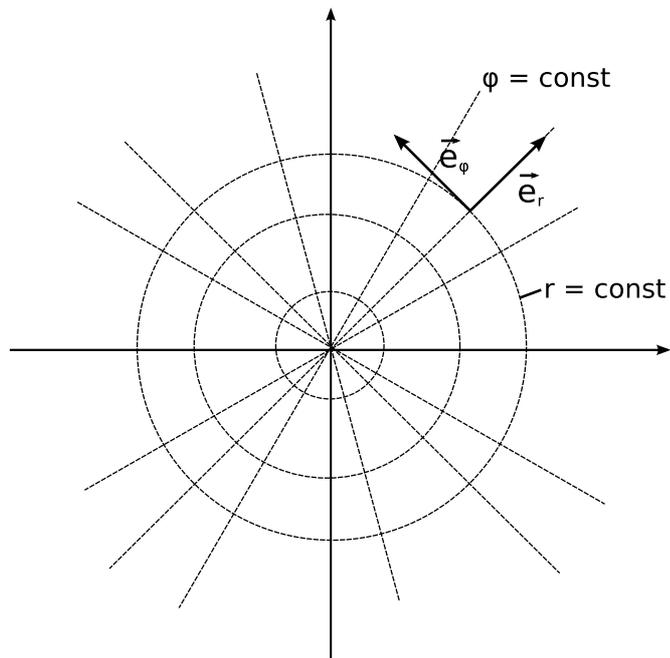
$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = R(\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y) \quad \varphi(t) = \omega t, \quad \dot{\varphi} = \omega$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{r}(t) = R\vec{e}_r \quad \text{mit } \dot{\varphi} = \omega$$

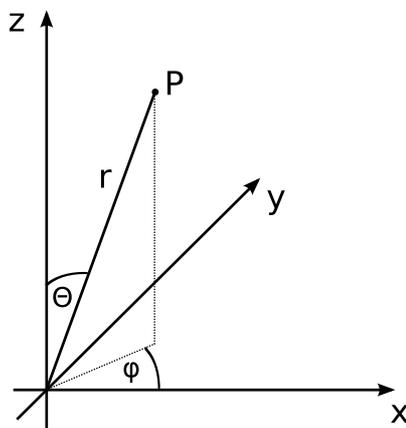
$$\dot{\vec{r}}(t) = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$



(d) Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \Theta \cos \varphi \\ r \sin \Theta \sin \varphi \\ r \cos \Theta \end{pmatrix}$$



φ : \sphericalangle in x - y -Ebene

Θ : \sphericalangle zwischen \vec{r} und z -Achse

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \Theta \cos \varphi \\ \sin \Theta \sin \varphi \\ \cos \Theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor in e -Richtung

$$\vec{e}_\Theta \perp \vec{e}_r; \vec{e}_\Theta \perp \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r \times \vec{e}_\Theta = \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\Theta = \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \varphi \\ \cos \Theta \sin \varphi \\ -\sin \Theta \end{pmatrix}$$

2.4 Inertialsystem und Galilei-Transformation

Definition:

Ein Inertialsystem (IS) ist ein Koordinatensystem, in dem sich ein kräftefreier Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Bemerkungen:

- (i) Inertialsystem in der Praxis?
hier pragmatisches Vorgehen: es gibt ein IS
- (ii) Im IS ist die Beschreibung einfacher

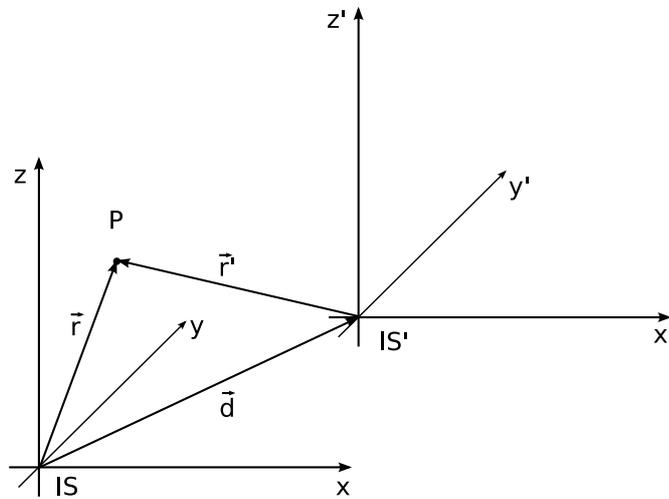
Transformation, die ein IS in ein anderes IS überführt, nennt man Galilei-Transformation (GT).

Frage: Wie sieht die allgemeinste GT aus?

$$\text{Bahnkurve im IS } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
$$\text{IS}' \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

2.4.1 Eigentliche GT

- (i) Verschiebung, gleichförmige Bewegung
 $\vec{d}(t)$ Verschiebung des Ursprungs von IS bzgl. IS'



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$$

Kräftefreier Massenpunkt IS: $\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = 0$

im IS' $\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = 0 \leftarrow$ hier stimmt doch was net

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}}_0 - \frac{d^2 \vec{d}}{dt^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \underbrace{\vec{w}t}_{(*)} + \underbrace{\vec{b}}_{(+)}$$

(*) gleichförmige Bewegung von IS' mit der Geschwindigkeit \vec{w}

(+) konstante Verschiebung des Nullpunktes

(ii) Drehungen

Koordinaten IS' sind bzgl. IS verdreht

$$\vec{r}' = \underbrace{O^{-1}}_{\text{3 EULER Winkel}} \vec{r}$$

hier: $\det O = 1$; ($\det O = -1 \rightarrow$ später)

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dO^{-1}}{dt} \vec{r} + O^{-1} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \underbrace{\frac{d^2 O^{-1}}{dt^2} \vec{r}}_{(*)} + 2 \underbrace{\frac{dO^{-1}}{dt}}_{(*)} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \underbrace{O^{-1} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}}_{=0} \stackrel{!}{=} 0$$

- (*) falls nicht $\equiv 0$
 - Zentripetalbeschleunigung
 - IS' ist kein Inertialsystem

(iii) Verschiebung des Zeitnullpunktes

$$t' = t + s$$

Zusammen:

$$\vec{r}' = O^{-1}\vec{r} - \vec{w}t - \vec{b}$$

$$t' = t + s$$

Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}}' = O^{-1}\dot{\vec{r}} - \vec{w}$$

Beschleunigung

$$\ddot{\vec{r}}' = O^{-1}\ddot{\vec{r}} \leftarrow \text{ist das hier richtig??}$$

Parameter

$$\begin{array}{cccccc} 3 & +3 & +3 & +1 & =10 \\ O & \vec{w} & \vec{b} & s & \end{array}$$

Bemerkung:

$$(i) \ g : \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{r}' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O^{-1}\vec{r} - \vec{w}t - \vec{b} \\ t + s \end{pmatrix}$$

bildet eine Gruppe: eigentliche ($\det O = +1$) orthochrome
 ($t' = +t + s$) Galilei-Gruppe G_+^{\uparrow} $\leftarrow t' = \pm t + s$
 $\leftarrow \det O = \underline{+1}$

”Beweis in Übung Blatt 07“

(ii) GT ist ein Spezialfall der Lorentztransformation. LT respektiert spezielle Relativitätstheorie.

Hauptunterschied: LT Transformation der Zeit

(iii) Ein abgeschlossenes n -Teilchensystem hat genau 10 Erhaltungsgrößen die sich mit der Zeit ändern.

2.4.2 Uneigentliche GT

$$\det O = -1, \quad t' = -t + s$$

(i) $t \rightarrow -t + s$ Zeitumkehrung

(a) $\underbrace{\vec{a}}_{(*)} = -k\vec{x}$ ist invariant unter $t \rightarrow -t$

(*) $\frac{d\vec{x}^2}{dt^2}$

\Rightarrow Alle physikalisch möglichen Bahnkurven können in beide Richtungen durchlaufen werden.

(b) $\vec{a} = -k\vec{x} + k'\vec{v}$

$t \rightarrow -t \Rightarrow \vec{a} = -k\vec{x} - k'\vec{v}$ nicht invariant unter $t \rightarrow -t$

$t \rightarrow -t \hat{=}$ anderer physikalischer Prozeß

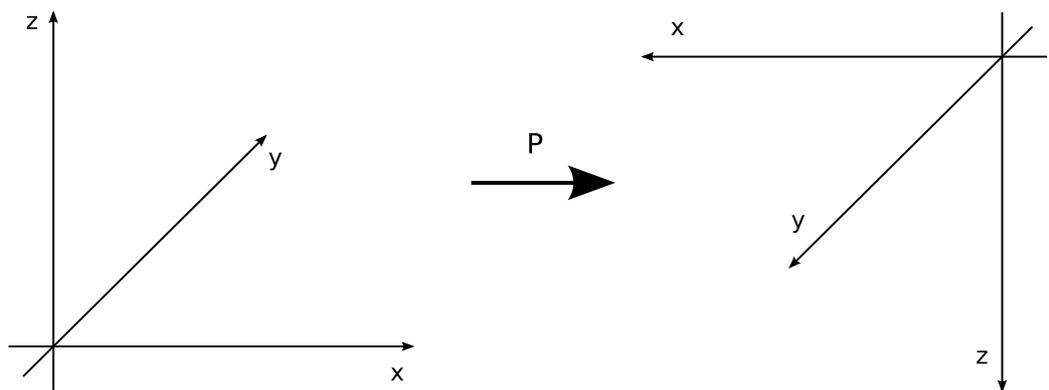
(ii) $\det O = -1$

Jede Matrix O kann geschrieben werden als

$$O = \underbrace{R}_{(*)} \cdot \underbrace{P}_{(+)}$$

(*) Drehmatrix $\det R = 1$

(+) $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P \hat{=} \text{Raumspiegelung}$



P: Raumspiegelung

rechtshändiges Koordinatensystem \longrightarrow linkshändiges Koordinatensystem

3 Newton'sche Axiome

3.1 Vorbemerkung

3.1.1 Grundlegende Begriffe

- (i) Teilchen: Definiert durch Energie-Impuls-Beziehung

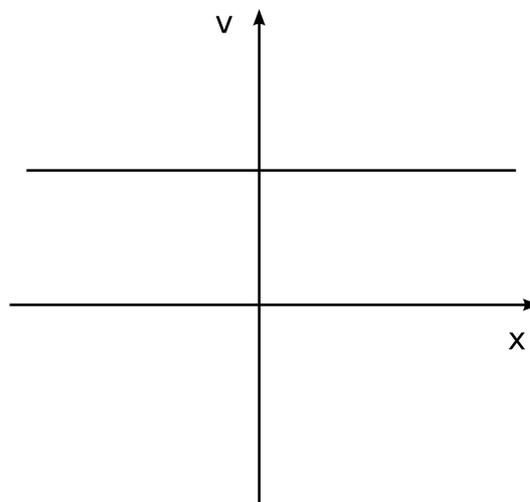
relativistisch: $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$, c : Lichtgeschwindigkeit
 p : Impuls des Teilchens

$$\frac{p}{m} \ll c$$

$$\Rightarrow \text{nicht relativistisch: } E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{kinetische Energie}} + \dots$$

- (ii) Masse: charakteristische Konstante des Teilchens T
- (iii) $d = 3$ -dimensionaler Raum
Jedes T hat d Freiheitsgrade(=Anzahl der unabhängigen Koordinaten zur Festlegung des Ortes)
- (iv) Kraft wirkt von außen auf T
- (v) Zustände sind festgelegt durch \vec{r} und \vec{v} (für jedes T)
→ Zustandsraum, Phasenraum

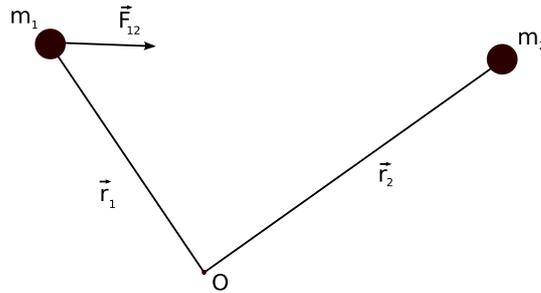
Beispiel: $d=1$, T bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit



3.1.2 Kräfte

(a) Beispiele

(i) Gravitationskraft



von m_1 auf m_2 ausgeübte Kraft:

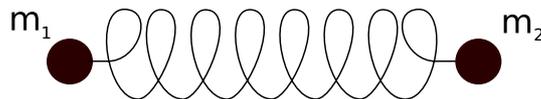
$$F_{21} = G \frac{m_2 m_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad \text{mit } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

(ii) Coulombkraft $m_1 \rightarrow e_1$

$m_2 \rightarrow e_2$

$$\Rightarrow F_{21} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad \text{mit } \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$$

(iii) harmonische Kraft



$$\vec{F}_{21} = k|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad \sim \text{Auslenkung, anziehend}$$

(iv) konstante Kraft

Beispiel: Gravitationskraft nahe der Erdoberfläche

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \quad \text{mit } |\vec{g}| = \frac{GM_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}^2}$$

Richtung: zum Erdmittelpunkt

(v) Lorentz-Kraft

Kraft auf ein T mit Ladung e

$$\vec{F}_L = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{E} \text{ elektrisches Feld}$$

$$\vec{B} \text{ magnetische Induktion}$$

(vi) Reibungskraft

$$\vec{F}_R = -f(v)\vec{v}$$

$f = \text{konstant}$ STOCKES'sche Reibung

$f \sim v$ NEWTON'sche Reibung

(b) innere und äußere Kräfte

innere Kräfte: von den T eines Systems aufeinander ausgeübte Kräfte

äußere Kräfte: haben den Ursprung außerhalb des Systems

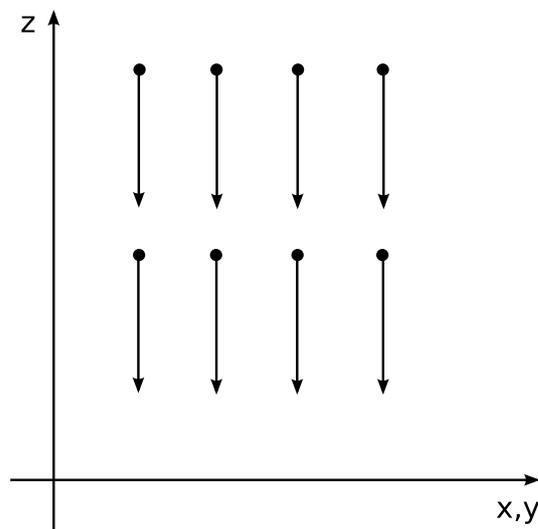
abgeschlossenes System: falls keine äußeren Kräfte vorliegen

(c) Kraftfeld

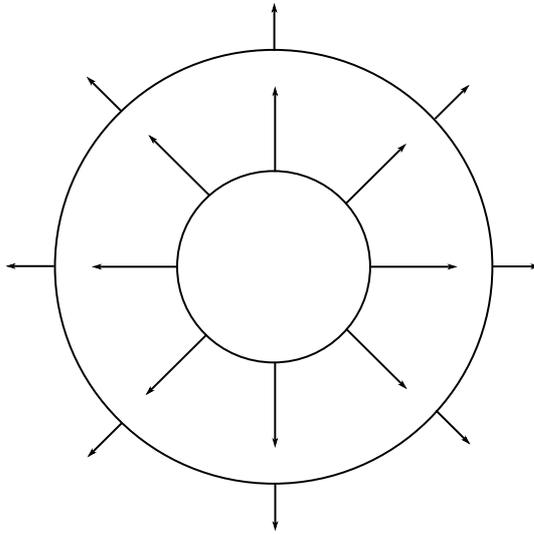
äußere Kräfte $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ jedem Punkt \vec{r} wird ein Vektor $\vec{F}(\vec{r})$ zugeordnet

→ Kräftefeld

Beispiele:



$$\vec{F}(\vec{r}) = -mg\vec{e}_z$$



$$\vec{F}(\vec{r}) \sim \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \frac{1}{|\vec{r}|^2}$$

allgemeines Vektorfeld \vec{V}
 $\vec{V} : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Skalarfeld S

$$S : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Beispiel: Temperaturverteilung im Raum

3.2 Newton'sche Axiome

NEWTON 1687 "Principia Mathematica"

1. Kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig und gleichförmig
2. Die Änderung des Impulses ist gleich der auf den Körper wirkenden Kraft
3. Die Kräftewirkung zweier Körper aufeinander sind entgegengesetzt gleich
 ("actio = reactio")

Erläuterung und Interpretation

- zu 1:
- “geradlinig”: Bewegung auf einer Geraden
 - “gleichförmig”: konstante Geschwindigkeit
 - “kräftefrei”: Körper ist sich selbst überlassen, kein anderer Körper, keine Gravitationskraft, kein elektromagnetisches Feld
 - “Körper”: Massenpunkt, mechanisches System ohne Freiheitsgrade
 - Definition von IS
IS = Koordinatensystem in dem das 1. NEWTON'sche Axiom gilt

- zu 2:
- gilt nur im IS
 - Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$
 - $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$
 - $m \neq m(t) \Rightarrow m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

Dieselbe Kraft \vec{F} wirkt auf 2 Körper (1-dimensional)

$$\left. \begin{array}{l} F = m_1 a_1 \\ F = m_2 a_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

\Rightarrow messe Beschleunigungen
 \Rightarrow Aussage über Masse

1. Axiom ist Spezialfall des 2. Axioms mit $\vec{F} = 0$

zu 3: (“actio =reactio”)

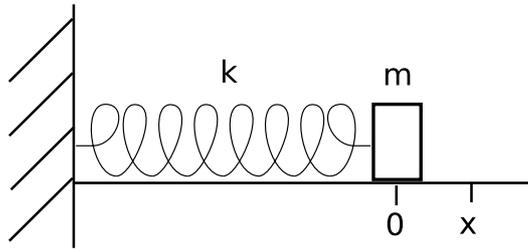
- 2 Massenpunkte: m_1, m_2
 F_{12} : Kraft von m_2 auf m_1
 F_{21} : Kraft von m_1 auf m_2
 $\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Gesamtimpuls $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
 $\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 \stackrel{2.Axiom}{=} F_{12} + F_{21} \stackrel{3.Axiom}{=} 0$
 \Rightarrow Gesamtimpuls ist erhalten

2 Zusätze

- Superpositionsprinzip: wirken mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt
 → resultierende Kraft ist gegeben durch: $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$
- 2 Massenpunkte: Kräfte wirken auf Verbindungslinie

Beispiele

- (i) $F = -kx$



NEWTON $\Rightarrow m\ddot{x} = -kx$

- (ii) Gravitation

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

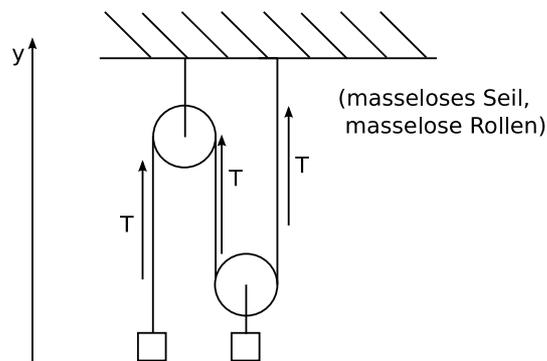


NEWTON

$$\Rightarrow m_1 \ddot{\vec{r}} = G \frac{m_1 m_2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

- (iii) ATWOOD-Maschine



Frage: a_1 , a_2 , Spannung im Seil T ?

$$m_2 : 2T - m_2g = m_2a_2$$

$$m_1 : t - m_1g = m_1a_1$$

$$3. \text{ Gleichung } y_1 = -2y_2$$

$$a_1 = -2a_2$$

$$\Rightarrow a_1 = g \frac{2m_2 - 4m_1}{4m_1 + m_2}$$

$$a_2 = g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{3m_1m_2g}{4m_1 + m_2}$$

3.3 Mathematischer Einschub Gradient, Rotation, Divergenz

(a) Vektorfeld

$$\vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{r}) \\ f_2(\vec{r}) \\ f_3(\vec{r}) \end{pmatrix} : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Skalarfeld

$$\varphi : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

(b) Partielle Ableitung

geg: $\varphi(\vec{r})$

Frage: Wie ändert sich φ falls $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$

Beachte zunächst die Änderung von φ entlang einer Koordinatenachse:

\Rightarrow effektiv hängt φ dann nur von 1 Variablen ab

⇒ wende bekannte Regeln an

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1 + h, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{h} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{x_2, x_3}$$

partielle Ableitung von φ nach x_1, x_2, x_3 sind konstant

$$\text{Schreibweisen: } \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{x_2, x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \partial_{x_1} \varphi = \varphi_{x_1}$$

Differentiationsregeln

wie bei der Abhängigkeit von 1 Variablen

Beispiel:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 x_2) + x_1 x_3$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = x_2 \cos(x_1 x_2) + x_3$$

Mehrfache und gemischte Ableitung

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_i^n} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x_i^{n-1}} \quad (\text{rekursiv definiert})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

Falls φ stetige partielle Ableitung bis mindestens 2. Ordnung

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$$

Kettenregel

$$(1) \quad \varphi = \varphi(x_1(t_1), x_2(t_2), x_3(t_3))$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt_1}$$

$$(2) \quad \varphi = \varphi(\vec{r}(t)) = \varphi(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}$$

$$\Rightarrow d\varphi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i \quad \text{totales Differential der Funktion } \varphi$$

(c) Gradient, Rotation, Divergenz

(i) Gradient

geg.: stetig differenzierbare skalare Funktion φ

Dann: $\text{grad } \varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ Vektorfeld, Gradientenfeld

Definition: Nabla Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

Richtung ist wichtig Ableitung wirkt immer nach Rechts

Interpretation

Betrachte infinitesimale Änderung von $\varphi : \vec{r} = \vec{r}_0 + d\vec{r}$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + d\varphi = \varphi(\vec{r}_0) + \vec{\nabla} \varphi d\vec{r}$$

$$d\varphi = 0 \text{ falls } \vec{\nabla} \varphi \perp d\vec{r}$$

$d\varphi$ ist am größten, falls $d\vec{r}$ in Richtung $\vec{\nabla} \varphi$ zeigt

(ii) Divergenz

geg: Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r}) = (f_1, f_2, f_3)$

$$\text{div } \vec{f} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \text{ (=Skalar)}$$

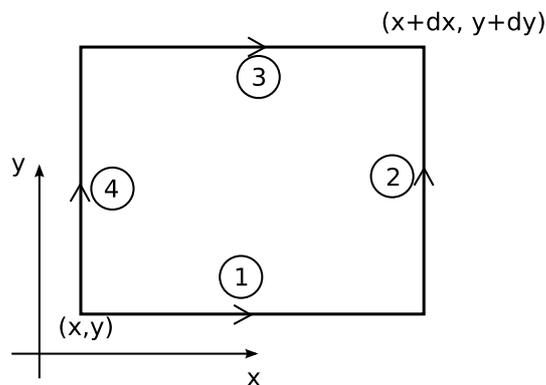
Beschreibt den Teilchenfluss durch eine bestimmte Fläche

(iii) Rotation

geg: Vektorfeld $\vec{f}(f_1, f_2, f_3) = (f_x, f_y, f_z)$

$$\text{rot } \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{f}$$

Interpretation



Behauptung:

$$(\text{rot } \vec{f})_z \underbrace{dxdy}_{\text{Fläche d. Rechtecks}} = \int_{\square} \vec{f} d\vec{r} \quad \text{gegen den Uhrzeigersinn}$$

$$z = 0 \quad \textcircled{1}, \textcircled{3} \quad dy = 0$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \quad dx = 0$$

$$\int_{\square} \vec{f} d\vec{r} = \int_x^{x+dx} [f_x(\underbrace{\xi, y}_1) - f_x(\underbrace{\xi, y+dy}_3)] d\xi + \int_y^{y+dy} [f_y(\underbrace{x+dx, \eta}_2) - f_y(\underbrace{x, \eta}_4)] d\eta$$

$$\stackrel{dx, dy \rightarrow 0}{=} - \int_x^{x+dx} \left. \frac{\partial f_x}{\partial y} \right|_{(x,y)} dy d\xi + \int_y^{y+dy} \left. \frac{\partial f_y}{\partial x} \right|_{(x,y)} dx d\eta$$

$$= \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dxdy = (\text{rot } \vec{f})_z dxdy$$

- analog für y - z -Ebene und x - z -Ebene

- Verallgemeinerung

Satz von STOKES

$$\int_O \text{rot } \vec{f} d\vec{A} = \underbrace{\int_C \vec{f} d\vec{r}}_{\text{Kurvenintegral}}$$

Integral über Oberfläche O mit Berandung C

3.4 Erhaltungssätze

Eine physikalische Größe G ist “erhalten”, falls sie nicht von der Zeit abhängt, d.h. falls

$$\frac{d}{dt}G = 0 \quad G \text{ ist "Integral der Bewegung"}$$

3.4.1 Impulserhaltung

folgt aus 2. und 3. NEWTON'schen Axiom)

Betrachte 2 Massenpunkt a, b :

$$t = t_1 : \vec{p}_a(t_1) \vec{p}_b(t_1)$$

$$t = t_2 : \vec{p}_a(t_2) \vec{p}_b(t_2)$$

$$2. \text{ Axiom} \Rightarrow \vec{p}_a(t_2) - \vec{p}_a(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ab} dt \quad 3. \text{ Axiom} \int_{t_1}^{t_2} -\vec{F}_{ba} dt$$

$$2. \text{ Axiom} \equiv -(\vec{p}_b(t_2) - \vec{p}_b(t_1))$$

$$\Rightarrow \vec{p}_a(t_1) + \vec{p}_b(t_1) = \vec{p}_a(t_2) + \vec{p}_b(t_2)$$

3.4.2 Energieerhaltung

(a) 1 Raumdimension

(hier $m = \text{konst.}$) betrachte $F = F(x)$

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} v$$

$$\Leftrightarrow F dx = mv dv$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x F(x') dx' = \int_{v_0}^{v(x)} mv' dv' \quad v(x_0) = v_0$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x F(x) dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Definition: x

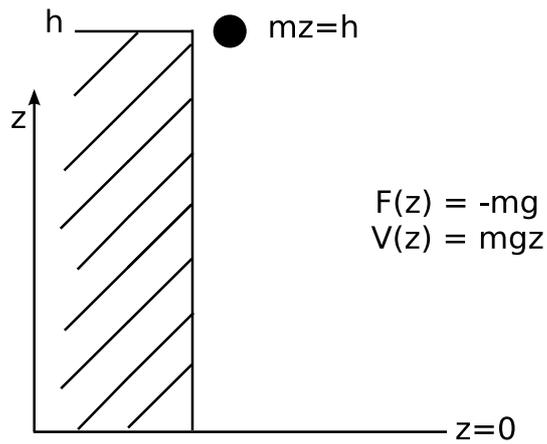
$V(x) := - \int_{x_0}^x F(x) dx$ potentielle Energie

$$E := \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{Energie}$$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{konstant auf der Bahnkurve des Massenpunktes}$

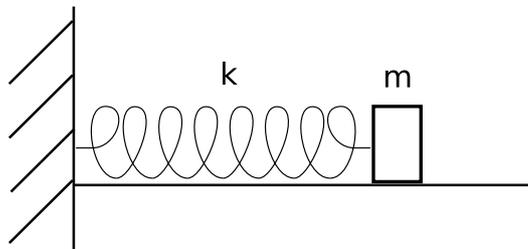
Beispiele:

(i) freier Fall



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}m(gt)^2 + mg(h - \frac{1}{2}gt^2) = mgh$$

(ii) Feder



$$F(x) = -kx \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

$$\Rightarrow x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A^2 + B^2)$$

Bemerkungen:

(i) Sowohl E als auch V hängen von (beliebigen) x_0 ab, $E - V$ nicht!

(ii) Wähle ein für das Problem passendes x_0

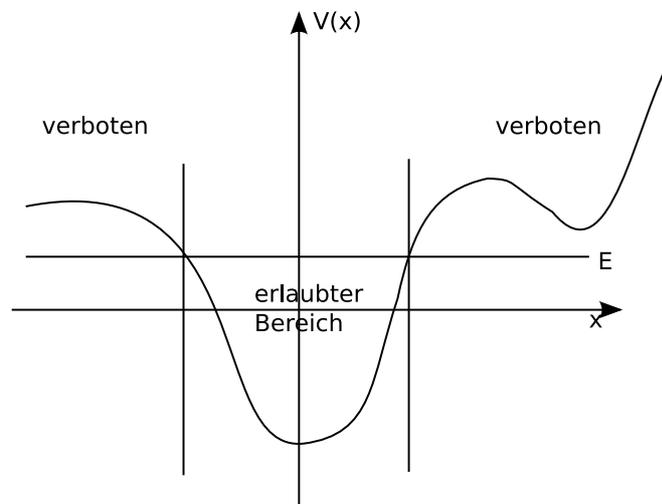
Beispiel: $F = -mg \Rightarrow x_0 = 0$

(iii) $\int_{x_1}^{x_2} F(x') dx' \equiv W_{x_1 \rightarrow x_2}$

$$= \frac{1}{2}mv^2(x_1) - \frac{1}{2}mv^2(x_2)$$

= Arbeit, die am Massenpunkt verrichtet wird,
um von x_1 zu x_2 gelangen

(iv) Potentialdiagramm



(v) $E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}$

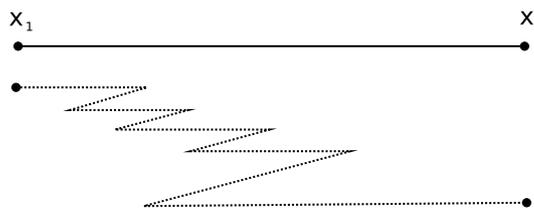
$$\rightarrow \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2}{m}(E - V) \rightarrow \int_{t_0}^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}}$$

(i) $\rightarrow t = t(x)$

(ii) $\rightarrow x = x(t)$

(b) konservative Kräfte in 1 Dimension

(i) $F = F(x)$



$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ ist unabhängig vom genauen Weg des Massenpunktes,
hängt nur von x_1 und x_2 ab.

$$(ii) \left. \begin{array}{l} F = F(t) \\ F = F(v) \end{array} \right\} \Rightarrow W_{x_1 \rightarrow x_2} \text{ hängt vom Weg ab}$$

Beispiel: Reibung $W_{\text{Reibung}} = -\mu mg|\Delta x|$

Definition:

F ist konservativ, d.h. $W_{x_1 \rightarrow x_2}$ hängt nur von x_1 und x_2 ab.
 $\leftrightarrow F = F(x) \quad (F \neq F(t, v))$

Bemerkungen:

$$(i) V(x) = - \int_{x_0}^x F(x)dx \text{ ist potentielle Energie}$$

$$\Leftrightarrow F(x) \text{ konservativ}$$

(ii) falls $\int_{x_0}^x F(x)dx$ von Details abhängt, macht die Definition von $V(x)$
keinen Sinn

(c) Konservative Kräfte in 3 Dimensionen

analog zum 1-dimensionalen Fall

Definition:

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ist konservativ, falls $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} F d\vec{r}$ unabhängig vom Weg ist.

- $\vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$
- 1D: es gibt nur einen Weg
- 3D: es gibt ∞ viele Wege

Theorem

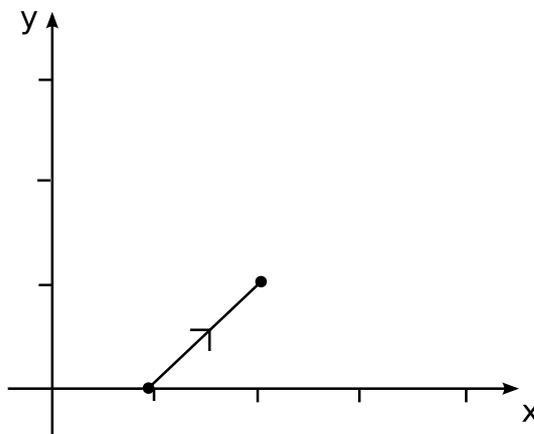
$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ist konservativ $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = 0$

Bemerkungen:

(i) Falls \vec{F} konservativ ist kann Potential definiert werden $V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} F(\vec{r}') d\vec{r}'$

(ii) Wegintegral $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} F d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} F(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$

Beispiel:



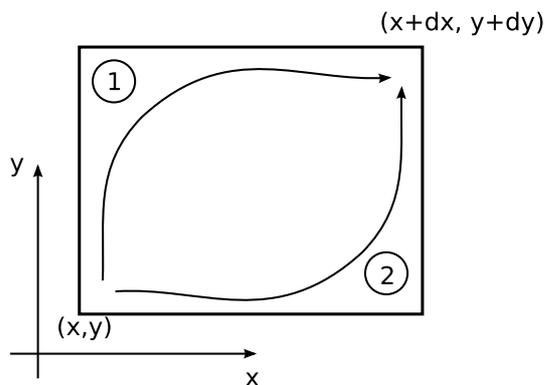
$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r}$$
$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0; \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$$
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^1 \frac{2t+1}{\sqrt{2t^2+2t+1}} dt = \sqrt{5} - 1$$

Beweis des Theorems:

“ \Rightarrow ”

bekannt:



$$\int_R \vec{F} d\vec{r} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z dx dy$$

nach Voraussetzung

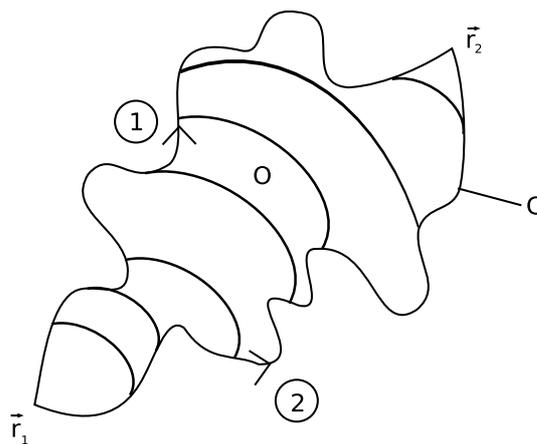
$$\int_1 \vec{F} d\vec{r} = \int_2 \vec{F} d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \int_R \vec{F} d\vec{r} = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = 0$$

analog für x - und y -Komponente von $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ist notwendige Bedingung für Wegunabhängigkeit

“ \Leftarrow ”



Satz von STOKES:

$$\int_O (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A} = \int_C \vec{F} d\vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv 0 \text{ auf } O \Rightarrow \int_C \vec{F} d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \int_1 \vec{F} d\vec{r} = \int_2 \vec{F} d\vec{r}$$

→ Wegunabhängigkeit

Bemerkung:

Falls \vec{F} konservativ ist gilt:

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{F} d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r}), \vec{F} \text{ ist ein Gradientenfeld}$$

$$\text{rot } \vec{F} = -\text{rot grad } V \equiv 0$$

(d) Energieerhaltung in 3 Dimensionen

2. NEWTON'sches Axiom

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \stackrel{\text{konst}}{=} m \vec{a} = m \begin{pmatrix} V_x \frac{dV_x}{dx} \\ V_y \frac{dV_y}{dy} \\ V_z \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}$$

- 3 Gleichungen
- multipliziere dx, dy, dz
- addiere

$$\underbrace{F_x dx + F_y dy + F_z dz}_{\vec{F} d\vec{r}} = m \left(V_x \frac{dV_x}{dx} dx + V_y \frac{dV_y}{dy} dy + V_z \frac{dV_z}{dz} dz \right)$$

Integriere

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} + E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}_0^2; \quad \vec{v}(\vec{r}_0) = \vec{v}_0$$

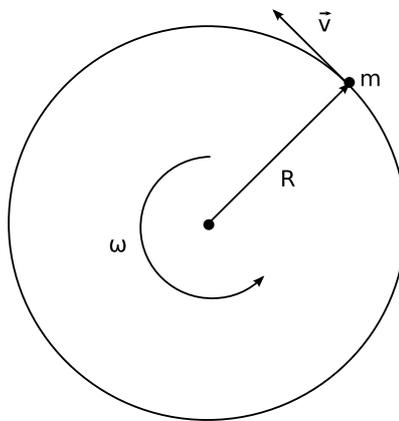
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \vec{v} + V(\vec{r}) \text{ (für konservative Kräfte)}$$

3.4.3 Drehimpulserhaltung

Definition: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Drehimpuls
 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ Drehmoment

Beispiele:

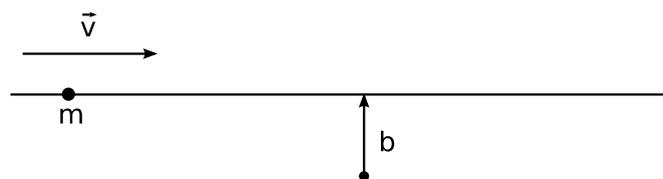
(a) Kreisbewegung



$$L = Rmv$$

Richtung: aus der Ebene heraus

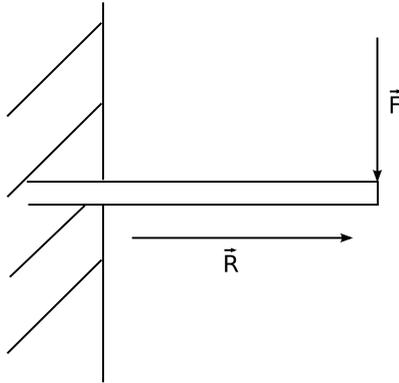
(b) lineare Bewegung von einem Außenpunkt



$$L = bmv$$

in die Ebene hinein

(c) ...



$$M = R \cdot F$$

Betrachte

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

$$m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Drehimpulserhaltung: Ist $\vec{M} = 0$, so ist \vec{L} eine Erhaltungsgröße

Insbesondere: Falls \vec{F} eine Zentralkraft ist, d.h. $\vec{F} \sim \vec{r}$, dann ist \vec{L} erhalten.

4 Beschleunigte Bezugssysteme - Scheinkräfte

NEWTON'sche Axiome gelten für Inertialsysteme

Frage: Können NEWTON'sche Axiome so modifiziert werden, dass sie für nicht-ISE gelten?

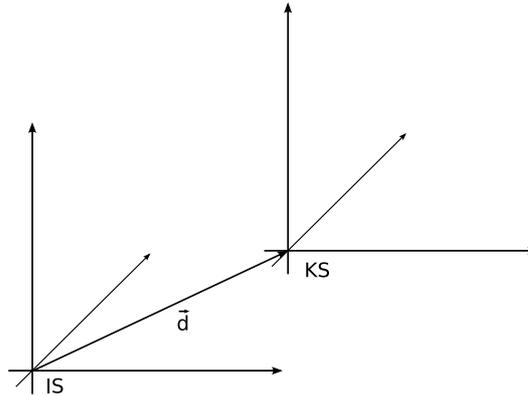
Antwort: Ja. Führe (sog.) Scheinkräfte ein, dann gilt wieder $\vec{F} = m\vec{a}$

Scheinkräfte: nur in nicht-ISEn vorhanden

4.1 Koordinaten Transformation

IS: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

beschl. KS: $\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$$

Ziel:

bilde $\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ und interpretiere Ergebnis als $\vec{F} = m\vec{a}$ im beschleunigten KS.

benutze

$$\vec{r}' = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{d} = d_x\vec{e}_x + d_y\vec{e}_y + d_z\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\vec{e}'_z}_{(*)} + \underbrace{x'\frac{d\vec{e}'_x}{dt} + y'\frac{d\vec{e}'_y}{dt} + z'\frac{d\vec{e}'_z}{dt}}_{(+)}$$

(*) =: $\frac{\delta\vec{r}'}{dt}$ Änderung von \vec{r}' gemessen in KS

(+) Drehung von KS um $\vec{\omega}$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{\delta\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

($\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$ haben feste Länge)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'}{dt^2} &= \frac{\delta^2 \vec{r}'}{dt^2} + \vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}'}{\delta t} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{\delta \vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) \\ &= \frac{\delta^2 \vec{r}'}{dt^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}'}{\delta t} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \\ &= \underbrace{\vec{a}'}_* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\vec{r}'}_{**}) + 2 \cdot \vec{\omega} \times \underbrace{\vec{v}'}_{***} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

* Beschleunigung

** Ort

*** Geschwindigkeit

im bewegten KS

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{d} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{d}}{dt^2} \\ &= \frac{F}{m} \end{aligned}$$

mit oberer Gleichung:

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \underbrace{\vec{F}}_{\vec{F}_{\text{trans}}} - m \underbrace{\frac{d^2 \vec{d}}{dt^2}}_{\vec{F}_{\text{Zent}}} - m \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\vec{F}_{\text{Cor}}} - m \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'}_{\vec{F}_{\text{az}}}$$

Translations-, Zentrifugal-, Coriolis-, Azimutalkraft
→ Scheinkräfte

Beachte:

\vec{r}' , \vec{v}' , \vec{a}' hängen von Bewegung des T ab
 ω , \vec{d} Eigenschaften des Bezugssystems

4.2 Scheinkräfte

4.2.1 Translationskraft

$$\vec{F}_{\text{trans}} = -m \frac{d^2 \vec{d}}{dt^2}$$

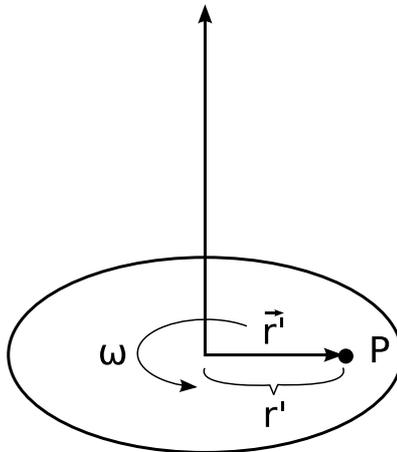
beschleunigte geradlinige Bewegung

4.2.2 Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{\text{Zent}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

\leftrightarrow Zentripetalkraft

Bsp.: Karussell



- rotiert in x - y -Ebene $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$
- Person P im Abstand r' vom Zentrum

Wie groß ist \vec{F}_{Zent} ?

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}'| = \omega r', \vec{\omega} \times \vec{r}' \text{ zeigt tangential in Bewegungsrichtung}$$
$$\Rightarrow |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| = \omega^2 r', \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \text{ zeigt zum Zentrum nach innen}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{Zent}} \text{ zeigt radial nach außen}$$

$$\vec{F}_{\text{Zentripetal}} \text{ zeigt nach innen, } |\vec{F}_{\text{Zentripetal}}| = m\omega^2 r'$$

Kräftebilanz im Karussellsystem:

- (1) Reibungskraft nach innen
- (2) Zentrifugalkraft nach außen

heben sich auf; P ist in Ruhe

Kräfte im IS

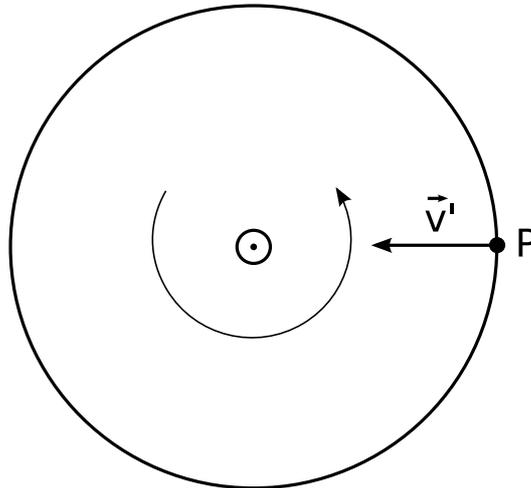
nur (1) \rightarrow Kraft nach innen (Zentripetalkraft) die P auf der Kreisbahn hält.

4.2.3 Corioliskraft

$$\vec{F}_{\text{Cor}} \neq 0 \text{ falls } \vec{v}' \neq 0$$

2 Spezialfälle

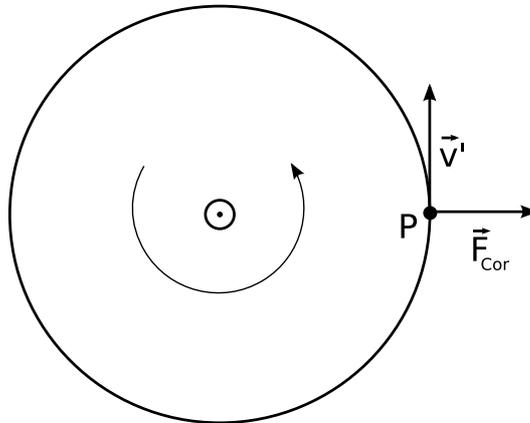
(i) Radiale Bewegung auf Karussell



P bewegt sich Richtung Zentrum mit \vec{v}'
 $\Rightarrow \vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ tangential zur Bewegungsrichtung

P muss \vec{F}_{Cor} entgegenwirken

(ii) Tangentiale Bewegung auf Karussell



P bewegt sich tangential auf Karussell
 \vec{F}_{Cor} zeigt nach außen

4.2.4 Azimutal-Kraft

$$\vec{F}_{\text{az}} = -m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

$$\vec{F}_{\text{az}} \neq 0 \text{ falls } \frac{d\vec{\omega}}{dt} \neq 0$$

hier: betrachte Fall, dass sich $|\vec{\omega}|$ ändert aber nicht die Richtung
 $\Rightarrow \vec{F}_{\text{az}} = -m\dot{\omega} \frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r}$ zeigt entgegen Bewegungsrichtung

P auf Karussell
 Karussell beschleunigt
 $a_{\text{tan}} = r'\dot{\omega}$
 $F_{\text{Reib}} = ma_{\text{tan}}$ Reibungskraft
 F_{az} ist Gegenkraft zu F_{Reib}

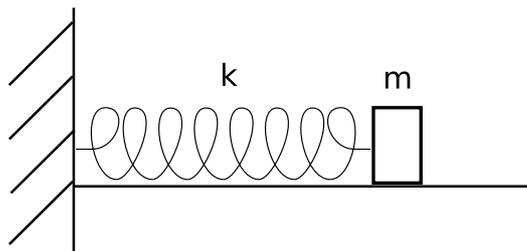
5 Schwingungen/Harmonischer Oszillator (HO)

5.1 Motivation

- HO rücktreibende Kraft \sim Auslenkung
 potentielle Energie \sim (Auslenkung)²
 \rightarrow Schwingungen, “sin”, “cos”

- HO tritt in der Natur in vielen Formen auf, oft nach Idealisierung
- HO exakt lösbar
- Beispiele

(i) schwingende Feder



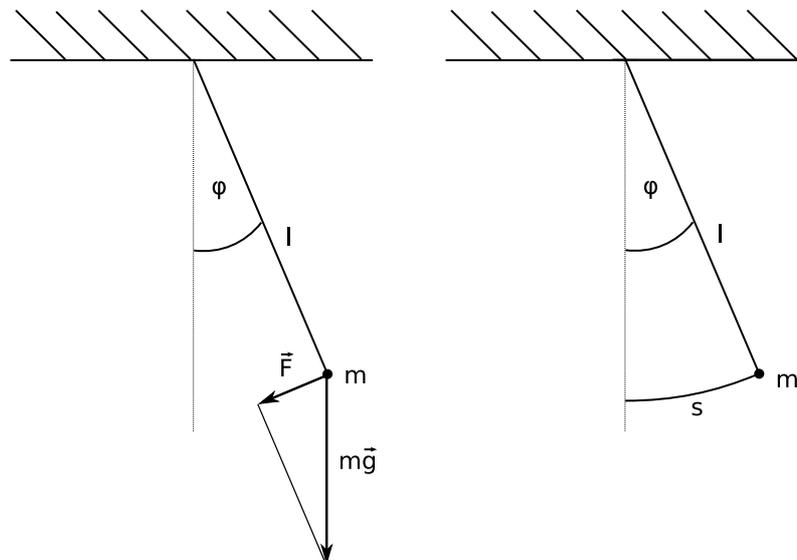
$$F = -kx$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

(ii) Federpendel



$$F = -mg \sin \varphi$$

$$m\ddot{s} = \vec{F}$$

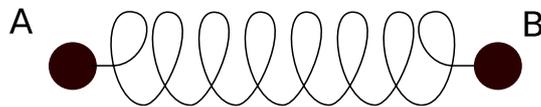
$$s = l\varphi$$

$$\Rightarrow m\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \stackrel{*}{=} -mg\varphi$$

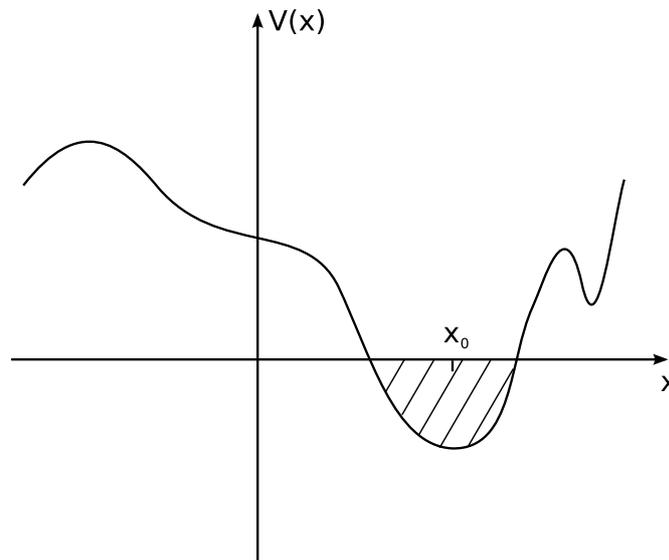
* kleine Auslenkung $< 5^\circ$, $\sin \varphi = \varphi$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \text{ mit } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

(iii) Schwingung von Molekülen



(iv) Bewegung eines T im Potential $V(x)$



kleine Auslenkung um x_0

\Rightarrow Entwickle $V(x)$ um x_0 (TAYLOR-Entwicklung)

$$\Rightarrow V(x) = \underbrace{V(x_0)}_{=\text{konst}} + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}V''(x_0)}_{(*)}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3$$

$$(*) F = -\frac{dV}{dx} = V''(x - x_0) \rightarrow \text{HO}$$

5.2 Mathematischer Einschub

5.2.1 Komplexe Zahlen

Definition :

$i := \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit

$$i^2 = -1$$

Komplexe Zahl:

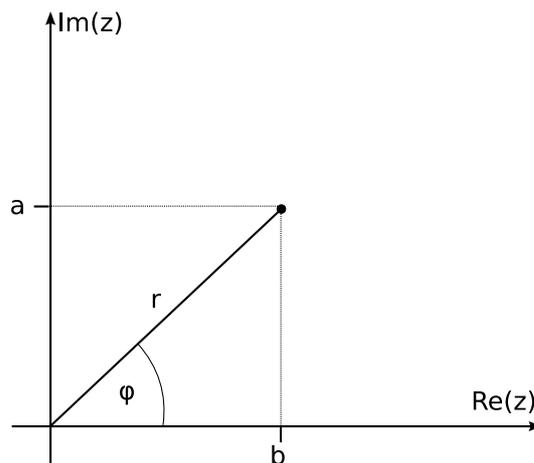
$$z = a + ib; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$a = \operatorname{Re}(z)$ Realteil

$b = \operatorname{Im}(z)$ Imaginärteil

$\bar{z} = a - ib$ komplex konjugierte Zahl

Graphische Darstellung



$$z = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$r = |z|$ Betrag

$\varphi = \arg z$ Phase bzw. Argument

Es gilt:

$$r^2 = a^2 + b^2$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Rechenregeln:

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

Addition

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Betrachte:

$$f(y) = \cos y + i \sin y$$

$$\frac{df}{dy} = -\sin y + i \cos y = i f(y)$$

$$\frac{de^{iy}}{dy} = ie^{iy}$$

$$f(y) = e^{iy}$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \text{ EULER'sche Formel}$$

\Rightarrow jede komplexe Zahl kann geschrieben werden als $z = r e^{i\varphi}$

allgemeine Potenz $z^\alpha = r^\alpha e^{i\varphi\alpha}$

$$\alpha = n \in \mathbb{N} \rightarrow (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

Satz von MOLIERE

Logarithmus von komplexen Zahlen:

$$w = e^z, \quad z = \ln w = \ln r e^{i\varphi} = \ln r + i\varphi = \ln r + i\varphi$$

(Achtung: \ln ist mehrdeutig)

5.2.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

Definition: Eine Gleichung der Form

$$y^n(x) = f(y^{n-1}, y^{n-2}, \dots, y', y, x)$$

heißt DGL nter Ordnung ($y = y(x)$)

- Wichtig in der Physik: DGL 2. Ordnung (Bewegungsgleichung)

- Oft: DGL nicht analytisch lösbar \rightarrow numerische Methoden

Wichtige Spezialfälle

- (a) lineare DGL $y^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{(i)}(x)y^{(i)} + b(x) = 0$
- (b) lineare DGL mit konstantem Koeffizienten $a_i(x) = \text{konstant}$
- (c) homogene, lineare DGL mit konstantem Koeffizienten $\rightarrow b(x) = 0$

Vorschrift um Lösung zu erhalten

- (i) Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$
- (ii) einsetzen $\Rightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$
- (iii) Bestimme n -Lösungen $\lambda_i, i = 1, n$
- (iv) Allgemeine Lösung $y(x) = \sum c_j e^{\lambda_j x}$

Beispiel:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

- (i) $x(t) = e^{\lambda t}$
- (ii) $(\lambda^2 + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$
- (iii) $\lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$
- (iv) $x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} = (c_1 + c_2) \cos(\omega_0 t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega_0 t)$
 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
 c_1, c_2 aus: $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$

Bemerkungen zu (b) Lösung besteht aus 2 Anteilen

1. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (vgl. (c))
2. Eine Lösung der inhomogenen Gleichung (“raten”)
 - Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:
 - $y(x) = y_n(x) + y_p(x)$ p: partikulär

5.3 Harmonischer Oszillator (HO)

5.3.1 HO ohne Reibung (1-dimensional)

rücktreibende Kraft: $F(x) = -kx$

NEWTON $m\ddot{x}(t) = F(x) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Lösung: siehe 2.2.

5.3.2 HO mit Reibung

$$F_{\text{Reibung}} = -R\dot{x}$$

- wirkt der Bewegungsrichtung entgegen
- $F_{\text{Reibung}} \sim$ Geschwindigkeit

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -kx - R\dot{x}$
 $\Rightarrow \ddot{x} + \varrho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\varrho = \frac{R}{m} > 0$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \varrho\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\varrho}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Fallunterscheidung

- (a) $\omega_0 > \frac{\varrho}{2}$ Schwingungsfall
- (b) $\omega_0 < \frac{\varrho}{2}$ Kriechfall
- (c) $\omega_0 = \frac{\varrho}{2}$ Aperiodischer Grenzfall

zu (a) : $\omega_0 > \frac{\rho}{2}$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{\rho}{2} \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2}$$

→ 2 unabhängige Lösungen

$$x_{1/2} = e^{-\frac{\rho}{2}t} e^{\pm i\Omega t}$$

reelle Lösungen

$$x_c(t) = e^{-\frac{\rho}{2}t} \cos(\Omega t)$$

$$x_s(t) = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) = e^{-\frac{\rho}{2}t} \sin(\Omega t)$$

Allgemeine Lösungen:

$$x(t) = Ax_c(t) + Bx_s(t)$$

Definition: $\tau = \frac{2}{\rho}$ Relaxationszeit = Zeit nach der die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ abgefallen ist

zu (b) : $\omega_0 < \frac{\rho}{2}$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\rho}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \omega_0^2}}_{< \frac{\rho}{2}} < 0$$

2 unabhängige Lösungen:

$$x_{1/2}(t) = e^{-\gamma_{1/2}t}, \quad \gamma_{1/2} = -\lambda_{1/2} > 0$$

keine Schwingung

zu (c) : $\omega_0 = \frac{\rho}{2}$

Nullstellen fallen zusammen $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\rho}{2}$

$$\Rightarrow x_1(t) = e^{-\frac{\rho}{2}t}$$

Behauptung: $x_2(t) = te^{-\frac{\rho}{2}t}$

Beweis: Einsetzen ...

2. betrachte Lösungen (für $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

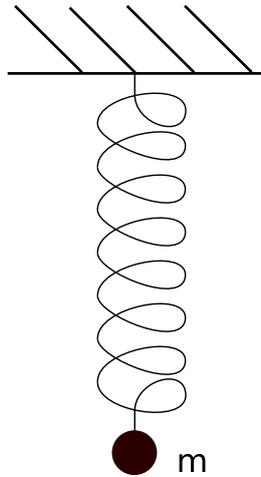
$$x_{\pm} = \frac{1}{\lambda_1 \pm \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} \pm e^{\lambda_2 t})$$

bilde $\lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}$

$$\Rightarrow x_+(t) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$$

$$\begin{aligned}
x_-(t) &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} e^{\lambda_1 t} \frac{1 - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= e^{\lambda_2 t} \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \frac{-(\lambda_2 - \lambda_1)t + O((\lambda_2 - \lambda_1)^2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{\lambda_2 t} t \\
&e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \stackrel{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}{=} 1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t + O((\lambda_2 - \lambda_1)^2)
\end{aligned}$$

5.3.3 Erzwungene Schwingungen



Betrachte zusätzlich eine äußere zeitabhängige Kraft $F_a(t)$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \ddot{x} + \varrho \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t); \quad f(t) = \frac{F}{m}$$

inhomogene, lineare DGL 2. Ordnung

Allgemeine Lösung: $x(t) = x_n(t) + x_p(t)$

$x_n(t)$: siehe 5.3.2

enthält 2 freie Konstanten, die durch Anfangsbedingungen
 (“ x_0, v_0 ”) festgelegt sind

x_p : eine Lösung von (*)

Beachte:

- (i) Für $\varrho \neq 0$ klingt x_n exponentiell ab
 \Rightarrow nach Einschwingungsvorgang bleibt nur x_p übrig (“stationärer Zustand”)
- (ii) $x_{p1}(t)$ und $x_{p2}(t)$ seien Lösungen zu $f_1(t)$ und $f_2(t)$
 $\Rightarrow a_1 x_{p1}(t) + a_2 x_{p2}(t)$ ist Lösung zu $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$

(a) Betrachte harmonische äußere Kraft

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t}, \quad f_0 \in \mathbb{C}$$

$$\varrho = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 = f_0 e^{i\omega t}$$

x_n ✓

$$\text{Ansatz: } x_p = c e^{i\omega t} \Rightarrow c(-\omega^2 + \omega_0^2) e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow c = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

reelle Lösungen

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad x_p^{\cos}(t) = \operatorname{Re} x_p(t)$$

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t) \quad x_p^{\sin}(t) = \operatorname{Im} x_p(t)$$

(b) $f(t) = f_0 e^{i\omega_0 t}$; $\varrho = 0$; $\omega_0 = \omega$

$$\text{Ansatz: } x_p(t) = t e^{i\omega_0 t}$$

$$\text{einsetzen} \Rightarrow x_p(t) = \frac{t f_0}{2i\omega} e^{i\omega t}$$

Amplitude $\sim t$

(c) $\varrho \neq 0 \rightarrow$ Übungen

$$\text{Amplitude } c \sim \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\varrho\omega}$$

Phasenverschiebung $\delta = \delta(\omega)$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \delta \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \delta \rightarrow \pi$$

5.4 Mathematischer Einschub δ -Funktion

Definiere Funktion $\delta(t)$ über die Eigenschaft

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt$$

für beliebige "Testfunktion" $f(t)$ ($f(t)$ sei stetig)

DIRAC'sche δ -Funktion

Eigenschaften

$$(i) \quad \begin{array}{ll} \delta(t) = 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty & \text{für } t = 0 \end{array} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

(ii) $\delta(t) \approx$ Verallgemeinerung des KRONECKER- δ 's

$$f_j = \sum_j d_{ij} f_j$$

$$i, j \rightarrow t, t'$$

$$\sum \rightarrow \int$$

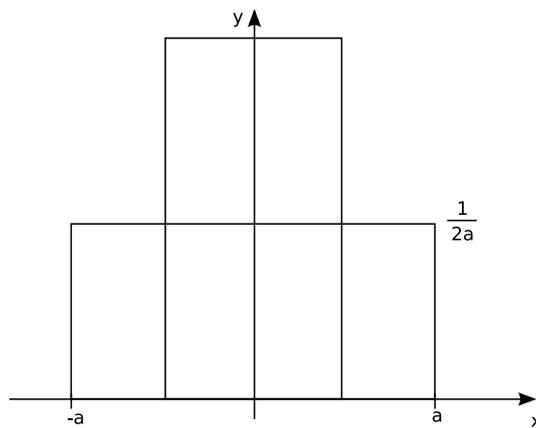
(iii) saloppe Schreibweise

$\delta(t)$ ist der Grenzwert einer Funktionenfolge δ_a für $a \rightarrow 0$ mit

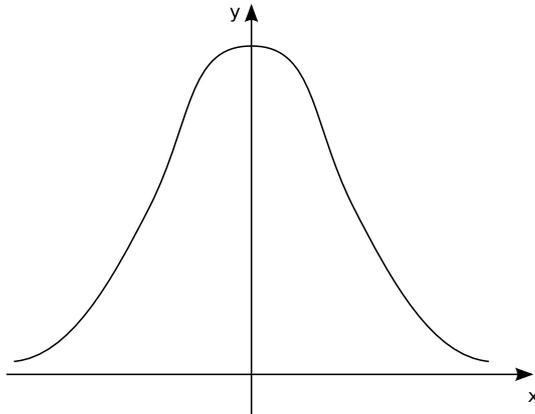
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) = 1$$

Beispiele

$$(i) \delta_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$(ii) \delta_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{a^2}}$$



Problem der Mathematik (Distributionstheorie)

$$\underbrace{\lim_{a \rightarrow 0} \int \delta_a(t - t') f(t') dt'}_{=f(t)} \stackrel{?}{=} \int \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t - t') f(t') dt'$$

Physik: Grenzwert $a \rightarrow 0$ nicht durchführen, sondern setze a gleich mit der kleinsten bekannten Zeit, Ort, ...

In der Praxis: befolge Rechenregeln \Rightarrow richtiges Ergebnis

Rechenregeln:

$$(i) \delta(-t) = \delta(t)$$

$$(ii) t\delta(t) = 0$$

$$(iii) \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$(iv) \delta(t^2 - a^2) = \frac{1}{2a} (\delta(t - a) + \delta(t + a))$$

$$(v) f(t)\delta(t - t') = f(t')\delta(t - t')$$

$$(vi) \Theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \Theta(t) = \delta(t)$$

5.5 Kraftstoß

Betrachte HO in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = t'$ wirkt eine äußere Kraft in Form eines Kraftstoßes, d.h. Kraft wirkt eine infinitesimal kurze Zeit mit unendlicher Stärke

$$f(t) = \delta(t - t')$$

$$\ddot{x}(t) + \varrho \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \delta(t - t')$$

Ziel: Berechne $x(t)$ mit $x(t < t') = 0$
 $\dot{x}(t < t') = 0$

(a) $x(t) \rightarrow x(t, t')$ $x(t, t') = 0$ für $t < t'$

(b) $x(t, t')$ hängt nur von $t - t'$ ab $\rightarrow x(t - t')$

(c) $t > t'$ $\ddot{x} + \varrho \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
 $\Rightarrow x(t - t') = e^{-\frac{\varrho}{2}(t-t')} [c_1 \cos(\Omega(t - t')) + c_2 \sin(\Omega(t - t'))]$
 mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\varrho^2}{4}}$

(d) Integriere DGL über infinitesimal kleinen Bereich um $t = t'$
 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \varrho \underbrace{\frac{d}{dt}}_{(*)} + \omega_0^2 \right) x(t - t') dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} dt \delta(t - t') = 1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} x(t - t') \Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}(0) = 1$$

(*) $(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)) = 0$

Außerdem $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = x(0) = 0$ (Stetigkeit)

(e) einsetzen

$$\Rightarrow c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{\Omega}$$

(f) $x(t - t') = - \begin{cases} \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{\varrho}{2}(t-t')} \sin(\Omega(t - t')) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$

heißt GREEN'sche Funktion des HO ($\ddot{x} + \varrho \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$)
 $G(t - t')$

Eigenschaften

- (i) $G(t - t') = 0 \quad t < t'$ wegen Kausalität (Wirkung kommt nach Ursache)
- (ii) Wirkung nicht instantan, sondern retardiert (d.h. ausgedehnt, verzögert)
- (iii) Beliebige äußere Kraft

Behauptung: $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t - t') f(t')$

löst $\ddot{x} + \varrho \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

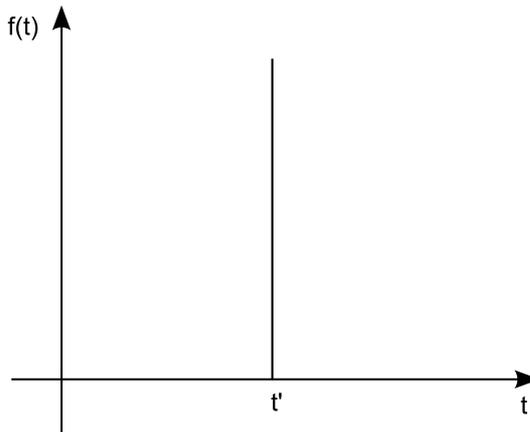
Beweis:

$$\ddot{x} + \varrho \dot{x} + \omega_0^2 x = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + \varrho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t - t')}_{\delta(t-t')} f(t') = f(t)$$

$$f(y) = \int \delta(x - y) f(x) dx$$

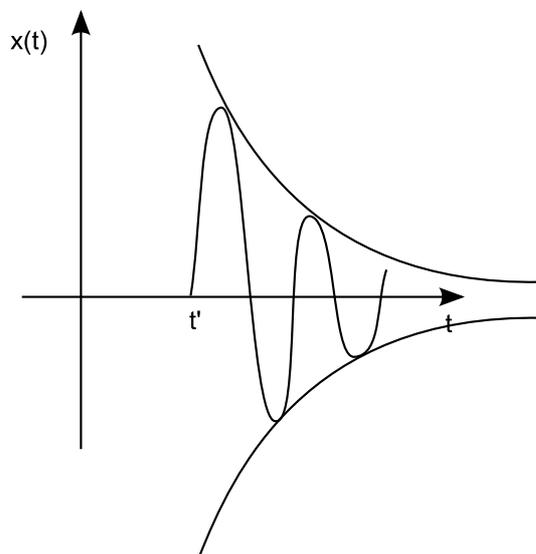
H.O: $\ddot{x} + \varrho \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

- $\varrho = 0, f = 0$
- $\varrho \neq 0, f = 0$
- $\varrho \neq 0, f \sim e^{i\omega t}$
- $\varrho \neq 0, \text{beliebiges } f(t)$



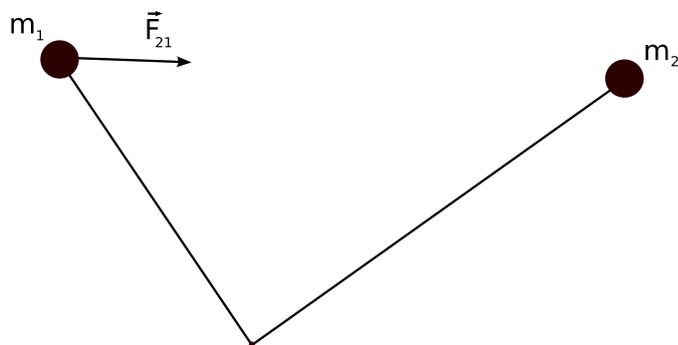
$$x(t) = G(t - t') = \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{\varrho}{2}t} \sin(\Omega(t - t'))$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - t') f(t') dt'$$



6 Zweiteilchensysteme (mit Zentralkraft)

6.1 Relativ- und Schwerpunktkoordinaten



- Anzahl der Freiheitsgrade: $f = 6$
- $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \sim \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Bewegungsgleichung:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}$$

Erhaltungsgrößen

Impuls: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2$

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$

Energie: $E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 + U(r), \vec{F} = -\text{grad } U(r)$

Wechsle Koordinaten:

- $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (*) Relativkoordinaten
- $\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ (**) Schwerpunktkoordinaten

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= M \\ \Rightarrow \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (**) \Rightarrow M \ddot{\vec{R}} &= m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{P} \\ M \ddot{\vec{R}} &= \dot{\vec{P}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{21} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{12} \\ &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{21}(\vec{r}) \\ \frac{1}{m} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad m \text{ reduzierte Masse} \end{aligned}$$

Drehimpuls

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \left(\vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \times m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right) + \left(\vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \times m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right) \\ &= M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2}}_{=m} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L}_{Sp} + \vec{L}_{rel} \end{aligned}$$

Energie

$$\begin{aligned} E &= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{E_{Sp}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + U(r)}_{E_{rel}} \\ &= E_{Sp} + E_{rel} \end{aligned}$$

\vec{L}_{Sp} und \vec{L}_{rel} / E_{Sp} und E_{rel} sind getrennt erhalten.

6.2 Drehimpulserhaltung, Bahnkurven

(a) $\frac{d\vec{L}_{rel}}{dt} = 0 \Rightarrow$ Bewegung verläuft in der Ebene; o.B.d.A x - y -Ebene

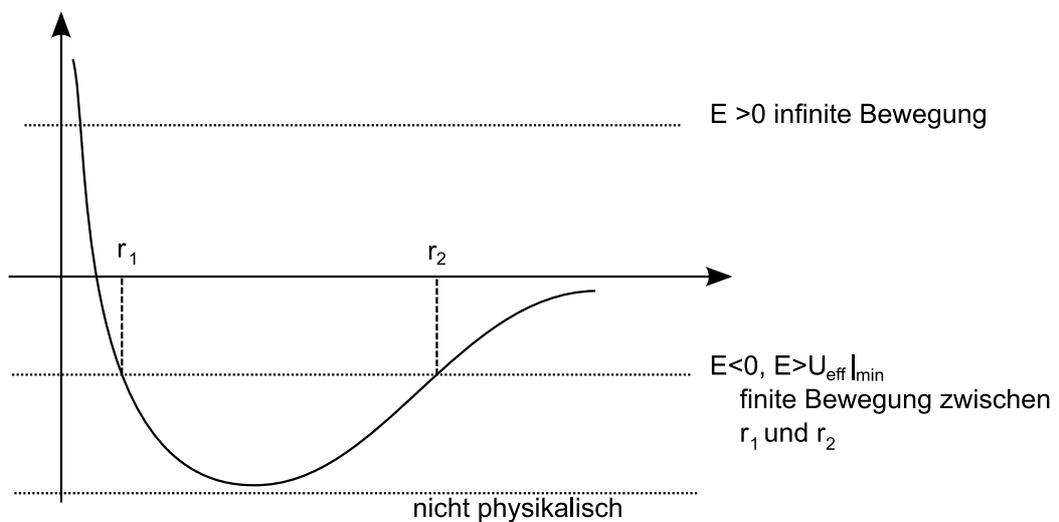
$$\begin{aligned} \text{Polarkoordinaten: } x &= r \cos \varphi & \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ y &= r \sin \varphi & \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$L_z = (\vec{L}_{rel})_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y) = mr^2\dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} E_{rel} \equiv E &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + U(r) \end{aligned}$$

- DGL 1. Ordnung
- effektives Potenzial $U_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} + U(r)$
- \Rightarrow 1-dim Problem: T mit Energie E bewegt sich im effektiven Potenzial $U_{eff}(r)$

betrachte $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ $\alpha = m_1m_2G > 0$



(b) Aus $E = \text{const.}$ folgt $dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}})}}$

(1) Berechne $t(r)$

(2) $\Rightarrow r(t)$

Einfacher: $r(\varphi)$

$$L_z = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{L_z} d\varphi$$

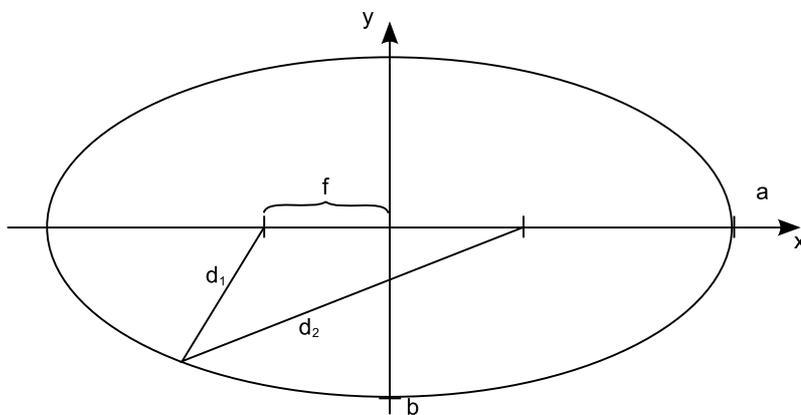
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi &= \int_{r_0}^r \frac{\frac{L_z}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\alpha}{rmE} - \frac{L_z^2}{m^2 r^2}}} \\ &= \int_{r_0}^r \frac{\frac{L_z}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{\alpha^2}{L_z^2} - \left(\frac{L_z}{mr} - \frac{\alpha}{L_z}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\left(x = \frac{L_z}{mr} - \frac{\alpha}{L_z} \rightarrow dx = -\frac{L_z}{mr^2} dr \right)$$

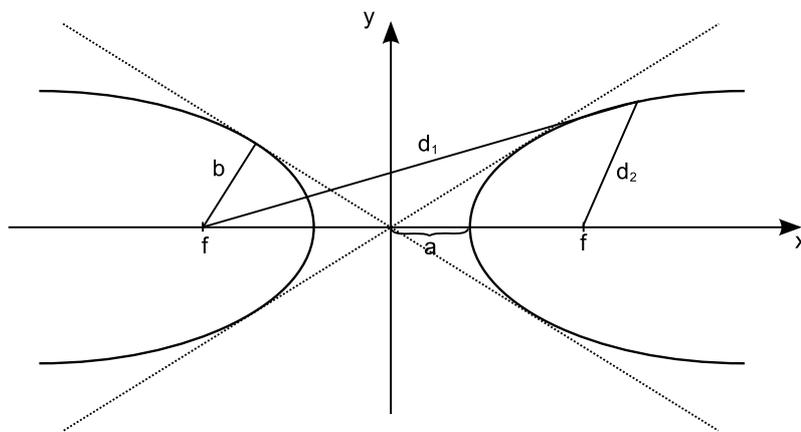
$$= - \int_{x(r_0)}^{x(r)} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{A} \stackrel{!}{=} \varphi - \varphi_0 \quad \left(\text{mit } A^2 = \frac{2E}{m} + \frac{\alpha^2}{L_z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{L_z}{m_r} - \frac{\alpha}{L_z} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{\alpha^2}{L_z^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

6.3 Mathematischer Einschub Ellipse und Hyperbel



Ellipse

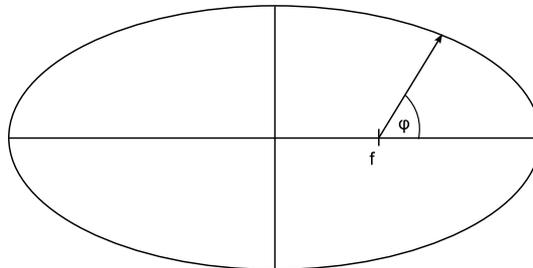


Hyperbel

	Ellipse	Hyperbel
Exzentrizität:	$\epsilon = \frac{f}{a} < 1$	$\epsilon = \frac{f}{a} > 1$
Bahnkurve:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parameter: $p = y(x = f) = \frac{b^2}{a}$

Polarkoordinaten, Ursprung in einem der Brennpunkte



$$x = f + r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos \varphi \text{ Normalform}$$

Halbachsen:

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

6.4 Planetenbewegungen/Kepler-Problem

(a) Vgl. $\frac{L_z}{mr} - \frac{\alpha}{L_z} = \dots$

mit $\frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos \varphi \Rightarrow_{\alpha > 0} p = \frac{L_z^2}{m\alpha}$; $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{m\alpha^2}} = \begin{cases} < 1 \text{ für } E < 0 \rightarrow \text{Ellipse} \\ = 1 \text{ für } E = 0 \rightarrow \text{Parabel} \\ > 1 \text{ für } E > 0 \rightarrow \text{Hyperbel} \end{cases}$

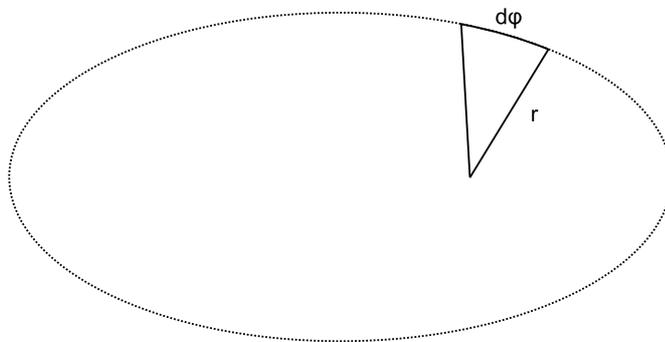
gr. Halbachse: $a = \frac{\alpha}{2|E|}$

kl. Halbachse: $b = \frac{L_z}{\sqrt{2m|E|}}$

(b) Umlaufzeit des Planeten ($E < 0$)

$$\begin{aligned} L_z = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} &\Rightarrow \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{mr^2}{L_z} d\varphi \\ &= 2 \frac{m}{L_z} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\varphi}_{\text{Fläche der Ellipse} = \pi ab} \quad (*) \\ &= \frac{2\pi m}{L_z} a \frac{L_z}{\sqrt{2m|E|}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}} = T \end{aligned}$$

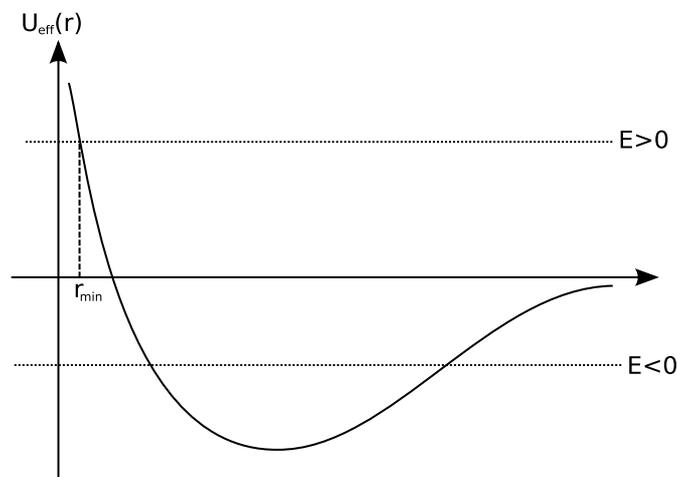
(*) $dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{L_z}{2m}$



(c) KEPLER'sche Gesetze (1618)

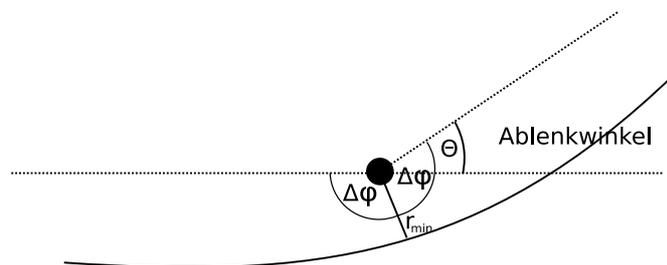
- (1) Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne ($m_{\text{Sonne}} \ll m_P$)
- (2) „Fahrstrahl“ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
- (3) Die Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional zu den Kuben der großen Halbachse

6.4.1 Nachtrag: Qualitative Diskussion der Bahnkurve für allgemeines Potential $U(r)$



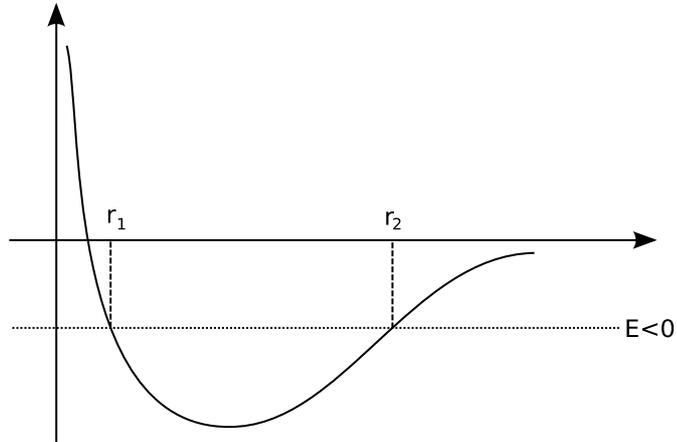
$E > 0$ infinite Bewegung

- T. läuft von großem Abstand auf Potentialzentrum zu.
- Umkehrpunkt $r = r_{\min}$: Radialgeschwindigkeit: $\dot{r} < 0 \rightarrow \dot{r} > 0$
- wegbewegung vom Zentrum

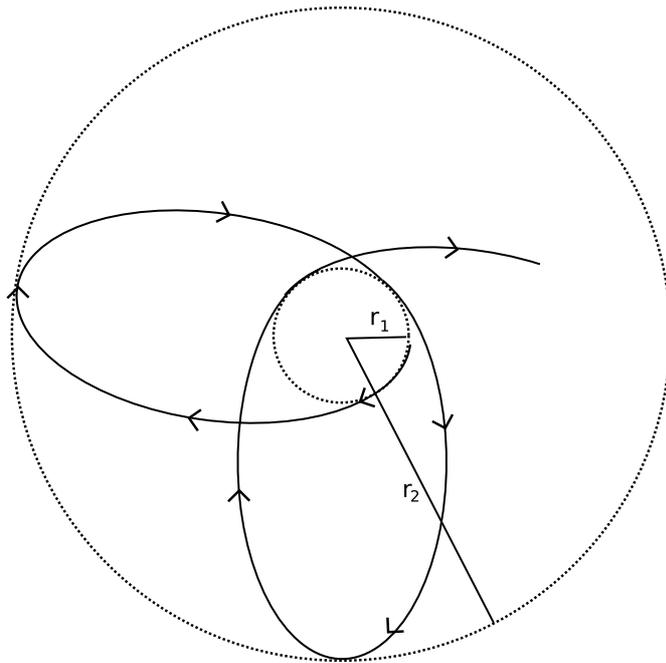


$$\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{L_z}{mr^2} dr}{\sqrt{(E - U_{\text{eff}}) \frac{2}{m}}}; \theta = 2\Delta\varphi - \pi$$

$E < 0$ finite Bewegung



- Bahnkurve muss nicht geschlossen sein



$$\Delta\varphi : r_{max} \rightarrow r_{min} \rightarrow r_{max}$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{L_z}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff})}}$$

- Bahnkurven sind geschlossen, falls $\Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n}$, $n, m \in \mathbb{N}$
- $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ und $U(r) = kr^2 \rightarrow$ Bahnkurve geschlossen

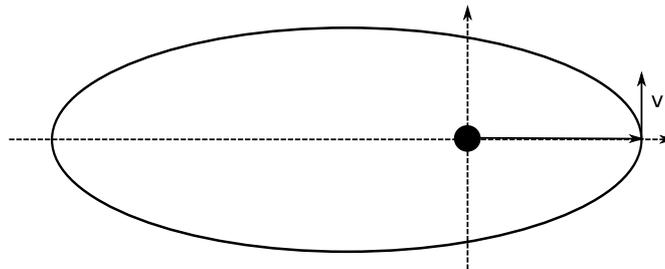
6.4.2 Lenz-Runge-Vektor

$\vec{\Lambda} = \vec{v} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$ ist erhalten, zeigt zum Perihel

Beweis:
$$\frac{d\vec{\Lambda}}{dt} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \alpha \frac{\dot{\vec{r}}\dot{r}}{r^3} = -\frac{1}{m} \alpha \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} + \alpha \frac{\dot{\vec{r}}\dot{r}}{r^3}$$

$$\begin{aligned} r \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) &= m \left(-r^2 \dot{\vec{r}} + (\dot{\vec{r}}\dot{r}) \right) \\ &= -\frac{\alpha}{r^3} \left(-r^2 \dot{\vec{r}} + (\dot{\vec{r}}\dot{r}) \vec{r} \right) - \alpha \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \alpha \frac{\dot{\vec{r}}\dot{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Richtung: wähle $\varphi = 0 \Rightarrow \vec{r}$ zeigt zum Perihel



$$\vec{r} = \vec{e}_x r \quad r = \frac{p}{1 + E} \quad \dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2}$$

$$\vec{L} = \vec{e}_z L_z \vec{v} = \vec{e}_y r \dot{\varphi} \quad p = \frac{L_z^2}{m\alpha}$$

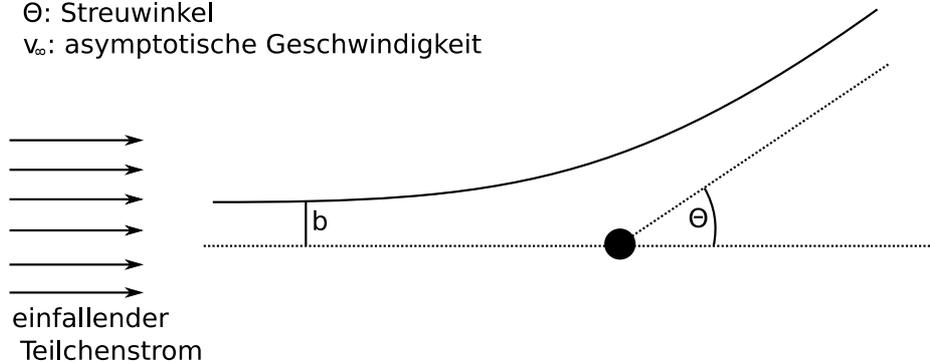
$$\begin{aligned} \vec{\Lambda} &= \vec{e}_y \times \vec{e}_z r \dot{\varphi} L_z - \alpha \vec{e}_x = \vec{e}_x \left(\frac{L_z^2}{mr} - \alpha \right) = \vec{e}_x \left(\frac{L_z^2}{m} \frac{1 + E}{p} - \alpha \right) \\ &= \vec{e}_x \alpha \epsilon \Rightarrow \text{zeigt zum Perihel} \end{aligned}$$

7 Streuung von Teilchen

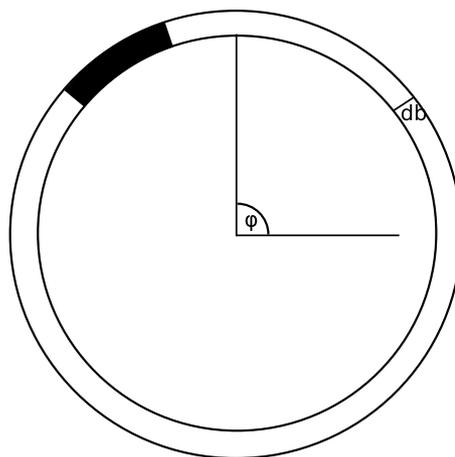
7.1 Allgemeine Überlegungen

hier: elastische Streuung; T. hat zu Anfang und Ende Geschwindigkeit v_∞

b: Stoßparameter
 Θ : Streuwinkel
 v_∞ : asymptotische Geschwindigkeit



- wirkungsquerschnitt $b = b(\theta)$ i.A.: $b \nearrow \Rightarrow \theta \searrow$



T. im Intervall $[b, b + db]$ und $[\varphi, \varphi + d\varphi]$
 \rightarrow Streuung in Kegel mit Öffnungswinkel :

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta d\varphi = \frac{dF}{R^2} \quad \begin{array}{l} \text{Detektoroberfläche} \\ \text{Abstand Detektor-Streuläche} \end{array}$$

Streuung an $U = U(r)$

\Rightarrow T-Bahnen verlaufen in Ebenen, Unabhängigkeit von φ

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\text{Anzahl T. die in das Raumwinkelement } d\Omega \text{ gestreut werden/Zeit}}{\text{Anzahl einlaufende T.}/(\text{Fläche} \times \text{Zeit})} \\ &= \frac{\Delta N}{j} \quad j = \text{Stromdichte} \end{aligned}$$

- Drehimpuls bzgl. Streuzentrum $I = bmv_\infty = b\sqrt{2mE}$ ist erhalten

- Betrachte

einfallenden T-Strom : $I_{in} = j2\pi b|db|$

gestreuten T-Strom : $I_{out} = \frac{d\sigma}{d\Omega} j \underbrace{2\pi \sin \theta d\theta}_{=d\Omega} \left(= \frac{\Delta N}{\Delta t} \right)$

benutze $I_{in} = I_{out}$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

- Totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta \underbrace{d\varphi}_{2\pi}$

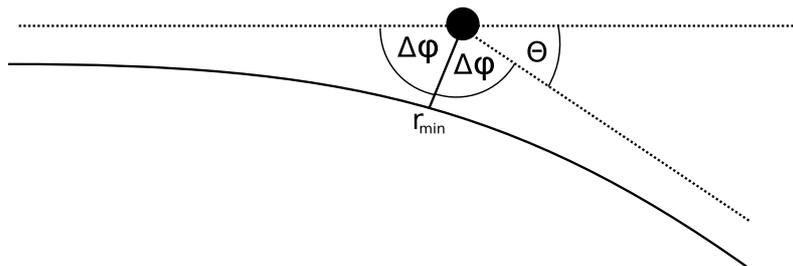
- Problem/Aufgabe $b = b(\theta)$

7.2 Rutherford-Streuung

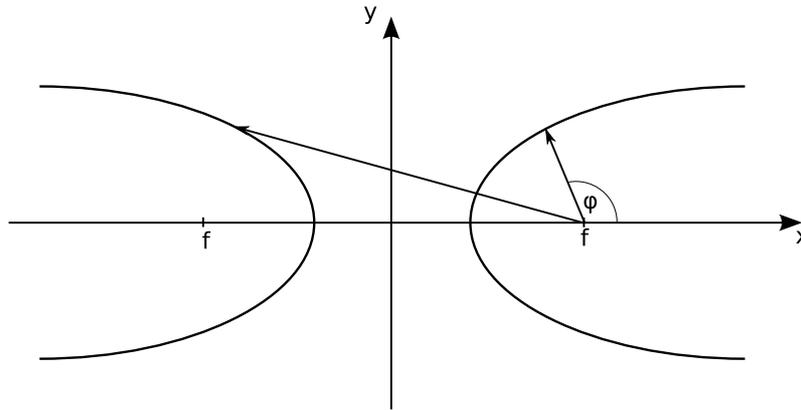
1912-1913 Beschuß einer Goldfolie mit α -Teilchen (He⁴-Kerne)

→BOHR'sches Atommodell: punktförmiger Kern, ausgedehnte e⁻-Hülle

Streuung am Coulomb-Potential: $U(r) = -\frac{\alpha}{r} = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$ $\alpha > 0$
 $z_1 = 2$
 $z_2 = 79$



Bahnkurve Hyperbel:



$$\frac{p}{r} = 1 - \epsilon \cos \varphi \quad p = \frac{L_z^2}{m\alpha}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2\frac{EL_z^2}{m\alpha^2}} < 1 \quad L_z = l$$

- min. Abstand für $\varphi = 0$: $r_{min} = \frac{p}{1 - \epsilon}$

- $r \rightarrow \infty$:

$$\cos \Delta\varphi = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2E\frac{l^2}{m\alpha^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \Delta\varphi}}$$

$$\Rightarrow \tan \Delta\varphi = \frac{2Eb}{|\alpha|}$$

$$\tan \Delta\varphi = \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\sin \frac{\pi - \theta}{2}}{\cos \frac{\pi - \theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow b(\theta) = \frac{|\alpha|}{2E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Interpretation:

- $\theta \rightarrow 0$ d.h. $b \rightarrow \infty$; $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{\theta^4}$

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \rightarrow \text{divergent}$$

T. in großer Entfernung werden auch abgelenkt \rightarrow "Langreichweitigkeit des Coulombpotentials"

Realität: Abschirmung durch negative Ladung der Elektronen

$$U(r) \rightarrow U_A(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} \quad r_0 = \text{Atomdurchmesser "Abschirmlänge"}$$

- $\theta = \pi$: Rückstreuung; gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment

- Ergebnis der klassischen Behandlung stimmt mit quantenmechanischer Herleitung überein
- $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist unabhängig vom VZ von $\alpha \rightarrow$ gilt für anziehende und abstoßende Potentiale
- Obige Formel gilt im Schwerpunktsystem

8 Vielteilchensysteme

8.1 Notation

Betrachte N Massenpunkte m_1, \dots, m_N mit inneren Kräften \vec{F}_{ik} zwischen T_i und T_k und äußere Kräfte \vec{K}_i (auf T_i)

$$\vec{F}_{ik} = f_{ik}(r_{ik}) \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{r_{ik}} \quad r_{ik} = |\vec{r}_i - \vec{r}_k| \text{ Kraft von } T_i \text{ auf } T_k$$

\vec{F}_{ik} seien konservativ:

$$\Rightarrow \vec{F}_{ik} = -\vec{\nabla}_k U_{ik}(r_{ik}), \quad \vec{\nabla}_k = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_k} \\ \frac{d}{dy_k} \\ \frac{d}{dz_k} \end{pmatrix}$$

Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik} + \vec{K}_i \quad i = 1, \dots, N$$

$$\text{Gesamtimpuls } \vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\text{Schwerpunkt } \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$\text{Gesamtmasse } M = \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\text{Drehimpuls } \vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

8.2 Erhaltungssätze

(a) Impulssatz

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i,k=1}^N \vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^N \vec{K}_i = \sum_{i < k}^{i \neq k} \underbrace{(\vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ik})}_{=0} + \sum_{i=1}^N \vec{K}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \text{ für ein abgeschlossens System}$$

(b) Schwerpunktsatz

$$M\dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{P}$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i$$

abgeschlossenes System: $\vec{R}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0$

(c) Drehimpuls

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ki} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \times \vec{K}_i \\ &= \underbrace{\sum_{i < k} \dot{\vec{r}}_i \times \vec{F}_{ki}}_{\text{}} + \sum_{i < k} \dot{\vec{r}}_k \times \vec{F}_{ki} \\ &= \sum_{i < k} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_k) \times \vec{F}_{ki} = 0 \end{aligned}$$

abgeschlossenes System: $\vec{D} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

(d) Energiesatz $m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\vec{\nabla}_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N U_{ki}(r_{ki}) + \vec{K}_i \quad | \quad \dot{\vec{r}}_i \sum_{i=1}^N$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) &= - \sum_{\substack{i, k \\ k \neq i}} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i U_{ki}(r_{ki}) + \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_{i < k} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i + \dot{\vec{r}}_k \cdot \vec{\nabla}_k \right) U_{ki}(r_{ki}) = \frac{d}{dt} \sum_{i < k} U_{ki}(r_{ki}) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + \sum_{i < k} U_{ki}(r_{ki}) \right) = \sum_{i < k} \vec{K}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ &\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}_{\text{Leistung}} \text{ abgeschlossenes System} \rightarrow \text{Energieerhaltung} \end{aligned}$$

(e) Zusammenfassung

Ein abgeschlossenes N-Teichensystem wird durch 10 Integrationskonstanten beschrieben:

$\vec{P}, \vec{R}_0, \vec{L}, E$

(3), (3), (3), (1)

Erinnerung: eigentliche orthochrone GT hat 10 Parameter; Zshg. NOETHER-Theorem