

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

KLASSISCHE
THEORETISCHE PHYSIK I
(THEORIE A, MECHANIK)

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
KIT-FAKULTÄT FÜR PHYSIK
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK

Ich möchte eine Reihe von Büchern benennen, welche ich verwendet habe bei der Erstellung des Skriptes und welche ich für die Vorlesung empfehle:

- W. Nolting *Grundkurs Theoretische Physik 1*
- T. Fließbach *Mechanik - Lehrbuch zur Theoretischen Physik I*
- F. Scheck *Theoretischen Physik 1*

Ein Buch welches vor allem die mathematischen Grundlagen auf eine verständliche Art erklärt ist

- M. Otto *Rechenmethoden für Studierende der Physik im ersten Jahr*

Diese Ausarbeitung orientiert sich an und basiert auf den Skripten der folgenden Kollegen:

- Prof. Falk Lederer
- Prof. Dirk–Gunnar Welsch
- Prof. Matthias Steinhauser (in der Mitschrift von Florian Keller)

Weiterhin sind verschiedene Abbildungen aus anderen Quellen übernommen, welche nicht explizit markiert wurden. Das Skript ist damit nur für den internen Gebrauch gedacht und darf in keiner Form weiterverbreitet werden. Ich möchte Andreas Poenicke, Andreas Schiemenz, Karim Mnasri und Stefan Nanz für die hilfreiche Durchsicht des Manuskriptes danken.

© 2017 Prof. Dr. Carsten Rockstuhl

Skript geschrieben von Prof. Dr. Carsten Rockstuhl

<http://www.tfp.kit.edu>

Version vom February 2017

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 2 | Kinematik | 11 |
| 2.1 | Bahnkurve, Geschwindigkeit, Beschleunigung | 15 |
| 2.2 | Koordinatensysteme | 17 |
| 2.3 | Grundaufgaben der Kinematik - Grundtypen der Bewegung | 29 |
| 3 | Die Newtonschen Prinzipien | 37 |
| 3.1 | Einleitung | 37 |
| 3.2 | Lex prima → das Trägheitsgesetz | 40 |
| 3.3 | Lex secunda → Grundgesetz der Dynamik | 42 |
| 3.4 | Lex tertia → Wechselwirkungsgesetz, actio=reactio | 44 |
| 3.5 | Lex quarta → Superpositionsprinzip | 45 |
| 3.6 | Inertialsysteme und Galilei-Transformation | 45 |
| 3.7 | Beschleunigte Bezugssysteme | 47 |
| 4 | Dynamik eines Massenpunktes - Bilanzgleichungen | 51 |
| 4.1 | Der Impuls und die Impulsbilanz | 55 |
| 4.2 | Die Energie und die Energiebilanz | 56 |
| 4.3 | Der Drehimpuls und die Drehimpulsbilanz, das Drehmoment | 65 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 5 | <i>Diskussion der Bewegungsgleichungen I: Konservative Systeme</i> | 69 |
| 5.1 | <i>Die allgemeine lineare Bewegung</i> | 69 |
| 5.2 | <i>Harmonischer Oszillator</i> | 72 |
| 5.3 | <i>Freier Fall aus beliebiger Höhe</i> | 73 |
| 5.4 | <i>Allgemeine Bewegung im Zentralkraftfeld</i> | 74 |
| 5.5 | <i>Planetenbewegung</i> | 79 |
| 6 | <i>Diskussion der Bewegungsgleichungen II: Dissipative Systeme</i> | 89 |
| 6.1 | <i>Freier Fall mit Reibung</i> | 90 |
| 6.2 | <i>Freier harmonischer Oszillator</i> | 92 |
| 6.3 | <i>Getriebener Oszillator: harmonische Anregung</i> | 98 |
| 6.4 | <i>Getriebener Oszillator: beliebige Anregung</i> | 101 |
| 7 | <i>Systeme von Massenpunkten</i> | 111 |
| 7.1 | <i>Definitionen</i> | 112 |
| 7.2 | <i>Impulssatz</i> | 113 |
| 7.3 | <i>Energiesatz</i> | 115 |
| 7.4 | <i>Virialsatz</i> | 119 |
| 7.5 | <i>Drehimpulssatz</i> | 122 |
| 7.6 | <i>Zwei-Körper-Probleme</i> | 126 |

1 Einleitung

Die klassische Mechanik, wie wir sie in Grundzügen in diesem Kurse kennenlernen möchten, beschreibt das Raum-Zeit-Kontinuum und die Bewegung der darin enthaltenen Körper. Sie entspricht mithin dem Teilgebiet der Physik, welche wir in unserer alltäglichen Erfahrung vermutlich am häufigsten begegnen werden, unabhängig davon ob dies bewusst oder unbewusst geschieht. Aus den uns möglichen Beobachtungen der Bewegung von Körpern, versuchen wir im Rahmen der theoretischen Mechanik allgemein gültige Gesetze zu finden, welche in der Lage sind, diese Bewegungen (bzw. auch die Ruhe) mathematisch zu fassen und abstrakter zu beschreiben. Damit ist die theoretische Mechanik auf herausragende Art geeignet, Sie mit den allgemeinen Zielen der theoretischen Physik vertraut zu machen. Unser Vorgehen im Folgenden sollten Sie nicht nur auf eine Reihe von konkreten Problemen anwenden. Sie sollten dieses Vorgehen auf einer höher aggregierten Ebene als prototypisch verstehen für jede Art von Theorie, mit welcher Sie die uns umgebende Umwelt und in dieser auftretende observable Phänomene beschreiben bzw. noch nicht beobachtete Phänomene vorhersagen können.

Dazu würden wir auf der Basis der Verallgemeinerung von Erfahrungen einige allgemeine Grundsätze aufstellen. Diese werden wir als Axiome bezeichnen. Nur mit diesen Axiomen und den verschiedensten Methoden der Mathematik, welche Sie in diesem und in weiterführenden Kursen kennenlernen werden, versuchen Sie eine Reihe von speziellen Gesetzen aufzustellen, welche die vielfältigen Ausprägung experimentell observabler Größen korrekt vorhersagen. Eine gute Theorie muss in der Lage sein, alle bekannten Phänomene richtig beschreiben zu können und sollte darüber hinaus auch Phänomene vorhersagen, welche bisher noch nicht beobachtet werden konnten. Diese Vorhersagen sollen Experimente motivieren, in welchen diese Phänomene beobachtet (oder auch nicht beobachtet) werden. Man spricht von einer Verifizierung oder einer Falsifizierung einer Theorie¹. Bekannte erfolgreiche Beispiele der jüngeren Vergangenheit für dieses Vorgehen ist zum Beispiel der experimentelle Nachweis des Higgs-Teilchens oder auch der experimentelle Nachweis von Gravitationswellen. Beide Phänomene



¹ Eine Verifizierung ist streng genommen nie möglich, da Sie nicht ausschließen können, dass es nicht doch ein Experiment gibt, welches nicht mit der Theorie in Übereinstimmung gebracht werden können. Je mehr Experimente aber richtig vorhergesagt werden, desto hilfreicher und nützlicher ist eine Theorie.

wurden im Rahmen entsprechender Theorien vorhergesagt, entzogen sich aber langer Zeit ihrer Beobachtung. Erst 50 (Higgsteilchen) bzw. 100 Jahre (Gravitationswellen) nach ihrer theoretischen Vorhersage wurden die entsprechenden experimentellen Nachweise erbracht. Beides waren in sich selbst Meilensteine der experimentellen Physik aber letztendlich stellen sie auch einen Triumph der theoretischen Physik dar.

Ihre Ausbildung auf dem Gebiet der theoretischen Physik beginnt mit dieser Vorlesung zur theoretische Mechanik². Dies ist nicht nur historisch begründbar, sondern erklärt sich mit dem physikalischen Fundament, welches die theoretische Mechanik für viele weitere Teilgebiete und Zweige der Physik darstellt. In der theoretischen Mechanik werden eine ganze Reihe von Grundbegriffen eingeführt, welche Ihnen im weiteren Verlauf der Vorlesungen immer wieder begegnen werden. Masse, Impuls, Energie, Arbeit und Kraft sind nur einige dieser Terme. Weiterhin ähneln die hier verwendeten mathematischen Methoden denen in den meisten weiteren Teilgebieten der Physik. Gerade diese Mathematisierung der Physik wird vermutlich die größte Änderung im Vergleich zu Ihrer bisherigen Schulphysik darstellen. Ich möchte Sie daher bitten, insbesondere den mathematischen Aspekten mit Wertschätzung zu begegnen. Sie werden die Schönheit der Mathematik und die Möglichkeit mit ihr physikalische Phänomene zu diskutieren irgendwann einmal würdigen, wenn Sie sich auf die Mathematik einlassen.

Ich möchte Sie daher noch einmal explizit auf die an sich sehr einfache Struktur der theoretischen Physik hinweisen. Sie fangen in den meisten Fällen mit einfachen Gesetzmäßigkeiten an. Diese gewinnen Sie aus einer Reihe Experimenten oder postuliere deren Gültigkeit, da die tägliche Erfahrung Ihnen nicht widerspricht. Alles was danach kommt ist der Wunsch Einsicht zu gewinnen, durch eine geeignete Mathematische Manipulation dieser Grundgesetze. Hier in der theoretischen Mechanik, ist es die Newtonsche Bewegungsgleichung. Multiplizieren Sie diese skalar oder vektoriell mit der Ortskoordinate, kommen Sie zur Energie- bzw. Drehimpulserhaltung. Ich selbst habe meinen wissenschaftlichen Hintergrund eher in der Elektrodynamik und Optik. Daher werde ich mich im Laufe dieses Kurses häufig auf Analogien dieses Teilgebietes der Physik bedienen. Die Ausgangspunkte der Elektrodynamik sind zum Beispiel beobachtbare Kraftgesetze die Ladungen oder Ströme gegenseitig aufeinander ausüben (Coulombkraft oder Lorentzkraft). Zusammen mit dem Superpositionsprinzip und den Methoden der Vektoralgebra, können Sie nahezu die gesamte Theorie herleiten. Sie brauchen wirklich nicht mehr.

Die theoretische Mechanik, wie wir sie hier in diesem Kurs behandeln, wird auch als klassische Mechanik bezeichnet. Diese geht hauptsächlich auf die Arbeiten von Newton zurück, der diese im Rah-

² Am KIT folgt die Reihenfolge der Kurse zur theoretischen Physik ziemlich kanonisch der klassischen Reihenfolge von theoretischer Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik und Thermodynamik / statistischer Physik.

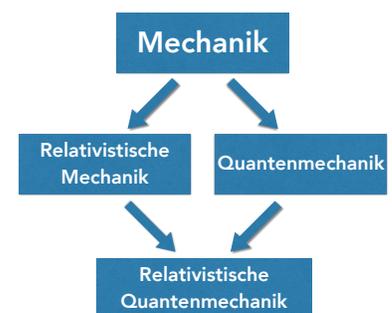


Abbildung 1.1: Sir Isaac Newton porträtiert von Godfrey Kneller, London 1702.

men seines 1687 veröffentlichten Hauptwerkes *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* abschliessend zusammenfasste. Daher wird die klassische Mechanik häufig auch als Newtonsche Mechanik bezeichnet. Dies bedeutet aber natürlich nicht, dass er der alleiniger Urheber der klassischen Mechanik ist. Seine Arbeiten basieren vielmehr auf früheren Arbeiten von Archimedes, Galilei, Kepler, Descartes, Huygens und anderen, welche gegen Ende des 17. Jahrhunderts zu einem einheitlichen System von Newton zusammengefasst wurden. Dieses wurde in den folgenden Jahrzehnten weiter entwickelt und verfeinert, so dass man lange Zeit davon ausging, das gesamte Naturgeschehen zumindest prinzipiell auf die Newtonsche Mechanik zurückführen und in ihrem Rahmen erklären zu können. Das dem nicht so ist, verdanken wir vor allem der weiteren Entwicklung experimenteller Techniken und Methoden, welche gegen Mitte/Ende des 19. Jahrhunderts bzw. Anfang des 20. Jahrhunderts Einsichten in Systeme brachten, welche im Rahmen der klassischen Mechanik nicht mehr erklärbar waren. Die Grenze der klassischen Physik wurden sichtbar.

Dazu zählen zum einen Prozesse, welche bei sehr großen Geschwindigkeiten stattfinden. Es wurde die relativistische Mechanik entwickelt, welche die klassische Mechanik nur noch als Grenzfall beinhaltet. Man konnte erkennen, dass die klassische Mechanik nur gültig ist, wenn die Geschwindigkeiten mit denen sich Körper im Raum bewegen, sehr viel kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit. Die Lichtgeschwindigkeit selbst stellt eine obere Grenze für die Geschwindigkeit zur Übertragung von Signalen bzw. Informationen dar. Weiterhin wird in der relativistischen Mechanik das Konzept eines absoluten Raumes aufgegeben, mit dessen Definition wir die klassische Mechanik im Folgenden beginnen wollen. Raum und Zeit werden zu einer vereinheitlichenden Koordinaten zusammengefasst. Weiterhin versagen die Gesetze der klassischen Mechanik bei sehr großen Massen, was zu einer Krümmung eben dieser Raum-Zeit und zu interessanten Vorhersagen führt. Diese Vorhersagen, z.B. dass durch die Krümmung des Raums Licht von Sternen im geometrischen Schatten einer nichtgekrümmten Raum-Zeit zu uns gelangen können, wurden experimentell überprüft und führten so zur allgemeinen Akzeptanz der relativistischen Mechanik.

Zum anderen verlieren die Gesetze der klassischen Mechanik ihre Gültigkeit bei sehr kleinen Strukturen bzw. sehr kleinen Wirkungen. Schlüsselexperimente hier waren die Beobachtung von Phänomenen, welche normalerweise Wellen zugeschrieben werden, in Experimenten, die mit Teilchen durchgeführt wurden. So wurden Interferenzmuster bei der Beugung von Elektronen an einem Spalt bzw. auch einem Doppelspalt beobachtet. Der probabilistische Ausgang einer Messung ist ein weiterer Indiz für die Notwendigkeit einer nichtklassischen Beschreibung. In der Elektrodynamik und der Optik führt erst die



Quantisierung der Amplituden von elektromagnetischen Wellen³ zur Erklärung verschiedener Experimente. Diese Quantisierung ist ein weiterer Hinweis darauf, dass klassische Konzepte nicht in jedem Falle geeignet sind, alle Experimente richtig zu beschreiben. Schliesslich wurden beide Teilgebiete im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik vereinigt. Diese müssen Sie anwenden, wenn Sie die Physik einzelner Teilchen bei sehr hohen Geschwindigkeiten richtig verstehen wollen.

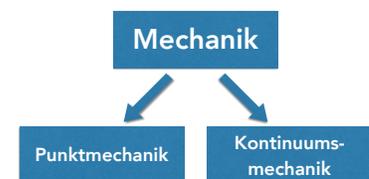
All diese weiterführenden Theorien werden Ihnen aber erst in höheren Semestern begegnen. Beachten Sie bitte, dass im Allgemeinen eine möglichst einfache Theorie zur Beschreibung der Sie interessierenden physikalischen Systeme zu bevorzugen ist. Da die alles vereinheitlichende Theorie noch nicht gefunden wurde, muss jede Theorie zwangsweise Grenzen ihrer Vorhersagbarkeit besitzen. Diese schmälern auf keinen Fall den Wert einer Theorie, sondern begrenzt nur die Vielfalt der physikalischen Phänomene, die sie beschreiben kann.

Eine Klassifizierung bzw. eine Einteilung der Mechanik kann auf verschiedene Arten und Weisen vorgenommen werden⁴. Eine Klassifizierung basiert auf der Beschreibung der Körper, deren Bewegung Sie diskutieren möchten. Sie können dessen Bewegung zum Beispiel richtig beschreiben, wenn Sie die Bewegung aller Teilchen kennen, aus denen der gesamte Körper aufgebaut ist. Dies ist das weite Feld der Punktmechanik und kann, bei einer sehr großen Anzahl von in den Bewegungsgleichungen zu berücksichtigenden Teilchen, sehr schnell zu einem sehr komplizierten Problem werden. Der einfachste Fall liegt aber vor, und mit diesem werden wir uns zunächst beschäftigen, wenn man die Bewegung des gesamten Körpers beschränken kann auf die Bewegung eines einzelnen Punktes. Dann wird der Körper mit Hilfe eines Massepunktes ohne räumliche Ausdehnung idealisiert beschrieben. Die gesamte Masse des Körpers ist mit diesem Punkt assoziiert. Beachten Sie bitte, dies ist eine Modellvorstellung. Sie erlaubt aber auf ausgezeichnete Art und Weise die Bewegung eines Körpers im Raum zu beschreiben. Da keine Ausdehnung bzw. Struktur verbunden ist mit dem Massepunkt, kann man aber somit ausschliesslich translatorische Bewegungen des Körpers im Raum beschreiben. Innere Bewegungen und Rotationen werden nicht berücksichtigt bzw. werden nicht beschrieben.

Jeder materielle Körper bzw. Systeme bestehend aus diesen Körpern können aber zusammengesetzt werden aus vielen Massepunkten. So gelangt man zur Beschreibung von Massenpunktsystemen, deren Mechanik auch als Punktmechanik bezeichnet wird. Starre Körper können im Rahmen dieser Punktmechanik als Systeme von Massepunkten verstanden werden, deren Abstand und räumliche Anordnung fixiert ist. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns sowohl mit der Mechanik von Massepunkten als auch von Systemen von Massepunkten

³ Dies führt zur Einführung des Begriffs eines Photons.

⁴ Sie werden sehen, Physiker, insbesondere theoretische Physiker, haben eine sehr große Neigung zur Klassifizierung und zur Katalogisierung. Ein solches Vorgehen hilft, ein systematisches Verständnis zu entwickeln. Diese Fähigkeit wird Ihnen später von großem Nutzen sein, ganz gleich ob Sie als Wissenschaftler arbeiten oder im Finanzmanagement.



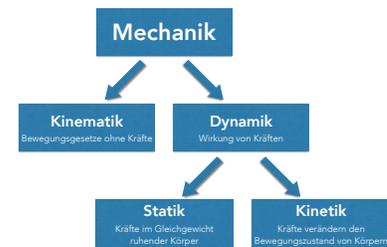
beschäftigen.

In Fortsetzung der Komplexität gelangt man schliesslich zur Kontinuumsmechanik, im Rahmen derer die elastischen und plastischen Eigenschaften fester Körper bzw. die Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen beschrieben werden. Diese Körper müssten beschrieben werden aus einer nicht mehr zu handhabenden Anzahl von relativ zueinander nicht mehr starr verbundenen Massepunkten, so dass deren explizite Berücksichtigung nicht mehr praktikabel ist. Stattdessen werden feldtheoretische Methoden benutzt, um die Bewegung solche Materialien mit Hilfe eines physisch strukturlosem Kontinuums zu beschreiben. Diese Kontinuumsmechanik wird nicht mehr Gegenstand dieser Vorlesung sein.

Ein alternativer Zugang zur Klassifizierung der Mechanik besteht in der Unterscheidung zwischen Kinematik und Dynamik. In der Kinematik, dem Teil der Mechanik welche wir als erstes in dieser Vorlesung diskutieren wollen, werden die Bewegungsformen von Massepunkten zunächst ohne Betrachtung der Ursache diskutiert. Die Entstehung der Bewegung ist zunächst nicht von Interesse; die Massepunkte bewegen sich einfach. Im Gegensatz zur Kinematik steht die Dynamik, welche nun auch die Ursachen der Bewegung betrachtet und mathematisch mit berücksichtigt. Dynamische Bewegungsgleichungen, i.A. Differentialgleichungen in denen auf der linken Seite die dynamischen Größen stehen und auf der rechten Seite die Ursachen (Kräfte), bilden das mathematische Gerüst der Dynamik. In der Dynamik diskutiert man entsprechend die Änderung des Bewegungszustandes von Körpern verursacht von auf sie wirkenden Kräfte. Wir werden diskutieren, dass sich physikalische Systeme im Allgemeinen als Funktion der Zeit zu einem Gleichgewichtszustand hin entwickeln. Dies ist ein Zustand, in dem auf den Körper keine Kraft mehr wirkt. Daher ist ein wichtiges Teilgebiet der Dynamik die Statik, in welchem die Bedingungen des Ruhezustandes, des Gleichgewichtes, untersucht werden.

Eine dritter Zugang zur Klassifizierung der Mechanik selbst, besteht in der Auswahl der mathematischen Methoden zur Beschreibung der Dynamik des Systems. Wir unterscheiden zwischen der Newtonschen Mechanik (diese Vorlesung), der Lagrangeschen Mechanik, der Hamiltonschen Mechanik und der Hamilton-Jacobi Mechanik. Die letztgenannten Methoden sind nicht mehr Gegenstand dieser sondern Ihrer nächsten Theorievorlesung (Klassische Theoretische Physik B).

Die Vorlesung beschränkt sich auf die Kinematik und die Dynamik von Massepunkten und Systeme von Massepunkten. Wir werden in einem ersten Kapitel Grundelemente der Kinematik kennenlernen. In einem zweiten Kapitel werden wir uns mit den Newtonschen Axiomen auseinandersetzen. Wir werden uns dann mit der Dynamik eines einzelnen Massepunktes beschäftigen und insbesondere die Bilanzglei-



chungen diskutieren. Wir werden dann eine Reihe von Bewegungen diskutieren, wobei wir zwischen konservativen und dissipativen Systemen unterscheiden werden. Anschliessend werden wir das Gelernte auf Massepunktsysteme erweitern.

2 Kinematik

Mathematischer Einschub (Vektoren)

Bevor wir mit der theoretischen Beschreibung physikalischer Phänomene im Rahmen der Kinematik beginnen, möchten wir kurz einige einleitende Definitionen geben und einige wichtige mathematische Konzepte diskutieren. Diese werden Sie auch sehr ausführlich in entsprechenden Mathematikvorlesungen behandeln. Daher sollen die Ausführungen im Folgenden nur als kurze funktionelle Zusammenfassung dessen dienen, was wir unmittelbar benötigen werden.

Alle physikalischen Größen können als Skalare, Vektoren oder Tensoren beschrieben werden. Für uns zunächst relevant sind nur die beiden erstgenannten Größen.

Eine skalare physikalische Größe wird alleine durch die Angabe eines Zahlenwertes (Maßzahl) und einer Einheit (Maßeinheit) charakterisiert. Physikalisch beobachtbare skalare Größe werden mit einer reellen Zahl angegeben. Beispiele sind die Masse oder das Volumen eines Körpers, die Temperatur, der Druck oder auch die Wellenlänge.

Eine vektorielle physikalische Größe verlangt neben der Angabe eines Betrages zusätzlich die Angabe einer Richtung. Beispiele sind die Verschiebung, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Kraft oder der Impuls. Allgemein sind Vektoren im Raum \mathbb{R}^n definiert mit $n \in \mathbb{N}$. Sie sind damit definiert als die Menge der n -Tupel (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \in \mathbb{R}$.

Beachten Sie bitte die hier verwendete Notation: Fett geschriebene Größen sind Vektoren. Kursiv geschriebene Größen sind Skalare. Einheiten werden nicht kursiv geschrieben.

Im Allgemeinfall befinden wir uns in einem drei-dimensionalen (kartesischen) Raum, so dass $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ist, den wir allgemein als Vektorraum schreiben können. Ein Vektor in diesem Raum wird beschrieben mittels

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Die von uns zu Beginn der Vorlesung am häufigsten verwendeten Vektoren sind Ortsvektoren \mathbf{r} , mit welchen wir die Punkte des Euklidischen Raumes beschreiben können.

Um dies eindeutig durchführen zu können, müssen wir einen Koordinatenursprung definieren. Wie wir später diskutieren werden, ist die Definition dieses Koordinatenursprungs willkürlich und nicht eindeutig. Wir können jeden beliebigen Punkt als unseren Koordinatenursprung mittels einer geeigneten Translation, Rotation und eines Boosts definieren. Ein Boost bezeichnet die Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen, welche sich relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen. Der Koordinatenursprung legt uns das Bezugssystem fest, einen Nullpunkt. Der Ortsvektor ist dann der Vektor, welcher den Koordinatenursprung mit dem entsprechenden Punkt im physikalischen Raum verbindet

$$\vec{0P} = \mathbf{r} \rightarrow \text{Ortsvektor}$$

Der Vektor hat einen Betrag und eine Richtung. Zur Festlegung der Richtung benötigen wir eine Referenzrichtung. Diese wird auch als Koordinatensystem bezeichnet. Eine einfache Wahl für ein Koordinatensystem ist das kartesische. Es wird gebildet aus drei

senkrecht aufeinander stehenden Geraden, die sich in einem gemeinsam Punkt, dem Koordinatenursprung schneiden. Die Richtung der Geraden wird definiert durch Einheitsvektoren. Diese besitzen die Länge eins und stehen senkrecht aufeinander. Sie bilden damit eine orthonormale Basis. Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems sind definiert als

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit wird ein Vektor beschrieben mittels

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$$

Andere Koordinatensysteme werden wir im Laufe der Vorlesung kennenlernen. Diese sind dann definiert durch andere Einheitskoordinaten. Beispiele für andere Koordinatensysteme, mit denen Sie im Laufe der Vorlesung zu tun haben werden, sind Kugelkoordinaten, Polarkoordinaten bzw. Zylinderkoordinaten.

Mathematischer Einschub (Vektorprodukt)

Die oben erwähnte Eigenschaft der Orthonormalität der Einheitsvektoren lässt sich mathematisch einfach fassen mit Hilfe des Skalarproduktes. Dieses ist definiert für zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

Beachten Sie, häufig wird an Stelle von $\sum_{i=1}^3 a_i b_i$ auch einfach nur $a_i b_i$ geschrieben; das Summenzeichen wird also weggelassen. Dies wird als Einsteinsche Summenkonvention bezeichnet. Hier wird immer über doppelt auftretende Indizes auf einer Seite der Gleichung summiert, ohne dass dieses Summenzeichen explizit mit geschrieben wird. Im Rahmen dieser Vorlesung wird diese Schreibweise nur selten benutzt. In späteren Vorlesungen wird sie Ihnen häufiger begegnen und Sie werden diese Notation schätzen lernen.

Das Skalarprodukt lässt sich auch ausrechnen mittels der Längen/Beträge der beiden Vektoren. Wir verwenden dazu die euklidische Norm (Standardnorm oder auch 2-Norm). Diese euklidische Norm eines Vektors \mathbf{a} ist definiert als

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$$

Mit dieser Definition lässt sich das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ausrechnen mittels

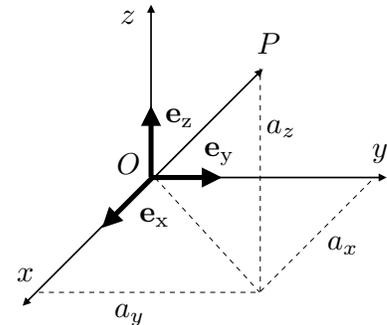
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

wobei θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Das Skalarprodukt ist ein Maß für die Größe der Projektion eines Vektors \mathbf{a} auf einen anderen Vektor \mathbf{b} . Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren ist ein Skalar, was offensichtlich zur Namenswahl führte. Man bezeichnet es auch als Punktprodukt; motiviert durch die Schreibweise. Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren verschwindet, wenn entweder der Winkel zwischen beiden Vektoren $\frac{\pi}{2}$ ist oder die Länge einer der beiden Vektoren verschwindet. Das Skalarprodukt ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Das Skalarprodukt wird auch als inneres Produkt bezeichnet.

Die Eingangs erwähnte Orthonormalität der Einheitsvektoren lässt sich nun schreiben als

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

wobei hier das Kronecker Symbol δ_{ij} verwendet wurde. Dieses beträgt 1, wenn die beiden Indizes identisch sind. Und es ist 0, wenn die beiden Indizes verschieden sind.



Im Gegensatz zum inneren Produkt steht das äußere Produkt, welches auch Kreuzprodukt genannt wird, ebenfalls motiviert durch die Schreibweise. Es verbindet zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} und man erhält wieder einen Vektor, z.B. \mathbf{c} . Daher wird es auch als Vektorprodukt bezeichnet. Es wird berechnet mittels

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

In Komponentenschreibweise und mit Hilfe des sogenannten Levi-Cevita-Pseudotensors ε_{ijk} , lässt sich die i 'te Komponente des Vektors \mathbf{c} des Kreuzproduktes auch schreiben als

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Zur Evaluation dieses Ausdruckes wenden wir hier auch wieder die Einsteinsche Summenkonvention an: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert. Zur vollständigen Definition des Levi-Cevita-Pseudotensors geht man i.A. davon aus, dass $\varepsilon_{123} = 1$ und wendet die folgenden Rechenregeln an:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{mindestens 2 identische Indices} \\ 1 & \text{wenn } i, j, k \text{ eine gerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ sind} \\ -1 & \text{wenn } i, j, k \text{ eine ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ sind} \end{cases}$$

Der Levi-Cevita-Pseudotensor ist damit anti-symmetrisch für jedes Indexpaar. Er besteht aus 27 Komponenten, von denen 21 null sind und jeweils 3 Komponenten sind ± 1 . Rechnungen mit Hilfe des Levi-Cevita-Pseudotensors sind besonders dann attraktiv, wenn Ihnen z.B. doppelte Kreuzprodukte begegnen. Es gilt:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \det \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Speziell für uns relevant ist das Produkt von Levi-Cevita-Pseudotensoren mit einem identischen Index. Es gilt:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{kl} \delta_{jm}$$

Gewöhnen Sie sich bitte an die Nutzung eines solchen Ausdruckes. Im Rahmen der Theoretischen Mechanik ist die Verwendung des Levi-Cevita-Pseudotensors vielleicht nicht in jedem Falle notwendig. In späteren Vorlesungen werden Sie es aber schätzen, wenn Sie längere Rechnungen formal sehr übersichtlich aufschreiben können, wenn Sie den Levi-Cevita-Pseudotensor benutzen. Spätestens in der Elektrodynamik ist das der Fall. Mehr Details dazu finden Sie im eingangs erwähnten Buch von M. Otto.

Die Länge des Vektors \mathbf{c} berechnet sich mittels

$$c = ab \sin \theta,$$

wobei θ wieder der Winkel zwischen den beiden Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist. Der Vektor \mathbf{c} steht senkrecht auf der Fläche definiert durch \mathbf{a} und \mathbf{b} , sodass \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} ein Rechtssystem bilden.

Mathematischer Einschub (Differentialrechnung)

Im Folgenden werden wir das mathematische Hilfsmittel der Differentiation und der Integration benötigen, um Bahnkurven und daraus abgeleitete Größen zu berechnen.

Betrachten wir zunächst reelwertige Funktionen im ein-dimensionalen Raum als Funktion des Ortes x . Diese bilden die Ortskoordinate auf einen Funktionswert ab

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}.$$

Der Differentialquotient bzw. die Ableitung der Funktion $f(x)$ beschreibt dann die

differentielle Änderung der Funktion in einem infinitesimal kleinen Intervall Δx :

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Geometrisch bezeichnet man diese Größe als die Steigung der Funktion $f(x)$ am Ort x . Die dazugehörige Gerade stellt eine lineare Näherung der Funktion in näherer Umgebung zu x dar.

Einige Beispiele für Ableitungen sind die Folgenden:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow f'(x) = x \quad (2.1)$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \quad (2.2)$$

Ableitungen nach der Zeit werden normalerweise in Kurznotation mit einem Punkt über der Funktion gekennzeichnet:

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Die wichtigsten Rechenregeln der Differentiation sind die Potenzregel [anwendbar auf die Ableitung einer Potenzfunktion der Form $f(x) = ax^n$]

$$\frac{df(x)}{dx} = anx^{n-1},$$

die Summenregel (anwendbar auf die Ableitung der Summe zweier Funktionen)

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x),$$

die Produktregel (anwendbar auf die Ableitung des Produktes zweier Funktionen)

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

die Reziprokenregel (anwendbar auf Ableitungen mathematischen Funktionen der Form $f(x) = \frac{1}{v(x)}$)

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{v(x)^2} \frac{dv(x)}{dx},$$

die Quotientenregel (anwendbar auf die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

und die Kettenregel (anwendbar auf die Ableitung einer Funktion, welche die Funktion einer Funktion ist)

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}.$$

Die Umkehroperation der Differentiation ist die Integration. Hier wird bei gegebener Funktion $f(x)$ eine Funktion $F(x)$ dergestalt gesucht, dass $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ gilt. Diese Funktion berechnet sich mittels

$$F(x) = \int^x f(x') dx'.$$

Klassische Beispiele sind die Folgenden:

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow F(x) = -\cos(x),$$

$$f(x) = e^{ax} \rightarrow F(x) = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

Man unterscheidet zwischen einer unbestimmten Integration ohne feste Integrationsgrenzen, was der Suche nach der Stammfunktion $F(x)$ entspricht oder der bestimmten Integration mit festgelegten Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Wichtige Regeln der Integration betreffen die partielle Integration (Integration des Produktes einer Funktion und der Ableitung einer anderen Funktion, in Anwendung der oben erwähnten Produktregel der Differentiation):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \end{aligned}$$

und die Substitutionsregel

$$\int_{g_1}^{g_2} f(g)dg = \int_{x_1}^{x_2} f(g(x))g'(x)dx.$$

Ein Beispiel hierfür wäre die Berechnung des Integrals

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos x^2 dx.$$

Hier ersetzen wir die Variabel $g = x^2$ und damit ist $dg = 2xdx$. Da $g'(x) = 2x$ ist, brauchen wir (praktischerweise) nur noch die Integrationsgrenzen ersetzen zu $g_1 = x_1^2 = \pi$ und $g_2 = x_2^2 = 4\pi$. Damit berechnet sich das Integral zu

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos x^2 dx = \int_{\pi}^{4\pi} \cos g dg = \sin g|_{\pi}^{4\pi} = \sin 4\pi - \sin \pi = 0 - 0 = 0.$$

2.1 Bahnkurve, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Die Kinematik beschränkt sich auf die Betrachtung von Massepunkten mit einer zu vernachlässigenden räumlichen Ausdehnung. Ein klassisches Beispiel hierfür wäre die Beschreibung der Bewegung der Erde um die Sonne. Die Erde wird hierbei als Massepunkt ohne Ausdehnung betrachtet, in dem die gesamte Masse der Erde konzentriert ist. Jedwede interne Dynamik, also z.B. die Rotation der Erde um ihre eigene Achse, ist im Rahmen dieser Betrachtung irrelevant und wird nicht weiter berücksichtigt.

Die Position des Massepunkts wird vollständig durch einen Ortsvektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

charakterisiert.

Wenn sich ein Massepunkt in Raum und Zeit bewegt, dann bildet diese zeitliche Abfolge seiner Aufenthaltspunktes eine Bahnkurve,

welche auch als Trajektorie bezeichnet wird. Diese Trajektorie ist eine Abbildung von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sie ist definiert ist

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$$

Wichtig ist hier zu beachten, dass lediglich die Komponente der Trajektorie zeitlich veränderliche Größe sind; nicht aber die Einheitsvektoren. Diese sind zeitunabhängig.

Für alle weiteren Betrachtung in diesem Kapitel, wollen wir voraussetzen, dass wir die Trajektorie kennen. Wir wollen noch nicht die Ursache der Bewegung klären, sondern zunächst Aussagen über die Eigenschaften der Bewegung treffen. Die Diskussion der Ursache wird sich im Folgenden anschliessen.

Die Geschwindigkeit des Massepunktes ist definiert als die differentielle zeitliche Änderung des Ortes des Massepunktes:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ ist tangential zur Bahnkurve.

In kartesischen Koordinaten berechnet sich die Geschwindigkeit aus der individuellen Geschwindigkeit der einzelnen Komponenten

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\mathbf{e}_y + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z.$$

Die Beschleunigung des Massepunktes ist definiert als die differentielle zeitliche Änderung der Geschwindigkeit des Massepunktes. Die Beschleunigung ist damit die zweite Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit:

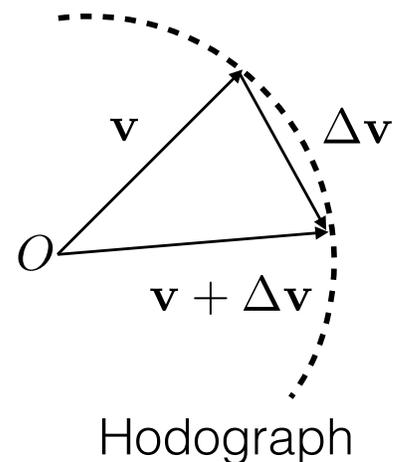
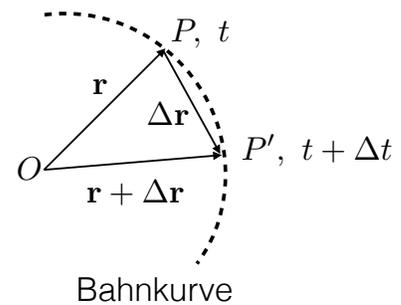
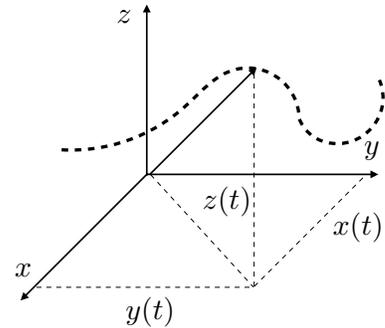
$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}.$$

Der Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}(t)$ ist tangential zum Hodographen. Der Hodograph der Bewegung eines Massepunktes ist die Abbildung des Geschwindigkeitsvektors als Funktion der Zeit. Er beschreibt somit die Menge der Endpunkte der von einem festen Punkt aus abgetragenen Geschwindigkeitsvektoren.

In kartesischen Koordinaten berechnet sich die Beschleunigung aus der individuellen Beschleunigung der einzelnen Komponenten

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{e}_x + \ddot{y}(t)\mathbf{e}_y + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z.$$

Auch wenn formal höhere zeitliche Ableitungen der Bahnkurve diskutiert werden können, gibt es keine physikalische Gründe dies zu tun.



2.2 Koordinatensysteme

Bisher betrachteten wir lediglich kartesische Koordinaten. Hier sind die Koordinatenlinien Geraden, welche definiert werden durch feste Basisvektoren. Sie sind zeitlich nicht veränderlich. Häufig ist es aber hilfreich, die Bewegung eines Massepunktes in einem anderen Koordinatensystem zu beschreiben, in welchem die mathematische Beschreibung der Bewegung wesentlich einfacher ist. Man spricht hier von einem problemangepassten Koordinatensystem. Im Laufe Ihrer Ausbildung als Physiker sollten Sie eine gewissen Intuition entwickeln zu erkennen, welches Koordinatensystem zur Lösung eines konkreten Problems geeignet ist. Dies wird Ihnen helfen, viele Probleme möglichst einfach zu lösen. Ausgewählte alternative Koordinatensysteme wollen wir im Folgendem kennenlernen.

2.2.1 Natürliche Koordinaten

Im Gegensatz zu den kartesischen Koordinaten, wollen wir im Folgenden die Bewegung von Massepunkten zunächst mit Hilfe der sogenannten natürlichen Koordinaten beschreiben. Diese stellen ein lokales Koordinatensystem dar, welches angepasst ist an die Bahnkurve des Massepunktes. Man spricht von einem begleitenden Dreibein, da sich die Orientierung des Koordinatensystems als Funktion der Bahnkurve ändert und immer relativ zu ihr orientiert ist.

Zuerst betrachten wir den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$, welcher immer tangential zur Bahnkurve gerichtet ist¹. Diese Richtung definiert somit Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$. Es gilt

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{t}(t).$$

Da der Tangenteneinheitsvektor, wie der Name schon sagt, ein Einheitsvektor ist, muss er eine normierte Länge von eins besitzen

$$|\mathbf{t}(t)|^2 = 1.$$

Wir führen an der Stelle die Bogenlänge der Bahnkurve s zwischen dem Punkt P (zum Zeitpunkt t) und einem (zu einem geeignet gewählten Anfangszeitpunkt t_0 bestimmten) Punkt P_0 ein. Dies entspricht dem zwischen t_0 und t zurückgelegten Weg und berechnet sich zu

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t ds(t') = \int_{t_0}^t |d\mathbf{r}(t')|.$$

Hier sehen Sie, dass $ds(t)^2 = d\mathbf{r}(t) \cdot d\mathbf{r}(t)$ ist.

Da $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$ ist, können wir die Geschwindigkeit auch ausdrücken als

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt}$$

¹ Beachten Sie bitte, ich versuche die Abhängigkeit einer Größe von den verschiedenen Variablen immer explizit mit aufzuführen. Diese Klarheit in der Notation halte ich für wichtig, um Fehler zu vermeiden. Sehen Sie es als einfach überprüfbare Tatsache an, dass wenn auf der linken Seite einer Gleichung eine Größe steht, welche von der Zeit abhängig ist, auf der rechten Seite der Gleichung die Zeit irgendwo auftauchen muss. Entweder explizit oder in Form einer Größe, welche wiederum selbst von der Zeit abhängt. An der Tafel in der Vorlesung, werde ich diese Abhängigkeit aus Gründen einer kürzeren Notation weglassen. Hier im Skript lasse ich es vermutlich auch manchmal weg, dann aber eher nur aus Schludrigkeit (sehen Sie mir das bitte nach) oder für den Fall, dass diese Abhängigkeit offensichtlich ist. Wenn Sie eine Größe nach der Zeit ableiten, sollte diese auch von der Zeit abhängen.

Der erste der beiden Brüche ist der Tangenteneinheitsvektor und der zweite der beiden Brüche ist der Betrag der Geschwindigkeit.

Die Beschleunigung ausgedrückt mit Hilfe des Tangenteneinheitsvektor ergibt sich als

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \mathbf{t}(t) + v(t) \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt},$$

wobei wir die Produktregel angewandt haben im zweiten Schritt. Wenn wir auf die Forderung $|\mathbf{t}(t)|^2 = \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}(t) = 1$ die zeitliche Ableitung anwenden

$$\frac{d1}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} [\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}(t)] = 2\mathbf{t}(t) \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}$$

erkennen wir, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{t}(t)$ und $\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}$ verschwindet. Wir können dann schlussfolgern, dass beide Vektoren senkrecht aufeinander stehen

$$\mathbf{t}(t) \perp \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}.$$

Wir definieren die Richtung der zeitlichen Ableitung des Tangenteneinheitsvektor als den Hauptnormaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$; also $\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \parallel \mathbf{n}(t)$. Beachten Sie bitte, dass der Hauptnormaleneinheitsvektor ebenfalls normiert ist. Es gilt $|\mathbf{n}(t)|^2 = 1$. Merken Sie sich bitte, Ableitung eines Einheitsvektors nach einer Größe von der dieser abhängt stehen immer senkrecht zum Vektor selbst. In diesem Fall ist der Einheitsvektor explizit von der Zeit abhängig, so dass die Ableitung des Einheitsvektors nach der Zeit senkrecht zu diesem steht. Damit ist

$$\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} = c(t)\mathbf{n}(t).$$

Wie groß ist jetzt aber genau diese skalare Größe $c(t)$?

Aus der Skizze nebenan erkennt man, dass die Änderung des überstrichenen Winkелеlements $d\phi(t)$ im Grenzfall eines vernachlässigbar kleinen Zeitintervalls $\Delta t \rightarrow 0$ sich gerade berechnet zu

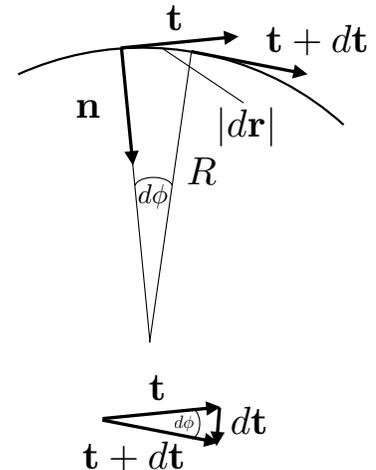
$$d\phi(t) = \frac{|d\mathbf{r}(t)|}{R(t)} = |d\mathbf{t}(t)|.$$

Hierbei ist $R(t)$ der Krümmungsradius der Kurve. Er entspricht dem Radius eines Kreises, welcher in näherer Umgebung des betrachteten Punktes die Bahnkurve annähert. Damit ergibt sich für die Länge von

$$c(t) = \frac{|d\mathbf{t}(t)|}{dt} = \frac{|d\mathbf{r}(t)|}{R(t)dt} = \frac{|\mathbf{v}(t)|}{R(t)} = \frac{v(t)}{R(t)}.$$

Die Beschleunigung lässt sich so mit Hilfe des Tangenteneinheitsvektor und des Hauptnormaleneinheitsvektors berechnen zu

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \mathbf{t}(t) + \frac{v(t)^2}{R(t)} \mathbf{n}(t).$$



Der erste Term beschreibt die tangentielle Beschleunigung. Der zweite Term beschreibt die radiale Beschleunigung. Diese Größe R bezeichnet den Krümmungsradius der Bahnkurve. Für eine geradlinige Bewegung ist der Krümmungsradius unendlich. Für alle anderen besitzt er einen endlichen Wert.

Man bezeichnet die durch $\mathbf{t}(t)$ und $\mathbf{n}(t)$ aufgespannte Ebene auch als die Schmiegungebene der Bahnkurve. Der Beschleunigungsvektor liegt immer in der Schmiegungebene und zeigt nach der konkaven Seite der Bahnkurve.

Als dritter Vektor wird zusätzlich der Binormaleneinheitsvektor $\mathbf{b}(t)$ eingeführt, welcher senkrecht auf der Schmiegungebene steht. Er ist definiert als

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

Dieser Vektor ist ebenfalls normiert ($|\mathbf{b}(t)|^2 = 1$) und er beschreibt Bewegungen aus der Ebene heraus. Er wird in der Mechanik im allgemeinen nicht weiter benötigt, da Beschleunigungen höherer Ordnung kaum eine Rolle spielen.

Koordinatensysteme als solches sind nicht fixiert. Es ist zum Beispiel einfach zu erkennen, dass ein Punkt im Raum relativ zu verschiedenen Bezugspunkten bestimmt, durch unterschiedliche Koordinaten charakterisiert ist. Neben einer Translation können Koordinatensysteme auch relativ zueinander rotiert werden². Bezugspunkte von Koordinatensystemen können sich im Zweifel auch als Funktion der Zeit ändern und sie können eine von null verschiedene Relativgeschwindigkeit zueinander besitzen. Dies werden wir später noch ausführlich diskutieren. In all diesen Situationen ist es hilfreich, Koordinaten von einem Koordinatensystem in ein anderes zu überführen. Dies kann man mathematisch sehr elegant formulieren, wenn man die entsprechenden Vektoren, welche die Koordinaten enthalten, mit passenden Matrizen multipliziert, welche eineindeutig die Punkte eines Koordinatensystems in ein anderes überführen. Bisher haben wir nur skalare Größen und Vektoren betrachtet. Daher soll im Folgenden eine kurze Übersicht über das mathematische Konstrukt der Matrix gegeben werden. Anschliessend werden wir spezielle Matrizen diskutieren, welche uns helfen, die Koordinaten von Punkten zwischen verschiedenen Koordinatensystemen zu konvertieren.

² Die Translation selbst ist einfach definiert. Jeder Ortskoordinate in einem Bezugssystem wird ein Translationsvektor hinzuaddiert, welcher gerade der Vektor ist, der die beiden Ursprünge der betrachteten Koordinatensysteme verbindet

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}.$$

Mathematischer Einschub (Matrizen)

(a) *Formale Definition einer Matrix*

Per Definition ist eine $n \times m$ große Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gegeben durch

$$\mathbf{A} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{array} \right)}_{m \text{ Spalten}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{array}} \right\} n \text{ Zeilen.}$$

Jeder der Einträge der Matrix a_{ij} ist dabei selbst eine reelle Zahl, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Individuelle Elemente einer Matrix können adressiert werden als $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$, wobei die beiden Indizes zwischen $i = 1 \dots n$ und $j = 1 \dots m$ laufen können.

(b) *Spezielle Matrizen*

- (i) Eine Matrix bei der die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten ist, also $n = m$, wird als quadratische Matrix bezeichnet.
- (ii) Eine Matrix mit nur einer Spalte, also $m = 1$, wird als Spaltenvektor bezeichnet.
- (iii) Eine Matrix mit nur einer Zeile, also $n = 1$, wird als Zeilenvektor bezeichnet.

(c) *Rechenregeln*

- (i) Bei der Multiplikation mit einer skalaren Größe $\lambda \in \mathbb{R}$, wird jedes einzelne Element der Matrix mit dieser skalaren Größe multipliziert

$$(\lambda \mathbf{A})_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

- (ii) Bei der Addition zweier Matrizen mit identischen Größen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, werden die entsprechenden Einzelelemente miteinander addiert.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij}$$

Beachten Sie bitte, Matrizen mit unterschiedlichen Größen können nicht miteinander addiert werden.

- (iii) Die Multiplikation zweier Matrizen mit den Größen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ergibt eine Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Zur Berechnung der Einträge $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij}$ multipliziert man den i -ten Zeilenvektor von \mathbf{A} mit dem j -ten Spaltenvektor von \mathbf{B} . Man berechnet also

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} b_{lj}.$$

Man schreibt

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}$$

Einige Bemerkungen sollen hier gemacht werden:

- * Für das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ lassen sich die Argumente nicht vertauschen. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ist nicht definiert außer für den speziellen Fall, dass $k = n$.
- * Für das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- * Für den Fall, dass $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ ein Zeilenvektor ist und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ein Spaltenvektor ist, dann ist das Matrixprodukt aus $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ eine skalare Größe und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine quadratische Matrix.
- * Für den Spezialfall des Produktes einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ist das Produkt dieser beiden Größen ein Vektor mit der Länge n , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Die Elemente dieses Vektors berechnen sich aus

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})_i = \sum_{l=1}^m a_{il} b_l.$$

- (iv) Die Determinante einer Matrix der Größe $n \times n$ ist rekursiv definiert. Wir beschränken uns hier auf Matrizen der Größe $n = 2$ und $n = 3$, welche überwiegend für uns von Interesse sind.

- * $n = 2$

Die Matrix ist dann definiert als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante berechnet sich dann zu

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Es ist also die Differenz der Gegendiagonalen zur Diagonalen.

* $n = 3$

Die Matrix ist dann definiert als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante berechnet sich dann zu

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Im Skript ist mir das zu aufwendig zu zeichnen, aber Sie können die entsprechenden Terme leicht rekonstruieren, wenn Sie alle Diagonalen addieren und alle Gegendiagonalen subtrahieren. Verbinden Sie bitte einfach die entsprechenden Elemente der Terme mit Linien und Sie erkennen leicht ein Muster. Zwei Bemerkungen sollen noch gemacht werden. Die Determinante des Produktes zweier Matrizen ist gleich dem Produkt der beiden Determinanten der Einzelmatrizen, also $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$. Falls die Determinante einer Matrix verschwindet, also $\det(\mathbf{A}) = 0$ ist mindestens eine Zeile (oder Spalte) eine Linearkombination der anderen Zeilen (oder Spalten). Das heißt, diese Zeile (oder Spalte) lässt sich als Summe aller anderen Zeilen (oder Spalten) schreiben, wenn diese individuell mit einer passenden Zahl multipliziert werden.

(v) Die Einträge der transponierten Matrix \mathbf{A}^T einer Matrix \mathbf{A} berechnen sich zu

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{A})_{ji}.$$

(d) Weitere spezielle Matrizen

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Diagonalmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt. Die Matrix sieht dann folgendermaßen aus

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Eine Diagonalmatrix in der alle Einträge identisch sind, $a_{ii} = 1$ heißt Einheitsmatrix $\mathbb{1}$.

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

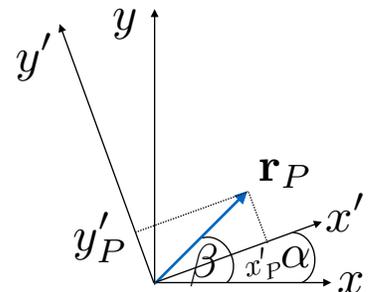
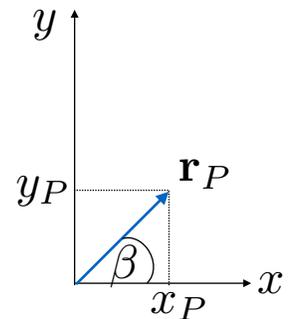
Das Produkt einer Matrix mit einer Einheitsmatrix ist wieder die Matrix. Es gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

- Die Matrix \mathbf{B} ist die inverse Matrix von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, falls $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbb{1}$ gilt. Zur Berechnung der inversen einer Matrix muss diese quadratisch sein. Wir schreiben für die inverse Matrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Es gilt $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$. Beachten Sie bitte, nicht alle Matrizen haben eine Inverse. Nur solche mit einer nichtverschwindenden Determinante. Matrizen mit einer verschwindenden Determinante bezeichnet man als singulär.



Mathematischer Einschub (Drehungen)

Wir wollen im Folgenden eine ganz konkrete Anwendung von Matrizen diskutieren. Der Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen ist ein häufig genutztes Werkzeug, um Probleme möglichst einfach zu beschreiben in einem angepassten Koordinatensystem. Um das zu diskutieren, betrachten wir die Drehung eines Koordinatensystems in dem

ein Punkt beschrieben wird durch den Ortsvektor \mathbf{r}_P . Dessen Ortskoordinaten wollen wir in den zwei verschiedenen Koordinatensystemen ausdrücken. Um die Analyse zu erleichtern, diskutieren wir zunächst den zwei-dimensionalen Fall und betrachten anschließend den drei-dimensionalen Fall.

Die Definition aller geometrischer Größen können wir aus der Abbildung am Rand entnehmen. Zu sehen ist der gleiche Vektor in den zwei verschiedenen Koordinatensystemen (gestrichen bzw. ungestrichen), welche relativ zueinander gedreht sind um den Winkel α . Was wir im Folgenden suchen sind die Koordinaten

$$\mathbf{r}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}'_P = \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}$$

und vor allem auch den Ausdruck, welcher die gestrichene Koordinaten als Funktion des Drehwinkels und der ungestrichenen Koordinaten ausdrückt.

Es gilt in Polarkoordinaten (diese werden wir explizit später diskutieren; alle Details können aber bereits der nebenstehenden Abbildung entnommen werden)

$$\begin{aligned} x_P &= |\mathbf{r}_P| \cos \beta \\ y_P &= |\mathbf{r}_P| \sin \beta \\ x'_P &= |\mathbf{r}_P| \cos(\beta - \alpha) = \underbrace{|\mathbf{r}_P| \cos \beta}_{x_P} \cos \alpha + \underbrace{|\mathbf{r}_P| \sin \beta}_{y_P} \sin \alpha \\ y'_P &= |\mathbf{r}_P| \sin(\beta - \alpha) = \underbrace{|\mathbf{r}_P| \sin \beta}_{y_P} \cos \alpha - \underbrace{|\mathbf{r}_P| \cos \beta}_{x_P} \sin \alpha \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen können wir auch in Matrixform zusammenschreiben

$$\begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

bzw. noch etwas kompakter als

$$\mathbf{r}'_P = \mathbf{O} \mathbf{r}_P \quad \text{mit} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie hier bitte ein subtiles Detail dieser Matrix zur Transformation einer Koordinate von einem Koordinatensystem in ein anderes Koordinatensystem. Das Vorzeichen des Winkels hier ist entgegengesetzt zum Vorzeichens, welches bei der Drehung eines Vektors um einen bestimmten Winkel in ein und demselben Koordinatensystem auftaucht. Die Drehung eines Vektors um einen Winkel in einem Koordinatensystem ist äquivalent zur Drehung des Koordinatensystems um den gleichen Winkel in umgekehrter Richtung (Drehung um negativen Winkel). Dadurch ändern sich die Vorzeichen der Einträge der Sinusfunktion, da diese Funktion ungerade ist. Die der Cosinusfunktion bleiben gleich, da diese Funktion gerade ist.

Wir wollen uns im Folgenden fragen, welche Eigenschaften die Matrix \mathbf{O} haben muss, damit sie eine Drehung beschreibt.

- Zunächst einmal müssen Drehmatrizen quadratisch sein.
- Die Matrixelemente sind reel.
- Die Determinante einer Drehmatrix ist eins, also $\det \mathbf{O} = 1$. Das heißt, dass bei der Drehung eines Vektors weder eine Verlängerung noch eine Verstauchung des Vektors stattfindet, $|\mathbf{r}'_P| = |\mathbf{r}_P|$. Dies ist natürlich eine wichtige Eigenschaft die erhalten bleiben muss, will ein Vektor lediglich gedreht werden.
- Alle Zeilen und Spalten müssen die Länge eins besitzen.
- Alle Zeilen müssen orthogonal zueinander sein. Alle Spalten müssen orthogonal zueinander sein. Das Skalarprodukt der entsprechenden Vektoren muss dann verschwinden.
- Die transponierte Matrix $\mathbf{O}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ muss identisch sein zur inversen Matrix \mathbf{O}^{-1} , also $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$ bzw. $\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} = \mathbb{1}$.

Matrizen, welche diese Eigenschaften besitzen, nennt man orthonormale Matrizen. Es gilt dann $|\mathbf{O}\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|$.

Die Drehung eines Koordinatensystems im drei-dimensionalen Raum kann durch sukzessives Anwenden einer Drehung um jeweils eine Koordinatenachse durchgeführt werden. Die individuellen Drehmatrizen für die jeweilige Koordinate lautet

$$\mathbf{O}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{O}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{O}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

α, β, γ sind hier die Drehwinkel. Eine beliebige Rotation im drei-dimensionalen Raum lässt sich daher ausdrücken als

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{O}_x(\alpha)\mathbf{O}_y(\beta)\mathbf{O}_z(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beachten Sie bitte, Drehungen in drei Dimensionen sind im Allgemeinen nicht vertauschbar. Die Reihenfolge der Anwendung der Drehmatrizen ist wichtig.

2.2.2 *Krummlinige Koordinaten I: Zylinderkoordinaten*

Bisher haben wir Punkte im Raum nur beschrieben durch kartesische Koordinaten; durch die Angabe der drei Werte für x , y und z . Ein solches kartesisches Koordinatensystem mag aber nicht immer die passendste Wahl sein. Zum Beispiel werden wir im Lauf des Kurses uns auch mit Bewegungen auf Kreisbahnen beschäftigen. Die Beschreibung des Punktes im Raum ist dann einfacher mit Zylinderkoordinaten.

Zylinderkoordinaten sind das vielleicht einfachste Beispiel für krummlinige Koordinatensysteme. In krummlinigen Koordinatensystemen ändern die Koordinatenlinien ihre Richtung, so daß die Einheitsvektoren ortsabhängig werden. Wir sprechen von orthogonalen krummlinigen Koordinaten, wenn die Koordinatenlinien senkrecht aufeinander stehen. Dies ist bei den Zylinderkoordinaten und auch den später diskutierten Kugelkoordinaten der Fall.

Statt mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) wird ein Punkt im Raum durch die Zylinderkoordinaten ρ, ϕ und z beschrieben. Polarkoordinaten wären ein vereinfachter Fall von Zylinderkoordinaten, in denen die dritte, die z -Koordinate nicht weiter berücksichtigt wird. Man beschreibt somit zwei-dimensionale Probleme, Probleme in denen die dritte Dimension keine Rolle spielt.

Beachten Sie weiterhin, allgemeine krummlinige Koordinatensysteme

me werden wir hier nicht behandeln. Diese werden aber allerspätstens im Rahmen der Relativitätstheorie wichtig.

Die Definition der Zylinderkoordinaten ist im Bild nebenan ersichtlich. Mathematisch stehen kartesische Koordinaten und Zylinderkoordinaten im folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

mit $\rho \geq 0$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Damit ist jeder Punkt im Raum \mathbf{r} eindeutig gegeben durch

$$\mathbf{r} = \rho \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \sin \phi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$$

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \begin{cases} \arccos \frac{x}{\rho} & \text{wenn } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\rho} & \text{wenn } y < 0 \end{cases} \\ z &= z\end{aligned}$$

Die Länge eines Vektor in Zylinderkoordinaten berechnet sich zu

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Das Linienelement einer Bahnkurve ist gegeben durch

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

Die Basisvektoren sind³

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Damit ist \mathbf{e}_z konstant, wohingegen \mathbf{e}_ρ und \mathbf{e}_ϕ abhängig sind von ϕ . Die Einheitsvektoren selbst sind orthogonal, bilden aber ein lokales Koordinatensystem. Für Ortsvektoren gilt

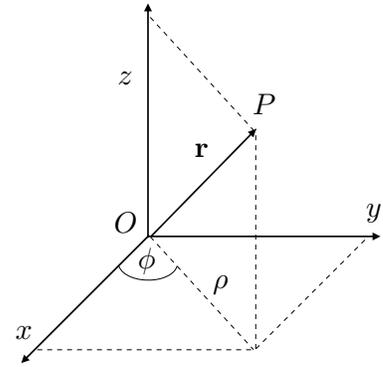
$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z.$$

Allgemeine Vektoren \mathbf{c} werden dargestellt als

$$\mathbf{c} = c_\rho \mathbf{e}_\rho + c_\phi \mathbf{e}_\phi + c_z \mathbf{e}_z.$$

Wenn ein beliebiger Vektor in kartesischen Koordinaten gegeben ist (c_x, c_y, c_z), kann er in Zylinderkoordinaten (c_ρ, c_ϕ, c_z) wie folgt umgerechnet werden

$$c_\rho = \cos \phi c_x + \sin \phi c_y,$$



³ Entschuldigen Sie bitte, dass diese Basisvektoren und auch das Linienelement etwas vom Himmel fällt. Ein allgemeiner gültiger Zugang im Rahmen krummliniger Koordinatensysteme würde aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

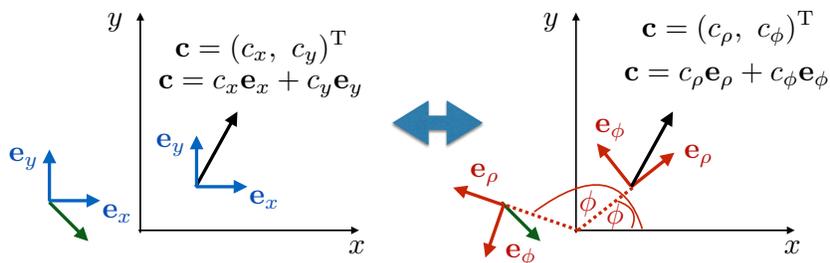
$$c_\phi = -\sin\phi c_x + \cos\phi c_y,$$

$$c_z = c_z.$$

Dies kann auch in Matrixform geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} c_\rho \\ c_\phi \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}.$$

Ein Beispiel wie diese Transformation eines Vektors von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten erfolgt, ist in der folgenden Abbildung zu sehen. Wie betrachten hier einen beliebigen Vektor \mathbf{c} . Dieser soll ihn in der Ebene $z = 0$ liegen und soll keine Komponente in z -Richtung haben. Daher diskutieren wir im Folgenden die z -Koordinate nicht weiter. Diese würde auch bei der Transformation erhalten bleiben. Dieses zwei-dimensionale Koordinatensystem bezeichnet man auch als Polarkoordinaten. Den Vektor \mathbf{c} können Sie als einen Teil eines Vektorfeldes verstehen. Er beschreibt eine physikalische Größe an einem ganz konkreten Ort, welche charakterisiert ist durch einen Betrag und eine Richtung. Als Funktion des Ortes verändert sich diese physikalische Größe und somit der Vektor, der diese beschreibt. In der Abbildung soll diese Größe mittels zwei verschiedenen Vektoren an zwei verschiedenen Orten beschrieben werden. Die beiden Vektoren sind entsprechend schwarz und dunkelgrün. Links sehen Sie die Darstellung in kartesischen Koordinaten, rechts in Polarkoordinaten. Der Vektor selbst darf sich natürlich nicht verändern. Die physikalische Größe hängt natürlich nicht davon ab, wie ich sie beschreibe. Lediglich die 'vektorielle Zusammensetzung' ändert sich.

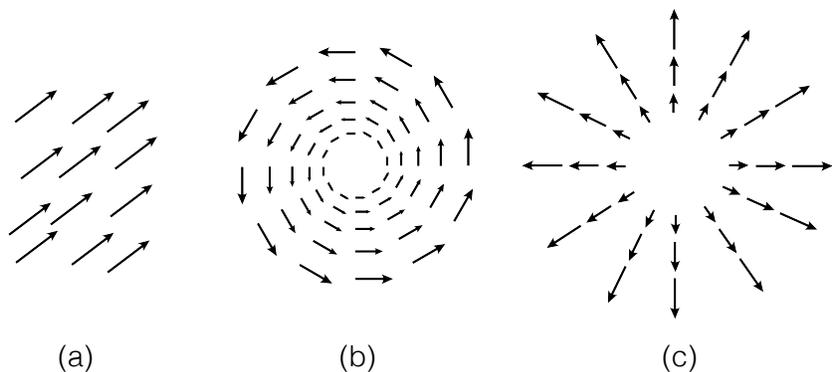


Die Darstellung des Vektors in kartesischen Koordinaten ist links zu sehen. Beachten Sie bitte, kartesische Koordinaten sind ortsunabhängig. Wir zeichnen die entsprechenden Einheitsvektoren mit ihren Ursprung in dem Raumpunkt ein, in welchem der Vektor die physikalische Größe beschreiben soll. Beispiele für diese physikalischen Größen sind zum Beispiel Kräfte, die an einen Massepunkt an diesem Raumpunkt angriffen. Eine andere Größe wäre zum Beispiel das elektrische Feld. Die

vektorielle Größe ist in der betrachteten Ebene durch die Angabe der beiden Vektorkomponenten c_x und c_y gegeben.

Wenn Sie jetzt die gleiche Größe in Polarkoordinaten berechnen wollen, wenden Sie die obige Gleichung an und definieren Sie die Einheitsvektoren relativ zu einem von Ihnen gewählten Ursprung. Der Winkel zwischen der x -Achse und der verbundenen Linie zwischen dem Ursprung und dem betrachteten Punkt, gibt Ihnen den Winkel ϕ an. Dieser Winkel ist wichtig. Er definiert Ihnen die Orientierung des radialen Einheitsvektor, der dann gerade in radialer Richtung zeigt. Senkrecht zu diesem radialen Einheitsvektor steht der Einheitsvektor für den Polarwinkel bzw. auch Azimut genannt. Wie befinden uns hier immer noch am Raumpunkt, in welchem das Vektorfeld einen bestimmten Wert gegeben durch den betrachteten Vektor hat. Die Umrechnung der Vektorkomponenten wird dann gerade durch die oben genannte Matrixgleichung durchgeführt.

Beachten Sie bitte, in der Abbildung oben sind zwei verschiedene Vektoren (einmal in schwarz und einmal in dunkelgrün) eingezeichnet. Kartesische Koordinaten sind ortsunabhängig. Die Einheitsvektoren sind entsprechend überall im gesamten Raum gleich. Zylinder- oder Polarkoordinaten dagegen sind Ortsabhängig. Sie benötigen zu Ihrer Definition ein Raumpunkt, auf welchen sie sich beziehen. Dies ist ein ausgesuchter Ort im Raum. Im Prinzip kann aber jeder beliebige Bezugspunkt im Raum verwendet werden. Bei einem unpassend gewählten wird die Beschreibung der Vektoren nur wieder sehr kompliziert. Dies soll illustriert werden in der folgenden Darstellung.



In (a) sehen Sie ein Vektorfeld, welches Sie besser in kartesischen Koordinaten beschreiben. Es gibt keinen ausgewählten Punkt im Raum auf den Sie sich beziehen können zur Definition eines Zylinderkoordinatensystems. In der Tat ist hier die Orientierung aller Vektoren gleich. Wenn Sie sich das Leben einfach machen wollen, definieren Sie ein kartesisches Koordinatensystem dessen, z.B. x -Achse, gerade genau in

Richtung der Vektoren zeigt. Sie haben dann keinerlei y -Komponente (und wir nehmen an auch keine z -Komponente, auch wenn das nicht aus der Abbildung entnommen werden kann). Damit können Sie die Eigenschaften des Vektorfeldes sehr einfach beschreiben.

In (b) und (c) sehen Sie Vektorfelder, welcher wie bevorzugt in einem Zylinderkoordinatensystem beschreiben sollten. Wir haben einen ausgezeichneten Bezugspunkt, relativ zu dem das Vektorfeld in (b) ausschliesslich eine Winkelkomponente besitzt und in (c) ausschliesslich eine Radialkomponente. Das Problem ist offensichtlich hochsymmetrisch relativ zu diesem besonderen Bezugspunkt. Physikalisch kann (b) zum Beispiel das Magnetfeld eines Stromdurchflossenen Leiters sein und (c) das elektrische Feld einer Punktladung. In beiden Fällen wären die Amplituden nicht ganz richtig, aber die Orientierung stimmt auf alle Fälle. Sie können beide Vektorfelder auch relativ zu einem anderen Bezugspunkt definieren, was aber eine sehr komplexe Angelegenheit wird.

Abschliessende sei noch gesagt, dass die Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten sich berechnet mittels

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\phi}\rho\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z.$$

Die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten berechnet sich zu

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2\rho)\mathbf{e}_\rho + (\ddot{\phi}\rho + 2\dot{\phi}\dot{\rho})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z.$$

2.2.3 *Krummlinige Koordinaten II: Kugelkoordinaten*

Bei Problemen mit einer sphärischer Symmetrie empfiehlt sich die Verwendung von Kugelkoordinaten (r , θ und ϕ). Hier nennt man θ den Polarwinkel und ϕ den Azimutwinkel. In Kugelkoordinaten ist die Angabe des Radius r und der beiden Winkel notwendig, um jeden Punkt im Raum zu adressieren. Auch Kugelkoordinaten sind ein ortsabhängiges Koordinatensystem.

Die Definition der Koordinaten ist im Bild nebenan ersichtlich. Mathematisch stehen kartesische Koordinaten und Kugelkoordinaten im folgendem Zusammenhang:

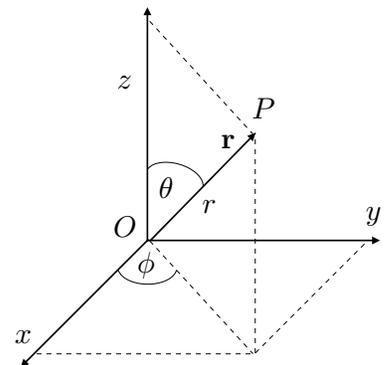
$$x = r \cos \phi \sin \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

mit den Wertebereichen $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Damit ist jeder Punkt im Raum \mathbf{r} eindeutig gegeben durch

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z.$$



Umgekehrt gilt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{wenn } x > 0 \\ \text{Sgn}(y) \frac{\pi}{2} & \text{wenn } x = 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{wenn } x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{wenn } x < 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r}.$$

Das Linienelemente einer Bahnkurve ist gegeben durch

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Die Basisvektoren sind

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y.$$

Die Basisvektoren stehen senkrecht aufeinander und bilden ebenfalls ein Orthonormalsystem:

$$\mathbf{e}_\theta \perp \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{e}_\theta \perp \mathbf{e}_\phi,$$

$$\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\phi,$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi.$$

Der Ortsvektor eines Punktes mit Abstand r vom Koordinatenursprung ist gegeben durch

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r.$$

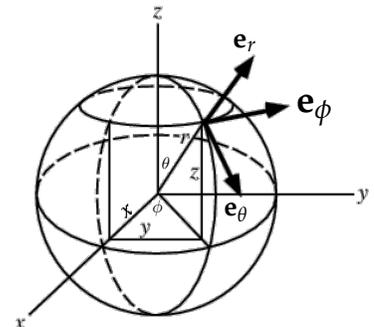
Allgemein werden Vektoren dargestellt als

$$\mathbf{c} = c_r \mathbf{e}_r + c_\theta \mathbf{e}_\theta + c_\phi \mathbf{e}_\phi$$

und eine Transformation zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten wird beschrieben als

$$\begin{pmatrix} c_r \\ c_\theta \\ c_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Eine allgemeine Darstellung der Anordnung der Einheitsvektoren zur Beschreibung eines beliebigen Vektors in Kugelkoordinaten ist in der Abbildung auf dem rechten Seite zu sehen. Ihr können Sie wieder die geometrische Anordnung entnehmen. Die Diskussion hier ist analog zu der länglich durchgeführten Diskussion in Zylinderkoordinaten.



Die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten berechnet sich zu

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + \dot{\theta}r\mathbf{e}_\theta + \dot{\phi}r \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

Die Beschleunigung in Kugelkoordinaten berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & \left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - \dot{\phi}^2 r \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(\dot{\theta} r^2 \right) - \dot{\phi}^2 r \sin \theta \cos \theta \right] \mathbf{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} \left(\dot{\phi} r^2 \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

2.3 Grundaufgaben der Kinematik - Grundtypen der Bewegung

2.3.1 Grundaufgaben

Man kann die Grundaufgaben der Kinematik in verschiedene Klassen unterteilen. Wenn einmal identifiziert ist, um welche Grundaufgabe es sich handelt, kann im Folgenden sehr algorithmisch vorgegangen werden. Wir unterscheiden die folgenden Grundaufgaben:

1. Es ist die Bahnkurve bekannt und man möchte die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung berechnen. Dies erfolgt einfach durch mehrmaliges Differenzieren

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{a}(t)$$

Ein Beispiel in kartesischen Koordinaten wäre die Diskussion einer Bahnkurve, welche gegeben ist durch

$$x(t) = r \cos \omega t \quad y(t) = r \sin \omega t \quad z(t) = 0.$$

Dies ist ein wichtiges und interessantes Beispiel, welches Ihnen noch sehr häufig begegnen wird. Es beschreibt die Bewegung eines Massepunktes auf einer Kreisbahn mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω . Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors berechnen sich zu

$$\dot{x}(t) = -\omega r \sin \omega t, \quad \dot{y}(t) = \omega r \cos \omega t, \quad \dot{z}(t) = 0.$$

Der Betrag der Geschwindigkeit beträgt

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = r\omega.$$

Die Richtung der Geschwindigkeit zeigt in Richtung des Tangenteneinheitsvektor \mathbf{t} , welcher immer tangential zur Bahnkurve am entsprechenden Raumpunkt ist, $\mathbf{v} = v\mathbf{t}(t)$.

Die Komponenten des Beschleunigungsvektors berechnen sich zu

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x(t), \quad \ddot{y}(t) = -\omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 y(t), \quad \ddot{z}(t) = 0.$$

Der Betrag der Beschleunigung beträgt

$$a(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = r\omega^2.$$

Die Richtung der Beschleunigung zeigt in diesem speziellen Beispiel in Richtung des negativen Ortsvektors \mathbf{r} . Der Massepunkt wird also auf seiner Kreisbahn in negativer radialer Richtung beschleunigt, $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$.

2. Bei der zweiten Grundaufgabe ist die Geschwindigkeit als Funktion von Ort und Zeit bekannt. Gesucht ist hier die Bahnkurve (und möglicherweise auch die Beschleunigung, welche trivialerweise wieder durch Differentiation gefunden wird). Die Geschwindigkeit muss als Funktion der Zeit und des Ortes bekannt sein.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{r}(t).$$

Dies führt zu einem gekoppelten System aus Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) = v_x(x, y, z, t), \quad \dot{y}(t) = v_y(x, y, z, t), \quad \dot{z}(t) = v_z(x, y, z, t),$$

welches durch einmalige Integration gelöst werden kann. Für eine eindeutige Lösung müssen die Anfangswerte bekannt sein. Diese entsprechen der Ortskoordinate zur einer gegebenen Zeit, z.B. $t = 0$: $\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0$ ($\rightarrow x_0, y_0, z_0$).

Als Beispiel soll hier eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit betrachtet werden.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{f}$$

Mit den bekannten Anfangswerten $\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0$ ergibt sich die Lösung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

3. Bei der dritten Grundaufgabe ist die Beschleunigung als Funktion von Ort und Zeit bekannt. Gesucht ist hier die Bahnkurve und die Geschwindigkeit. Die Beschleunigung muss auch hier als Funktion von Zeit und Ort bekannt sein. Diese Grundaufgabe ist die mit Abstand wichtigste Aufgabe, da, wie wir später diskutieren werden, die Beschleunigung eines Massepunktes direkt proportional ist zu der auf ihn wirkenden Kraft. Wenn bei vorgegebener Kraft also die

Bahnkurve berechnet werden soll, ist dies ein Synonym zur Vorgabe der Beschleunigung⁴. Wir suchen also

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow \mathbf{r}(t).$$

Diese Grundaufgabe kann wieder mathematisch formuliert werden als Satz gekoppelter Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(t) = a_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

$$\ddot{y}(t) = a_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

$$\ddot{z}(t) = a_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).$$

Dieser Satz gekoppelter Differentialgleichungen wird gelöst durch zweimaliges Anwenden der Integration. Für eine eindeutige Lösung müssen wieder die Anfangswerte bekannt sein. Diese entsprechen der Ortskoordinate zu einer gegebenen Zeit, z.B. $t = 0$: $\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0$ und einer Geschwindigkeit zu einer gegebenen Zeit, z.B. $\dot{\mathbf{r}}(t = 0) = \mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0$.

Als Beispiel soll die Bestimmung der Bahnkurve bei konstanter Beschleunigung dienen.

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}_0 \rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{2} t^2 + \mathbf{c} t + \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{2} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

2.3.2 Grundtypen der Bewegung

Im Folgenden soll eine Kategorisierung möglicher Formen der Bewegungen vorgenommen werden, um eine Sprache zu etablieren, mit der diese beschrieben werden können.

1. Gleichförmig geradlinige Bewegung

Bei einer gleichförmig geradlinigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant, also keine Funktion der Zeit.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v} = \text{const.}$$

Damit erfährt der Massepunkt keine Beschleunigung, d.h. $\ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$. Für einen gegebenen Anfangswert $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ berechnet sich die Bahnkurve zu

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t - t_0) + \mathbf{r}_0.$$

Die so entstehende Bahnkurve ist eine Gerade, deren Richtung durch \mathbf{v} bestimmt ist.

2. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

⁴ Beachten Sie aber bitte, das Konzept einer Kraft ist hier noch nicht bekannt.

Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung konstant, also keine Funktion der Zeit. Beschleunigung, Geschwindigkeit und Bahnkurve ergeben sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{a} = \text{const.}, \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \\ \mathbf{r}(t) &= \frac{\mathbf{a}}{2}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c}.\end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t_0

$$t = t_0 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\rightarrow \mathbf{b} &= \mathbf{v}_0 - \mathbf{a}t_0 \\ \rightarrow \mathbf{c} &= \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{a}}{2}t_0^2 - \mathbf{b}t_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{a}}{2}t_0^2 - \mathbf{v}_0t_0 + \mathbf{a}t_0^2.\end{aligned}$$

Damit finden wir für die Geschwindigkeit und die Bahnkurve der folgende funktionelle Zusammenhang

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{r}(t) &= \frac{\mathbf{a}}{2}(t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0.\end{aligned}$$

Dies entspricht einer Bewegung in der Ebene aufgespannt durch die beiden Vektoren \mathbf{v}_0 und \mathbf{a} .

Als ein Beispiel für eine solche Bewegung, möchten wir eine Wurfparabel berechnen.

Die konstante Beschleunigung und die Anfangsgeschwindigkeit sollen gegeben sein als

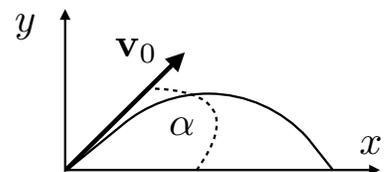
$$\mathbf{a} = a\mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{e}_x + v_{0y}\mathbf{e}_y.$$

Wenn wir die obige Gleichung für die Bahnkurve spezifizieren für die x - und die y -Koordinate erhalten wir

$$\begin{aligned}x - x_0 &= v_{0x}(t - t_0) \\ y - y_0 &= \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0)\end{aligned}$$

Wenn wir die erste der beiden Gleichungen in die zweite einsetzen, erhalten wir einen kompakten Ausdruck für die Bahnkurve, welche uns den expliziten Zusammenhang von $y = y(x)$ beschreibt:

$$y - y_0 = \frac{a}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0).$$



Dies ist die allgemeine Gleichung einer Parabel. Im speziellen können wir mit dieser Gleichung die Bewegung im Schwerfeld der Erde beschreiben. Hier ist $a = -g$ und $g = 9.81\text{m/s}^2$. Für den Fall dass entweder $v_{0x} = 0$ oder sogar $\mathbf{v}_0 = 0$ ist, können Sie mit dieser Gleichung eine geradlinige Bewegung in y -Richtung beschreiben, die entweder ein freier Fall ist oder ein senkrechter Wurf nach oben. Einige dieser Spezialfälle wollen wir im Folgenden konkret diskutieren und einige abgeleitete Größen berechnen. Der Einfachheit halber setzen wir im Folgenden $t_0 = 0$, was einem geeignet gewählten Wurfzeitpunkt entspricht.

α) *Würfe ohne Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung*

a) **Senkrechter Wurf nach oben**

In diesem Fall soll $y_0 = 0$ sein. Dann ergibt sich für die y -Koordinate und der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

$$\rightarrow y = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t \quad \text{und} \quad \dot{y} = -gt + v_{0y}.$$

b) **Freier Fall**

Für den freien Fall ab einer Höhe $y_0 = h_0$ und ohne eine Geschwindigkeitskomponente zu Beginn $v_{0y} = 0$ ergibt sich

$$\rightarrow y = h_0 - \frac{g}{2}t^2 \quad \text{und} \quad \dot{y} = -gt.$$

β) *Schräger Wurf*

Im Folgenden wollen wir den schrägen Wurf detaillierter diskutieren. Dieser ist charakterisiert durch einen Winkel α , der gegeben durch die x - und y -Komponente der Geschwindigkeit. Einblicke in den senkrechten Wurf erhalten wir automatisch als Spezialfall dieses schrägenwurfes.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

Damit berechnet sich die Wurfparabel zu

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2}t^2$$

$$\rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 + x \tan \alpha$$

β_1) **Steigzeit**

Die Steigzeit t_s ist die Zeit die vergeht, bis die zeitliche Änderung der y -Koordinate, der Position des Massepunktes in vertikaler Richtung, gerade verschwindet:

$$\dot{y} = 0.$$

Dies entspricht dem Umkehrpunkt der Bewegung. Nach Ableitung der obigen Gleichung der Wurfparabel nach der Zeit ergibt sich

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt_s \quad \rightarrow \quad t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

β2) Wurfdauer

Als nächstes wollen wir die Wurfdauer t_w berechnen. Dies ist die Zeit, die vergeht, bis der Massepunkt nach seinem Flug wieder auf der Referenzhöhe des Bodens angekommen ist. Daher muss die Bedingung $y = 0$ erfüllt sein. Daraus ergibt sich

$$0 = v_0 t_w \sin \alpha - \frac{g}{2} t_w^2 \rightarrow t_w = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2t_s.$$

β3) Wurfhöhe

Die Wurfhöhe berechnet sich aus der erreichten Höhe nachdem die Steigzeit verstrichen ist $y(t_s)$. Hier ist keine explizite Rechnung notwendig sondern lediglich ein Einsetzen der entsprechende Größe t_s in die Gleichung für die y -Koordinate.

$$y(t_s) = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}$$

$$y(t_s) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Wenn Sie die Gleichung anschauen, sollten Sie als guter Physiker zunächst einmal die Grenzfälle diskutieren und auf Plausibilität überprüfen. Wählen Sie als Wurfwinkel $\alpha = 0$, werden Sie es offensichtlich nicht schaffen den Massepunkt auch nur minimal von der Oberfläche weg zu bewegen. Wenn Sie ihn dagegen senkrecht nach oben werfen, d. h. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, erreichen Sie bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 die maximal mögliche Wurfhöhe von $\frac{v_0^2}{2g}$.

β4) Wurfweite

Weiterhin wollen wir die Wurfweite berechnen. Diese ergibt sich aus dem gleichen Muster wie die Wurfhöhe, nur dass wir jetzt die x -Koordinate nach Verstreichen der Wurfdauer berechnen müssen $x(t_w)$.

$$x(t_w) = v_0 \frac{2v_0}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 (2\alpha)$$

Als letztes interessantes können wir noch den Winkel berechnen, der die Wurfweite maximiert. Wir würden dazu $x(t_w)$ nach α ableiten und wieder den Extrempunkt suchen, indem wir die Ableitung zu null setzen und den dazugehörigen Wurfwinkel α_{\max} bestimmen, der diese Gleichung erfüllt. Aus dieser Forderung ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\cos (2\alpha_{\max}) = 0 \rightarrow \alpha_{\max} = \frac{\pi}{4}.$$

Die maximal mögliche Wurfweite bei diesem Winkel beträgt

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Beachten Sie bitte, dass sich die gleiche Wurfweite ergibt für die Winkel α und $\pi/2 - \alpha$, da $\sin(2\alpha) = \sin(\pi - 2\alpha)$ ist.

3. Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung bewegt sich der Massepunkt mit einem konstanten Abstand zum Koordinatenursprung auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkel- bzw. Bahngeschwindigkeit.

Dieses Problem lässt sich am Besten in den früher eingeführten ebenen Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten in denen die dritte Dimension $z = 0$ ist) beschreiben. Dort ist die Radialkoordinate zeitlich unabhängig und konstant, $\rho = \text{const.} = r$ und die zeitliche Änderung der Winkelkoordinate soll ebenfalls konstant sein, also $\dot{\phi} = \omega = \text{const.}$. ω wird als Winkelgeschwindigkeit um die z -Achse bezeichnet.

In Anwendung des allgemeinen Ausdrucks der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten, können wir diese schreiben als

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\phi}\rho\mathbf{e}_\phi = r\omega\mathbf{e}_\phi = v\mathbf{e}_\phi.$$

Hier haben wir die Bahngeschwindigkeit v eingeführt, welche definiert ist als $v = \omega\rho$. In Anwendung des allgemeinen Ausdrucks der Beschleunigung in Polarkoordinaten, können wir diese schreiben als

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2\rho)\mathbf{e}_\rho + (\ddot{\phi}\rho + 2\dot{\phi}\dot{\rho})\mathbf{e}_\phi = -\omega^2 r\mathbf{e}_\rho.$$

Der Betrag dieser sogenannten Zentripetalbeschleunigung ist $|\ddot{\mathbf{r}}| = \omega^2 r$ und sie zeigt nach innen, zum Mittelpunkt des Kreises. Das Wort ist aus dem Lateinischen abgeleitet, wo *petere* für streben steht. Es ist also die Beschleunigung, die den Körper ins Zentrum der Kreisbahn streben lässt.

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung besteht zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Umlaufzeit T , d.h. der Zeit nach der eine Winkelverschiebung um $\Delta\phi = 2\pi$ erfolgt, sowie der Drehzahl oder Frequenz $\nu = 1/T$ der folgende Zusammenhang

$$\text{Umlaufzeit : } T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ Frequenz : } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit als das 2π -fache der Frequenz wird auch Kreisfrequenz genannt. Die Bahnkurve in Polarkoordinaten ist gegeben als

$$\rho = r, \quad \phi(t) = \omega(t - t_0) + \phi_0.$$

Die Kreisbewegung in kartesischen Koordinaten wird beschrieben als

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \rightarrow x = r \cos (\omega t + \phi_0) \\y &= \rho \sin \phi \rightarrow y = r \sin (\omega t + \phi_0) = r \cos \left(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Nach Projektion der Kreisbewegung auf die x - und y -Achse stellen wir fest, dass sie dort harmonische Schwingungen ausführen. Um genau zu sein, sind es zwei senkrecht aufeinander stehende harmonische Bewegungen mit einem Phasenunterschied von $\frac{\pi}{2}$.

3 Die Newtonschen Prinzipien

3.1 Einleitung

Bisher haben wir Bahnkurven diskutiert, welche vorgegeben waren und bei denen wir nicht die Ursachen hinterfragten. Dieses Teilgebiet der Kinematik ist damit abgeschlossen. Im Folgenden wenden wir uns der Dynamik zu, in welcher die Ursache der Bewegung und die daraus resultierende Bewegung von materiellen Körpern diskutiert wird. Dabei spielt die Kraft, die auf einen Körper wirkt, bei der Beschreibung der Bewegung eine wichtige Rolle.

Die folgende Diskussion über die Lehre der Bewegung materieller Körper unter der Einwirkung von Kräften basiert im Wesentlichen auf den Newtonschen Prinzipien. Diese werden auch als Newtonsche Axiome bezeichnet. Sie stellen Grundgesetze oder auch Grundvoraussetzungen dar, auf denen alle weiteren Überlegen aufbauen. Axiome stellen im mathematischen Sinne kein streng beweisbaren Sätze dar, sondern sind das Resultat von im Alltag gesammelten Erfahrungen. Wichtig ist auch, dass alle von ihnen ableitbaren Aussagen und auch alle weiteren Gesetze in Übereinstimmung mit der Erfahrung des täglichen Lebens stehen. Sie können eine physikalische Theorie auch entwickeln basierend auf anderen Axiomen. Deren Einführung ist aber nur gerechtfertigt, wenn sich experimentell überprüfbare Vorhersagen in der Realität bestätigen lassen.

Ich möchte explizit betonen, dass die Newtonschen Axiome in der Zeit von Newton zu keinerlei Widersprüchen mit Experimenten führten. Sir Isaac Newton (1643-1727) formulierte diese in seinem Buch 'Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica', welches erstmalig 1687 in Cambridge veröffentlicht wurde.

Heute wissen wir, dass die Newtonsche Mechanik nur unter gewissen Annahmen Gültigkeit besitzt. Diese Voraussetzungen sind:

- Ein zentraler Begriff in der Newtonschen Mechanik ist der der absoluten Zeit. Wie wir bereits diskutiert haben, ist die Wahl eines Koordinatensystems bzw. eines Bezugspunktes zur Definition des Koordinatensystems nicht eindeutig. Wir werden dies später noch ausführlicher diskutieren, aber es ist eindeutig ersichtlich, dass z.B.

in relativ zueinander bewegten Bezugssystemen ein Körper in Ruhe sein kann oder aber in Bewegung. Das einfachste Beispiel ist hier der Fahrer in seinem Auto. Der Begriff der Ruhe oder der Bewegung ist somit nicht absolut. Was aber absolut ist in allen Koordinatensystemen, und das ist ein Grundpfeiler der Newtonschen Mechanik, ist die Zeit $t = t'$. Hier soll die gestrichene Zeit, die Zeit in einem anderen Koordinatensystem beschreiben. Diese Absolutheit der Zeit führt zu der Konsequenz, dass sich Signale mit einer unendlich großen Geschwindigkeit im Raum übertragen lassen.

- Der zweite zentrale Begriff in der Newtonschen Mechanik ist der des absoluten Raums. Er bezeichnet den sowohl vom Beobachter als auch von den darin enthaltenen Objekten und darin stattfindenden physikalischen Vorgängen unabhängigen physikalischen Raum.
- In diesem absoluten Raum ist die Masse eines Körpers konstant und im speziellen nicht von der Geschwindigkeit abhängig. Weiterhin ist die Masse m eines abgeschlossenen Systems nicht von den Prozessen in diesem System abhängig. Es gilt die Massenerhaltung. (Eine explizite Ausnahme bildet hier die Rakentengleichung.)

All diese Voraussetzungen gelten so in der Relativitätstheorie nicht (welche Sie im Rahmen Ihrer Ausbildung im dritten Semester kennenlernen werden). Am Ausgangspunkt der Entwicklung dieser Theorie steht als alternative Annahme die Endlichkeit der Signalgeschwindigkeit, welche sich als die Lichtgeschwindigkeit herausstellt. Abweichende Vorhersagen zwischen der Relativitätstheorie und der Newtonschen Mechanik lassen sich aber erst beobachten, wenn Objekte sich mit sehr großer Geschwindigkeit bewegen, was zur Zeit Newtons unerreichbar war. In der neueren Zeit sind es aber vor allem Experimente in der Hochenergiephysik, welche ohne die Berücksichtigung relativistischer Effekte nicht erklärbar sind.

In der vorhergehenden Diskussion tauchten zwei neue Begriffe auf, die der Kraft und die der Masse. Diese wollen wir kurz diskutieren.

3.1.1 Kraft und Masse

Eine Kraft wirkt auf einen Körper und kann so die Richtung und die Stärke des Bewegungszustandes des Körpers ändern. Die Kraft F ist somit eine vektorielle Größe. Es gibt verschiedene Arten von Kräften. Beispiele sind die

a) Gravitationskraft

Die Gravitationskraft beschreibt die Kraft, die ein Körper der Masse m_2 auf einen Körper der Masse m_1 ausübt. Funktionell lässt sich der

Zusammenhang schreiben als

$$\mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

mit der Gravitationskonstante $G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$. Die auf die beiden Massen wirkenden Kräfte sind betragsmäßig gleich groß, haben aber ein unterschiedliches Vorzeichen. Die Kräfte haben immer die Richtung zum jeweils anderen Körper. Das Gravitationsgesetz beschreibt damit immer eine anziehende Kraft.

b) Coulombkraft

Die Coulombkraft ist mathematisch analog formuliert und bezeichnet die Kraft zwischen zwei geladenen Körpern mit der Ladung q_1 bzw. q_2 . Sie berechnet sich als

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

mit der Permittivität des Freiraumes $\epsilon_0 = 8.85418781762 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$.

Beachten Sie bitte das unterschiedliche Vorzeichen im Vergleich zur Gravitationskraft. Zwei schwere Körper ziehen sich an (positives Vorzeichen), wohingegen sich zwei Körper mit der gleichen Ladung abstoßen. Im Gegensatz zur Masse, welche nicht negativ sein kann, kann die Ladung sowohl positiv als auch negativ sein. Zwei Körper deren Ladung ein unterschiedliches Vorzeichen besitzen, ziehen sich wieder an¹.

c) Lorentzkraft

Die Lorentzkraft bezeichnet die Kraft die auf ein geladenes Teilchen durch ein elektrisches und magnetisches Feld ausgeübt wird.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

d) Federkraft

Die Federkraft bezeichnet die Kraftwirkung zwischen zwei Körpern, die mit einer Feder verbunden sind. Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Federkraft proportional zur Auslenkung. Der entsprechende Proportionalitätsfaktor k wird Federkonstante genannt. Es gilt

$$\mathbf{F}_{12} = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

e) Reibungskraft

Die Reibungskraft bezeichnet die Kraftwirkung auf einen Körper, welche proportional ist zu seiner Geschwindigkeit und in die

¹ Kontemplieren Sie bitte einen Moment einmal über die Größe des Vorfaktors zwischen Gravitationskraft und Coulombkraft. Der Unterschied beträgt mehr als 20 Größenordnungen. Gravitationskraft wird erst dominant bei sehr schweren und elektrisch nur sehr schwach geladenen Objekten.

entgegengesetzte Richtung zeigt. Eine solche Kraft reduziert die Geschwindigkeit des Körpers. Sie kann allgemein geschrieben werden als

$$\mathbf{F} = -f(v)\mathbf{v}$$

mit einem Vorfaktor $f(v)$ der bei Stokeschen Reibung konstant und bei der Newtonschen Reibung proportional ist zur Geschwindigkeit.

Beachten Sie bitte, die Ursachen dieser speziellen Kräfte sind zu einem überwiegenden Teil Gegenstand anderer Teildisziplinen der Physik. Wir wollen uns nicht damit beschäftigen, sondern lediglich die Bewegung der Körper diskutieren, wenn auf diese Körper eine Kraft wirkt.

Wir unterscheiden allgemein zwischen inneren und äußeren Kräften. Bei inneren Kräften wirkt eine Kraft auf die Teilchen verursacht durch die Teilchen des betrachteten Systems. Äußere Kräfte haben ihren Ursprung außerhalb des Systems. Wir bezeichnen ein System als abgeschlossen, wenn keine äußeren Kräfte vorliegen.

Äußere Kräfte verursachen ein Kraftfeld. Hier wird jedem Punkt im Raum \mathbf{r} eine Kraft zugeordnet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Ein Beispiel hier wäre die Gravitationskraft verursacht durch einen Körper, der sehr viel schwerer ist als alle anderen Körper. Hier wird der sehr viel schwerere Körper nicht mehr als Teil des System betrachtet, deren Dynamik man untersuchen möchte, sondern einfach als starr und fest im Raum. Er erzeugt ein Kraftfeld, welches den Bewegungszustand der anderen Körper ändert.

Im Gegensatz zur Kraft ist die Masse eine Eigenschaft des Körpers. Es ist eine skalare Größe. Sie trägt der Tatsache Rechnung, dass unterschiedliche Körper bei gleicher Kraft unterschiedlich beschleunigt werden. Man spricht von einer trägen Masse, da sie eine unveränderliche Größe darstellt, die die Trägheit des Körpers verursacht.

3.2 *Lex prima* → *das Trägheitsgesetz*

Von den möglichen Bewegungsarten die wir früher kennengelernt haben, ist die einfachste Bewegung eines Massepunktes (wie wählen im Folgenden wieder die etwas präzisere Sprachregelung und würden nicht mehr explizit von Körper oder Objekt sprechen) die der gleichförmig geradlinigen Bewegung. Hier hat der Körper eine konstante Geschwindigkeit ($\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \text{const.}$). Eine interessante Frage betrifft die Klärung der Umstände, unter denen eine solche Bewegung existieren kann.

Eine solche Bewegung kann näherungsweise realisiert werden, wenn wir das Abrollen einer Kugel auf eine horizontalen Unterlage betrachten. Experimentell würden wir beobachten, dass die Geschwindigkeit der Kugel sich aber verringert und die Kugel nach Beendigung des

Abrollvorgangs irgendwann zum Stehen kommt. Die Kugel rollt aber umso weiter, je glatter die Oberfläche ist. Je länger die Kugel rollt umso mehr ähnelt die Bewegung einer gleichförmig geradlinigen Bewegung. Die Änderung der Geschwindigkeit ist damit offensichtlich eine Folge äußerer Einflüsse. Dies sind zum einen die Wechselwirkung der Kugel mit der Unterlage (welche wir durch eine geeignet gewählte Unterlage reduzieren können) aber auch die Wechselwirkung mit der Erde (deren Gravitationskraft wir durch die orthogonale Anordnung der horizontalen Unterlage beseitigen können). Wenn wir in der Lage wären, sämtliche äußere Einflüsse komplett zu beseitigen, würde die Kugel ihre Geschwindigkeit unverändert beibehalten. Diese heute einfach zu verstehende Tatsache ist keinesfalls trivial. Die idealisierte Vorstellung einer gleichförmig geradlinigen Bewegung kann nicht beobachtet werden und muss aus einer großen Vielfalt experimenteller Beobachtung destilliert werden. Sie stellt einen idealen Grenzfall der täglichen Erfahrung dar, denn ein Körper kann nicht vollständig der Einwirkung anderer Körper entzogen werden.

Diese intellektuell wichtige Erkenntnis wurden von Newton als erstes Axiom formuliert. In der Formulierung von Newton lautet es

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Dieses Gesetz ist aber nur dann sinnvoll anwendbar, wenn wir ein eindeutiges Bezugssystem kennen, in dem die Bewegung des Massepunktes beschrieben wird. Dies ist genau ein ruhendes System in dem von Newton postulierte absoluten Raum. Ein solches Bezugssystem kann aber nicht durch Experimente festgelegt werden. Wir haben schlichtweg keine experimentelle Möglichkeit zur Überprüfung, ob ein von uns gewähltes Bezugssystem in der Tat ein ruhendes System im absoluten Raum ist oder nicht. Uns hilft aber an der Stelle weiter, dass das Postulat uns sagt, dass ein solches Bezugssystem überhaupt existiert. Es wird als Inertialsystem bezeichnet. Als gute Näherung kann ein Koordinatensystem mit Bezugspunkt im Massenmittelpunkt der Sonne und mit seinen Achsen ausgerichtet nach bestimmten Fixsternen als Inertialsystem verstanden werden. Weiterhin werden wir später noch sehen, dass Bezugssysteme die gleichförmig geradlinig bewegt sind relativ zum Inertialsystem ebenfalls Inertialsysteme sind. Daher ist ein sogenanntes Laborkoordinatensystem zur Betrachtung der meisten Probleme völlig ausreichend.

Um dieser Tatsache der Notwendigkeit des Inertialsystems explizit Rechnung zu tragen, lautet eine moderne Formulierung des Trägheitsgesetzes

Es gibt Koordinatensysteme (Inertialsysteme), in denen sich ein

kräftefreier Massepunkt in Ruhe befindet oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Es gilt also

$$\mathbf{F} = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) = \text{const.} \rightarrow \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$$

Eine Verallgemeinerung des Axioms lautet

Im Inertialsystem nehmen die physikalischen Gesetze die einfachste Form an.

Diese Formulierung beinhaltet die Beschreibung der Bewegung eines kräftefreien Massepunktes, aber gleichzeitig auch allen weiteren Gesetze.

3.3 *Lex secunda* → Grundgesetz der Dynamik

Als Konsequenz des ersten Axioms, muss ein in einem Inertialsystem beschleunigter Massepunkt/Körper der Einwirkung anderer Massepunkte/Körper ausgesetzt sein. Diese anderen Massepunkte müssen eine Kraft auf den betrachteten Massepunkt ausüben. Es sei aber noch einmal betont, dass diese Kraft eine sehr komplexe Wechselwirkung der Massepunkte untereinander und mit möglichen Feldern beinhaltet. Im Rahmen der Mechanik fragen wir nicht nach den Ursachen der Kräfte sondern nur nach deren Wirkungen. Die Kraft wird als gegeben betrachtet. Eine exakte Aufschlüsselung der Ursache der Kräfte ist Gegenstand anderer Teilgebiete der Physik (z.B. der Elektrodynamik, der Gravitationsphysik, oder auch der Atom- und Elementarteilchenphysik). In folgenden Semestern werden Sie dies noch ausführlicher diskutieren.

Die mathematische Beschreibung des funktionellen Zusammenhangs zwischen Kraft und Beschleunigung gewinnen wir aus einer Vielzahl von Experimenten. Im einfachsten Fall beobachten wir, dass die Kraft proportional zur Beschleunigung ist. Der Proportionalitätsfaktor selbst hängt vom Körper ab, der beschleunigt werden soll. Um eine Eisenkugel genau so stark zu beschleunigen wie eine gleich große Holzkugel, benötigen wir eine größere Kraft. Dieser Proportionalitätsfaktor ist gerade die träge Masse. Das Grundgesetz der Dynamik lautet somit

Die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Massenpunkts.

Mathematisch ausgedrückt lautet es

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}.$$

In der von Newton gewählten Formulierung lautet es

Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen Linie, in der die Kraft wirkt.

oder moderner ausgedrückt

Die Änderung der Bewegungsgröße (Impuls) ist proportional zur Kraft und zeigt in deren Richtung.

Hier wird eine neue physikalische Größe eingeführt, der Impuls

$$\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t).$$

Das Grundgesetz nimmt mit Hilfe des Impulses die Form einer Impulsbilanz an

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d}{dt} [m\dot{\mathbf{r}}(t)] = \mathbf{F}(t).$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage der gesamten Newtonschen Mechanik. Beide Formulierungen sind identisch, wenn die Masse zeitlich konstant ist

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d}{dt} [m\dot{\mathbf{r}}(t)] = m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t).$$

Die Grundaufgabe der Newtonschen Mechanik besteht in der Berechnung der Bahnkurve bei gegebener Kraft.

Dieses Gesetz gilt nicht in der relativistischen Physik (wohingegen die Impulsbilanz seine Richtigkeit behält), wo die Masse selbst eine Funktion der Geschwindigkeit und nicht mehr konstant ist. Es gilt

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und m_0 der Ruhemasse des Körpers. Dies entspricht der Masse des Körpers bei einer Geschwindigkeit von $|\mathbf{v}| = v = 0$. Aber auch schon in der nichtrelativistischen Physik kann die Gleichung ihre Gültigkeit verlieren, z.B. wenn die Masse eine Funktion der Zeit ist. Dann ist

$$\frac{d}{dt} [m(t)\dot{\mathbf{r}}(t)] = \dot{m}(t)\dot{\mathbf{r}}(t) + m\ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Das kanonische Beispiel hier ist die Berechnung der Flugbahn einer Rakete, deren Masse sich verringert, während der Treibstoff verbrannt wird.

Der Begriff der trägen Masse, der hier immer verwendet wurde, bezeichnet den Widerstand des Massepunktes zur Bewegungszustandsänderung. Sie kann dynamisch bestimmt werden durch eine Vergleichsmessung mit einem Massepunkt bekannter Masse. Dabei wird die Beschleunigung gemessen, wenn die selbe Kraft auf die beiden Körper wirkt. Das Massenverhältnis ergibt sich dann aus

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}_2|}{|\ddot{\mathbf{r}}_1|}$$

Als Referenzmasse wird üblicherweise das Pariser Ur- oder Normalkilogramm verwendet. Ein 1 N (Newton) ist demnach die Kraft, die benötigt wird, um einem Körper der Masse 1 kg eine Beschleunigung von $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ zu geben.

Ein alternativer Zugang zur Bestimmung der Masse besteht in der Analyse der Bewegung des Körpers im Schwerfeld der Erde. Experimentell kann man beobachten, dass jeder Körper gleich schnell fällt, unabhängig von seiner stofflichen Zusammensetzung. Es gilt also im Schwerfeld der Erde $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$.

Entsprechend gilt nach dem Grundgesetz der Dynamik

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

wobei in einem Bezugssystem, in dem die z-Achse normal zur Erdoberfläche steht

$$\mathbf{g} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

ist mit $g = 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ der Gravitationskonstante der Erde². Diese Werte konnten zur Zeit von Newton mit einer Genauigkeit von 0.1% bestimmt werden. Mit Hilfe von Satelliten sind heute Messungen mit einer Präzision von 10^{-18} möglich.

In einer statischen Kraftmessung kann man, in einer wie auch immer gearteten Waage, zwei unterschiedliche Massepunkte in einem Gleichgewichtszustand bringen. Die Gewichtskraft des zu vermessenden Objektes wird kompensiert durch ein bekanntes Gewicht. In einer solchen Anordnung spielt die Trägheit des Massepunktes keine Rolle, da der Massepunkt sich ja in Ruhe befindet. Dementsprechend unterscheidet man in der Messung zwischen der trägen Masse m_t und der schweren Masse m_s .

Aus der Kombination von statischen und dynamischen Messungen wird man feststellen, dass wenn zwei verschiedene Körper am selben Punkt im Raum das gleiche Gewicht besitzen, besitzen sie auch die gleiche träge Masse. Schwere Masse ist identisch zur trägen Masse.

$$m_t = m_s.$$

Diese Einsicht, dass die Masse bei Vermessung mit einem dynamischen Aufbau und einem statischen Aufbau identisch ist, darf nicht als trivial erachtet werden. Die Erkenntnis wurde in aufwendigen Experimenten gewonnen und hat sich bisher immer bestätigt.

3.4 *Lex tertia* → Wechselwirkungsgesetz, *actio=reactio*

Wir haben bereits festgestellt, dass zur Wirkung einer Kraft auf einen Massepunkt wenigstens noch ein zweiter vorhanden sein muss, mit

² Beachten Sie bitte, auch wenn das Gravitationskonstante heißt, ist es doch noch eine schwache Funktion des Ortes. Am Äquator beträgt der Wert $g = 9.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und an den Polen $g = 9.83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Daher müssen die Pendeln von original Schwarzwälder Kuckucksuhren immer nach dem entsprechenden Land eingestellt werden. Und gehen eigentlich nur an ausgewählten Orten richtig.

dem der Massepunkt wechselwirkt. Die Erfahrung zeigt, dass ein Massepunkt demnach nicht nur eine Kraft erfährt, sondern dass von ihm zeitgleich auch immer eine Kraftwirkung ausgeht. Die Kraftwirkung ist daher immer wechselseitig. Diese Einsicht wird im dritten Axiom formuliert

Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Mathematisch ausgedrückt lautet dies

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Hierbei ist \mathbf{F}_{12} die Kraft, die der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt und die Kraft \mathbf{F}_{21} ist die Kraft, die der Körper 1 auf den Körper 2 ausübt.

Allgemeiner formuliert lautet das dritte Newtonsche Axiom

Die Kraft mit der die Umgebung auf den Massepunkt wirkt, entspricht einer gleich großen Gegenkraft auf die Umgebung.

Dieses Axiom existiert in verschiedenen Namen und wird auch bezeichnet als das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung oder kurz Wechselwirkungsgesetz. Es wird auch Gegenwirkungs- oder Reaktionsprinzip genannt. Es ist insbesondere wichtig für die Diskussion von Systemen, die aus mehreren Massepunkten bestehen.

3.5 *Lex quarta* → *Superpositionsprinzip*

In Newtons Werk wird das Prinzip der ungestörten Überlagerung, auch bekannt als das Unabhängigkeitsprinzip oder auch das Superpositionsprinzip der Mechanik, angenommen. Auch wenn es nicht ursprünglich als Axiom formuliert wurde, wurde es später als *lex quarta*, als viertes Newtonsches Gesetz bezeichnet. Es lautet

Wirken mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt, so kann ihre Wirkung durch vektorielle Superposition beschrieben werden.

Wichtig ist hier, dass die Kräfte sich nicht ändern durch Anwesenheit anderer Kräfte. Vektoriell formuliert lautet es

$$\mathbf{F}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N \mathbf{F}_{ji} \rightarrow m\ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_j.$$

Hier ist N die Gesamtzahl aller vorhandenen Massepunkte.

3.6 *Inertialsysteme und Galilei-Transformation*

Da das Thema immer nur unvollständig angesprochen wurde, sollen abschliessend in diesem Kapitel noch einmal die Ideen zum Inertialsystem zusammengefasst werden.

Mit den Newtonschen Axiomen ist die Bewegung physischer Körper nur als Bewegung relativ zu einem Bezugssystem definiert. Bei einer starren Verschiebung des Bezugssystems verbleibt die Art der Bewegung gleichwertig. Bei bewegten Bezugssystemen kann das anders sein. Zum Beispiel erfährt ein Massepunkt der sich geradlinig und gleichförmig in einem Bezugssystem bewegt eine Beschleunigung in einem rotierenden System. In solchen Bezugssystemen sind die Newtonschen Axiome nicht mehr anwendbar. Die Newtonschen Axiome sind nur dann sinnvoll, wenn sie sich auf eine Klasse von Bezugssystemen beziehen, welche man als Inertialsysteme bezeichnet. Wichtig ist, und das hatten wir schon in der Diskussion des ersten Axioms diskutiert, dass

1. nicht alle Koordinatensysteme Inertialsysteme sind. Ein triviales Beispiel wären rotierende Systeme.
2. es mindestens ein Inertialsystem gibt (z.B. bezogen auf die Fixsterne). Daraus folgt, dass es Koordinatensysteme gibt, in denen die Newtonschen Axiome gelten.

Zur Klärung der Frage, wie groß die Gesamtheit aller Inertialsysteme ist, müssen wir klären, welche Koordinatentransformation ein Inertialsystem Σ in ein anderes Inertialsystem Σ' überführen kann. Wir fordern, offensichtlich, dass bei der Transformation keine Kraft auf den Massepunkt ausgeübt werden darf:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{\mathbf{r}}' = 0.$$

Auf Grund dieser Forderung scheidet offensichtlich die Rotation als eine mögliche Transformation aus. Die damit einhergehende Richtungsänderung der Geschwindigkeit würde automatisch eine Beschleunigung notwendig machen. Mögliche Änderung ein Inertialsystem in ein anderes zu überführen sind die Translation, die geradlinig-gleichförmige Bewegung und/oder die Verdrehung um einen festen Winkel in Raum oder Zeit. Mathematisch läßt sich das ausdrücken als

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t).$$

Hier beschreibt $\mathbf{r}_0(t)$ vollständig die Transformation. Wir erkennen

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_0(t) + \ddot{\mathbf{r}}'(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{\mathbf{r}}_0(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}_0 t$$

Diese oben formulierte letzte Forderung bezeichnet man als das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik bzw. Galileisches Relativitätsprinzip.

Bezugssysteme, die relativ zu einem Inertialsystem eine unbeschleunigte Translationsbewegung ausführen, sind ebenfalls Inertialsysteme und für die Beschreibung mechanischer Vorgänge vollkommen gleichwertig.

Die Transformation der Inertialsysteme bezeichnet man als Galilei-Transformation.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}'(t) \quad \text{und} \quad t = t'$$

Die Grundgleichungen der Mechanik sind gegenüber aller möglicher Galilei-Transformationen invariant. Die Galilei-Transformation gilt nicht mehr im Rahmen der Relativitätstheorie. Dort wird die Galilei-Transformation durch die Lorentz-Transformation ersetzt. Abschließend sei bemerkt, dass es unendlich viele Inertialsysteme gibt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegen.

3.7 Beschleunigte Bezugssysteme

Wir möchten jetzt die Bewegung in einem Bezugssystem Σ' diskutieren, welche sich gerade nicht mehr geradlinig und gleichförmig relativ zu einem anderen Bezugssystem Σ bewegen soll. Dieses andere Bezugssystem soll ein Inertialsystem sein, so dass $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ gelten soll. Das gestrichene Bezugssystem kann z.B. rotieren.

Die Bewegung eines Massepunktes wird in den zwei verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich beschrieben. Wir definieren den Ort des Massepunktes im ungestrichenen Bezugssystem Σ als $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Im gestrichenen Bezugssystem Σ' wird der Ort des Massepunktes definiert als $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$

Es gilt die Beziehung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t)$$

mit

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{e}'_x(t) + y'(t)\mathbf{e}'_y(t) + z'(t)\mathbf{e}'_z(t).$$

Beachten Sie hier bitte, die Einheitsvektoren im gestrichenen Koordinatensystem sind abhängig von der Zeit. Dies wird die Berücksichtigung einer Rotation ermöglichen.

Die Geschwindigkeit des Massepunktes beschrieben von einem Beobachter im ungestrichenen Koordinatensystem berechnet sich zu

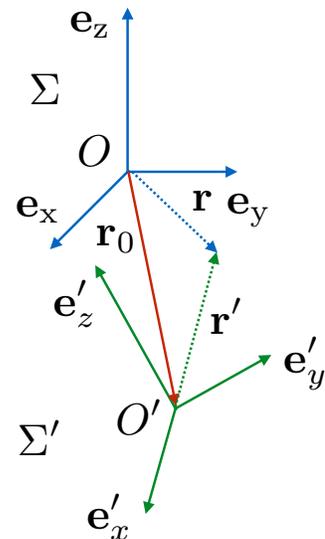
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z + x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z.$$

Im gestrichenen Koordinatensystem, in dem sich die Achsenrichtung für einen Beobachter nicht ändert (die Einheitsvektoren sind fest), besitzt der Massepunkt die Geschwindigkeit

$$\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \dot{\mathbf{r}}'(t) = \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z.$$

Beachten Sie bitte, die gestrichene Ableitung soll einfach beschreiben, dass sich die Ableitung auf eine gestrichene Größe bezieht. Hier bezeichnen wir die Terme

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_0$$



als Translationsgeschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}},$$

als die Absolutgeschwindigkeit und

$$\mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \dot{\mathbf{r}}'$$

als die Relativgeschwindigkeit im beschleunigten Bezugssystem.

Die zeitliche Änderung der Basisvektoren kann durch die Rotation des Systems um eine Achse durch seinen Ursprung erfolgen. Allgemein kann die Drehung um eine Achse beschrieben werden mit Hilfe der folgenden Überlegungen. Aus der Abbildung am Seitenrand erkennen wir, dass

$$|d\mathbf{c}| = |\mathbf{c}| \sin \theta d\phi \rightarrow \frac{|d\mathbf{c}|}{dt} = |\mathbf{c}| \sin \theta \dot{\phi} = |\mathbf{c}| \sin \theta \omega.$$

Allgemein ausgedrückt und mit $\boldsymbol{\omega}$ als dem Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit, welche in die Richtung der Drehachse zeigt, kann die Drehung allgemein beschrieben werden als

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}.$$

Dieser Zusammenhang gilt für alle Vektoren. Im Besonderen aber auch für die vorher betrachteten Einheitsvektoren, z.B.

$$\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x.$$

Damit gilt für die letzten drei Terme in der Absolutgeschwindigkeit

$$x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

und somit

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

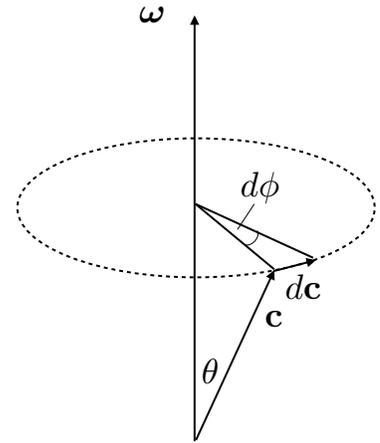
Die sich ergebende Geschwindigkeit für eine verschwindende Relativgeschwindigkeit $\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = 0$ wird als Führungsgeschwindigkeit bezeichnet

$$\mathbf{v}_f(t) = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Weiterhin ergibt sich aus der Tatsache, dass $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'$ ist, die folgende zeitliche Ableitung für einen gestrichelten Vektor

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Aus dieser Herleitung für den Ortsvektor, die aber allgemein gültig ist für beliebige Vektoren, kann man eine Vorschrift ableiten, wie man



in einem Inertialsystem einen beliebigen Vektor ableitet, der in einem rotierenden Bezugssystem dargestellt wird. Im speziellen haben wir

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times .$$

Hierbei beschreibt der erste Term nur die Komponenten des Vektors im gestrichenen Koordinatensystem und der zweite Term eine Rotation. Für einen beliebigen Vektor im Bezugssystem Σ' , $\mathbf{A} = A'_x(t)\mathbf{e}'_x + A'_y(t)\mathbf{e}'_y + A'_z(t)\mathbf{e}'_z$, ergibt sich somit $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$.

Insbesondere erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit als den betrachteten Vektor $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit spielt hier eine besondere Rolle. Die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit ist offensichtlich in beiden Koordinatensystemen gleich.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung berechnen. Im Inertialsystem gilt $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$. Berechnen wir zunächst die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}' &= \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right) \\ &= \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite lässt sich schreiben als

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite lässt sich schreiben als

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}.$$

Der letzte Ausdruck hier ist

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}').$$

Wenn wir alle diese Ausdrücke kombinieren und nach der Beschleunigung $\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}$ umstellen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} &= \frac{d\dot{\mathbf{r}}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\ddot{\mathbf{r}}_0$ wird auch als Translationsbeschleunigung bezeichnet. Für eine verschwindende Relativgeschwindigkeit ($\dot{\mathbf{r}}'$) und damit auch für eine verschwindende Relativbeschleunigung, wird die verbleibende Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$$

auch Führungsbeschleunigung genannt. Sie entspricht gerade genau der zeitlichen Ableitung der früher definierten Führungsgeschwindigkeit.

Damit wird aus der Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ im Nichtinertialsystem

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_0 - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'.$$

Dies ist ein erstaunliches und wichtiges Ergebnis. Das klassische Grundgesetz der Mechanik verliert seine Gültigkeit im Bezugssystem Σ' . Neben der eingepprägten Kraft treten vier weitere Kräfte auf in beschleunigten Bezugssystemen auf. Sie werden Trägheitskräfte genannt. Das sind zusätzlich auftretende Kräfte im Nichtinertialsystem, die erforderlich sind, um die gleichförmige Bewegung eines kräftefreien Massepunkt im Inertialsystem zu garantieren. Ein Beobachter im bewegten Bezugssystem muss diese Kräfte berücksichtigen, um die Bewegung im bewegten Bezugssystem richtig und korrekt zu deuten. Diese Gleichung kann als eine Verallgemeinerung des Grundgesetzes der Mechanik verstanden werden, welche in einem beliebigen Bezugssystem angewandt werden kann.

Zwei der Terme haben spezielle Namen erhalten.

- **Die Zentrifugalkraft**

Die Zentrifugalkraft \mathbf{F}_z (*zentri* - lat. für die Mitte, *fugere* - lat. für fliehen) ist gegeben als

$$\mathbf{F}_z = -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]$$

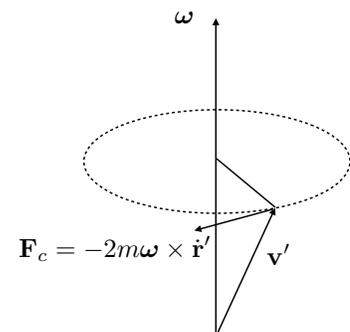
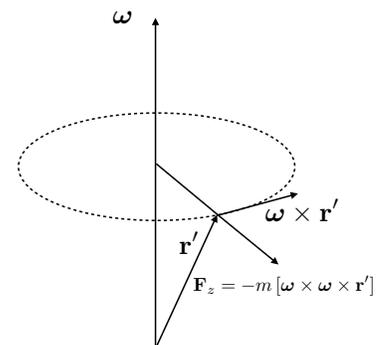
- **Die Corioliskraft**

Die Corioliskraft \mathbf{F}_c ist gegeben als

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$$

Damit die Corioliskraft nicht null ist, muss eine Bewegung im beschleunigten Bezugssystem stattfinden. Die Corioliskraft ist maximal, wenn Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit senkrecht aufeinander stehen.

Diese Scheinkräfte sind anders als eingepprägte Kräfte \mathbf{F} . Eingepprägte Kräfte sind objektive physikalische Realität und beschreiben die an einen Massepunkt angreifende Kraft verursacht durch die Wechselwirkung mit anderen physikalischen Objekten. Diese sind unabhängig von der Wahl des Bezugssystems. Scheinkräfte hingegen hängen nur von der Bewegung des Bezugssystems ab. Sie können aber gemessen werden. Deren Betrachtung ist daher zweckmäßig, da sie im beschleunigten System wie die echten Kräfte im Inertialsystem wirken.



4 Dynamik eines Massenpunktes - Bilanzgleichungen

Wie wir bereits diskutierten, ermöglicht das zweite Newtonsche Axiom die Lösung verschiedener Arten von Problemen. Die wichtigste Grundaufgabe aus theoretischer Sicht ist sicherlich die, dass bei vorgegebener Kraft, die im allgemeinen eine Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit ist, wir die Bahnkurve eines im Raum frei beweglichen Massepunktes berechnen möchten. Wir müssen das Problem lösen

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

oder auch in kartesischen Koordinaten ausgedrückt

$$m\ddot{x}(t) = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{y}(t) = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{z}(t) = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

Unter Berücksichtigung von sechs möglichen Integrationskonstanten, beschreiben diese Gleichungen die Gesamtheit aller möglichen Bewegungen, die durch das Kraftgesetz ermöglicht werden. Um zu einer konkreten Lösung zu gelangen, müssen wir daher dieser sechs Integrationskonstanten aus Anfangswerten bestimmen. Erst durch diese Angaben wird die Bewegung eindeutig. Man verwendet normalerweise als Anfangswerte den Ort und die Geschwindigkeit zu einem Referenzzeitpunkt t_0 . Diese sind gegeben als

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0).$$

Mit der Angabe dieser Anfangswerte und dem bekannten funktionalen Zusammenhang der Kraft, ist die mechanische Bewegung komplett determiniert. Einmal bekannt, können alle dynamischen Größen des Massepunktes in beliebiger Zukunft vorhergesagt werden. Das Finden der Lösung dieser Gleichung ist ein rein mathematisches Problem im Rahmen der Physik. Beim systematischen Vorgehen zur Lösung des Problems würde man zunächst alle Unklarheiten bezüglich der Kraft klären und das entsprechende Kraftgesetz explizit formulieren. Man würde anschliessend die Bewegungsgleichungen integrieren und die

noch enthaltenen Integrationskonstanten bestimmen. Abschliessend kann man die Bahnkurve physikalisch diskutieren. Diese Vorgehen werden wir im Folgenden in einer großen Anzahl von Beispielen demonstrieren.

Dieses allgemeine Vorgehen ist jedoch oft kompliziert. Sie müssen viele gekoppelte Differentialgleichungen lösen, was manchmal anspruchsvoll und vor allem auch uninspirierend sein kann, manchmal auch unmöglich. Im Allgemeinen wird man dazu die Differentialgleichungen in Integralgleichungen überführen, welche, wie vorher skizziert, mit einer ausreichenden Anzahl von Anfangswerten eindeutig gelöst werden können.

Die Lösung einer oder mehrere Integrale der Bewegungsgleichungen kann aber bei bestimmten Arten von Kräften auf Grund von Bilanzgleichungen oder Erhaltungssätzen unmittelbar angegeben werden. Man sagt, diese Erhaltungsgrößen sind invariant. Diese Vereinfachung gilt es auszunutzen und physikalisch zu studieren. Diese Bilanzgleichungen oder Erhaltungssätzen bezeichnen wir als erste Integrale der Bewegungsgleichungen. Sie haben die Form

$$f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0.$$

Das Lösen dieser Gleichungen vereinfacht die Diskussion der Bewegungsgleichung häufig, ohne dass man diese exakt integrieren muss.

Bevor wir diese Aspekte physikalisch diskutieren, möchten wir noch einige mathematische Grundlagen zusammenfassen.

Mathematischer Einschub (Partielle Ableitung)

Wir diskutieren die infinitesimale Änderung von skalaren Funktionen ($\phi = \phi(\mathbf{r}) : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) und von Vektorfunktionen ($\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ f_2(\mathbf{r}) \\ f_3(\mathbf{r}) \end{pmatrix} : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$).

Beachten Sie bitte, wir werden später eher den Ausdruck skalares Feld bzw. Vektorfeld benutzen. Ein Feld in der Physik beschreibt die räumliche Verteilung einer physikalischen Größe. Es kann sich um ein Skalarfeld handeln wie z. B. das Gravitationspotential oder das elektrostatische Potential, oder um ein Vektorfeld wie z. B. das Gravitationsfeld oder das elektrische Feld. Der Wert eines Feldes an einem bestimmten Ort wird Feldstärke genannt.

Für eine skalare Funktion ist also die Frage zu klären, wie ändert sich $\phi(\mathbf{r})$ von der Raumkoordinate \mathbf{r} zu $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Zur vereinfachten Diskussion nehmen wir zunächst einmal an, dass wir einer Änderung von $\phi(\mathbf{r})$ nur entlang einer Koordinatenachse betrachten. Effektiv ist dies ein ein-dimensionales Problem, da die anderen Koordinaten als Konstant angenommen werden. Grundelemente der Differentiation haben wir bereits kennengelernt und wir wissen, wie man diese Ableitung berechnet. Die partielle Ableitung dieser Funktion ergibt sich aus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h, y, z) - \phi(x, y, z)}{h} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{y,z}.$$

Der Subskript bezeichnet die Konstanz der beiden anderen Größen, von denen die Funktion abhängt. Die partielle Ableitung kann auf verschiedene Arten geschrieben werden. So werden Sie die folgenden Formulierungen finden

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{y,z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{y,z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \partial_x \phi = \phi_{x_1}.$$

Ich möchte Sie darauf hinweisen, dass sehr wahrscheinlich auch verschiedene Schreibweisen im Skript benutzt werden. Verstehen Sie dies bitte nicht als Inkonsequenz meinerseits, sondern eher als Konsequenz des Wunsches, Sie mit verschiedenen Notationen vertraut zu machen, die Sie auch in der Literatur finden.

In Bezug auf die Rechenregeln gibt es nicht sehr viel zu sagen, außer der Tatsache, dass Sie alle Regeln so anwenden können wie früher bereits diskutiert bei Funktionen, die explizit nur von einer Variabel abhängen. So gilt zum Beispiel für die Funktion

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \sin(xy) + xz \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= y \cos(xy) + z.\end{aligned}$$

Mehrfache Ableitungen sind rekursiv definiert und lassen sich berechnen als

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial x_i^n} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^{n-1} \phi}{\partial x_i^{n-1}}.$$

Gemischte Ableitungen, also Ableitungen nach zwei verschiedenen Variablen, lassen sich berechnen als

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}.$$

Ein wichtiges Hilfsmittel ist das Vertauschen der Reihenfolge der zweiten Ableitungen. Dies ist möglich wenn ϕ stetige partielle Ableitungen bis mindestens der 2. Ordnung besitzt. Es gilt dann

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Diese Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen wird auch als Satz von Schwarz bezeichnet.

Wir haben auch früher schon die Kettenregeln kennengelernt, welche Sie hier auch wieder explizit anwenden können. Für eine Funktion $\phi = \phi(x(t_1), y(t_2), z(t_r))$ berechnet sich $\frac{\partial \phi}{\partial t_1}$ zu

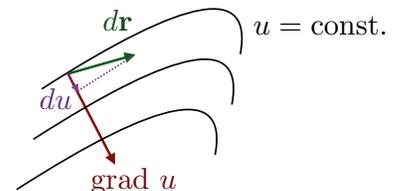
$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1}.$$

Für eine Funktion $\phi = \phi(x(t), y(t), z(t))$ berechnet sich $\frac{d\phi}{dt}$ zu

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Wir sprechen hier von einer totalen Ableitung (auch kenntlich gemacht durch das andere Symbol), da die totale Änderung der skalaren Funktion bei infinitesimaler Änderung der Zeit berechnet wird. Das totale Differential der Funktion $d\phi$ berechnet sich zu

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz.$$



Mathematischer Einschub (Elementaraspekte der Vektoralgebra)

• a) Der Gradient

Der Gradient einer skalaren Funktion $\phi(x, y, z)$ wird beschrieben durch

$$\text{grad } \phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x, y, z).$$

Er ist ein Vektor und zeigt in die Richtung der maximalen Änderung der skalaren Größe; und der Betrag gibt die entsprechende Stärke der Änderung an. Zur besseren Visualisierung, stellen Sie sich vor, Sie stehen irgendwo in einer Landschaft, z.B. an einem Berg. Dann zeigt der Gradient in die Richtung des maximalen Anstieges am Berg und die Größe sagt Ihnen, welchen Höhenunterschied Sie in dieser Richtung zurücklegen würden. In Komponentenschreibweise wird dies auch häufig ausgedrückt als

$$\phi(x_j)_{,i} = F_i$$

i und j in diesem Ausdruck sind Platzhalter und bezeichnen eine der drei Koordinaten x , y oder z . Der Gesamtausdruck ist zu lesen als die i^{te} Komponente des Vektors F die i^{te} Ableitung der skalaren Größe ϕ ist. Und dieses skalare Funktion hängt von den drei Raumkoordinaten ab.

Der Gradient kann auch mit Hilfe des Nabla-Operators ∇ angegeben werden. Der Nabla-Operator ist ein vektorieller Differentialoperator, der auf skalare oder vektorielle Funktionen angewandt wird. Seine vektoriellen Komponenten entsprechen den partiellen räumlichen Ableitungen in den entsprechenden Koordinaten

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Der Nabla-Operator angewandt auf eine skalare Größe ergibt einen Vektor. Wir können also schreiben

$$\nabla\phi(x, y, z) = \text{grad } \phi(x, y, z).$$

Die Richtung von $\text{grad } \phi$ bezeichnet die Richtung der größten Änderung des Wertes von ϕ . Die Änderung der skalaren Funktion $d\phi$ in einer bestimmten Richtung, gegeben durch den infinitesimal kleinen Vektor mit einer bestimmten Richtung $d\mathbf{r}$, wird berechnet als

$$d\phi = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r}$$

oder

$$d\phi = \phi_{,i} dx_i$$

wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention angewandt wird.

- **b) Die Divergenz**

Wird der Nabla-Operator auf eine Vektorfunktion $\mathbf{f}(x, y, z)$ mit einem Skalarprodukt angewandt, erhält man die Divergenz der Vektorfunktion.

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(x, y, z) = \text{div } \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = g(x, y, z)$$

oder

$$f_i(x_j)_{,i} = g.$$

Die Divergenz beschreibt den Fluss der durch $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ beschriebenen Größe durch eine bestimmte Fläche. Sie wird auch als Quelldichte bezeichnet. Ist die Divergenz eines Vektorfeldes an einem bestimmten Raumpunkt positiv, muss sich dort eine Quelle befinden. Ist die Divergenz eines Vektorfeldes an einem bestimmten Raumpunkt negativ, bezeichnet man dies als eine Senke. Für eine verschwindende Divergenz muss das Vektorfeld an diesem Raumpunkt entsprechend quellfrei sein.

- **c) Die Rotation**

Wird der Nabla-Operator auf eine Vektorfunktion $\mathbf{v}(x, y, z)$ mit einem Kreuzprodukt angewandt, erhält man die Rotation der Vektorfunktion.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{F}(x, y, z) \\
&= \operatorname{curl} \mathbf{v}(x, y, z).
\end{aligned}$$

Die Rotation einer Vektorfunktion ist wieder eine Vektorfunktion, dessen Betrag der maximalen Rotation an diesem Punkt entspricht und dessen Richtung senkrecht auf der Ebene der Rotation steht. Man sagt, die Rotation ist ein Maß für die Verwirbelung einer Vektorfunktion. Es soll gelten (für die Rotation um eine Achse)

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r})]_z dx dy = \int_{\square} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

wobei die rechte Seite das geschlossene Integral der Tangentialkomponente entlang der Umrandung einer Fläche in der x - y -Ebene ist. Zur einfachen Diskussion wählen wir hier eine rechteckige Fläche. Dann ist das Produkt $dx dy$ auch einfach zu interpretieren als die Oberfläche des Rechteckes. Die Richtung des Integrals soll entgegen dem Uhrzeigersinn sein. Dies wäre im mathematisch positiven Umlauf- oder Drehsinn. Um dies zu sehen, evaluieren wir das Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\square} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_x^{x+dx} [v_x(\zeta, y, z) - v_x(\zeta, y + dy, z)] d\zeta + \int_y^{y+dy} [v_y(x + dx, \eta, z) - v_y(x, \eta, z)] d\eta \\
&\stackrel{dx, dy \rightarrow 0}{=} - \int_x^{x+dx} \frac{\partial v_x}{\partial y} dy d\zeta + \int_y^{y+dy} \frac{\partial v_y}{\partial x} dx d\eta \\
&= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy \\
&= [\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r})]_z dx dy.
\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung kann für die y - z -Ebene und die x - z -Ebene durchführen. Kombiniert man alle drei Ergebnisse erhält man für eine beliebig gewählte Fläche den Satz von Stokes

$$\int_{(F)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \int_F d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Das Linienintegral der Tangentialkomponente einer Vektorfunktion über den Rand einer Fläche entspricht dem Flächenintegral der Normalkomponente des Rotors dieser Fläche. Sie haben hier ein Flächenintegral in ein Linienintegral überführt. Dies stellt eine enorme Vereinfachung des Rechenaufwandes dar.

Beachten Sie bitte, es gibt noch eine ganz Reihe anderer, ähnlich gelagerter Integralsätze (z.B. Satz von Gauß oder auch der erste und der zweite Greensche Satz). Diese werden wir im Rahmen dieses Kurses nicht benötigen, Sie werden diese aber in weiteren Vorlesungen benötigen. Sie stellen das mathematische Rüstzeug dar, Gleichungen zu manipulieren, damit Sie in eine Ihnen genehme Form kommen. Die sichere Anwendung solcher Integralsätze wird wichtig werden in Ihrem Studium.

4.1 Der Impuls und die Impulsbilanz

Wir wollen als erstes mit der Impulsbilanz anfangen. Sie ergibt sich relativ trivial aus dem zweiten Newtonschen Axiom und lautet

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}(t) = m(t) \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Diese Gleichung verbal formuliert besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines Massepunktes gleich der einwirkenden Gesamtkraft ist. Für den speziellen Fall, dass keine Kraft wirkt, also $\mathbf{F} = 0$ folgt die

Impulserhaltung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = 0 \text{ und } \mathbf{p}(t) = \mathbf{const.}$$

Dies ist ein erstes Integral der Bewegungsgleichung. Es drückt den uns bereits bekannten Sachverhalt aus, dass ein kräftefreier Massepunkt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden im Raum bewegt; oder er ist gar komplett in Ruhe. Die Einfachheit dieses funktionellen Zusammenhangs soll nicht darüber hinwegtäuschen, dass für Systeme bestehend aus mehreren Massepunkten sowohl die Impulsbilanz als auch die Impulserhaltung diese einfache Form nicht mehr annehmen.

4.2 Die Energie und die Energiebilanz

Wir beginnen zunächst mit der Definition der Arbeit. Die Kraft die am Masspunkt angreift, um ihn von einem Punkt P_1 nach P_2 zu bewegen, verrichtet eine Arbeit. Für eine infinitesimale Verschiebung beträgt die infinitesimale Arbeit

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}||d\mathbf{r}| \cos \phi = F_s ds.$$

Hierbei ist $ds = |d\mathbf{r}|$ das Linienelement und ϕ der Winkel zwischen der Kraft und dem Weg. F_s ist die Kraftkomponente entlang der Richtung des Weges. Eine negative infinitesimale Arbeit verlangt offensichtlich einen stumpfen Winkel zwischen Kraft \mathbf{F} und Verschiebung $d\mathbf{r}$. Dann muss offensichtlich Arbeit geleistet werden gegen die Kraft, um die Verschiebung zur ermöglichen.

Die gesamte Arbeit, die geleistet wird, um den Massepunkt zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 zu verschieben, beträgt demnach

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

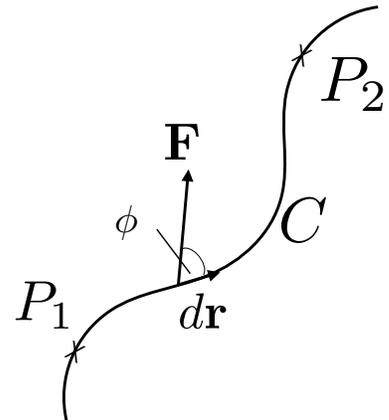
Sie ist demnach im Allgemeinen eine Funktion der Kraft, der Punkte P_1 und P_2 und eine Funktion des gewählten Weges.

Die Leistung ist definiert als die Arbeit die pro Zeiteinheit verrichtet wurde

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Zur weiteren Herleitung einer Bilanzgleichung beginnen wir mit der allgemeinen, vektoriellen Bewegungsgleichung und multiplizieren diese mit $\dot{\mathbf{r}}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ m\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$



Den Term in der Klammer bezeichnet man als die kinetische Energie oder auch Bewegungsenergie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{m}{2} v^2.$$

Wir erkennen an der obigen Gleichung, dass die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Massepunktes gleich ist der Leistung der einwirkenden Kraft am Massepunkt. Hier ist es wichtig zu beachten, dass dies die Gesamtkraft ist:

$$\frac{dT}{dt} = P.$$

Für eine verschwindende Leistung muss die kinetische Energie constant sein:

$$P = 0 \rightarrow T = \text{const.}$$

Dies wäre ein weiteres erstes Bewegungsintegral und drückt die Erhaltung der kinetischen Energie aus. Wenn die Gesamtkraft eine positive Leistung erbringt ($P > 0$), muss $dT > 0$ sein. Wir beobachten einen Zuwachs an kinetischer Energie.

Wir können diese differentielle Gleichung auch integrieren und erhalten

$$\int_1^2 dT = \int_1^2 P dt = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow T_2 - T_1 = W.$$

Die Änderung der kinetischen Energie des Massepunktes zwischen zwei Punkten auf seiner Bahnkurve entspricht gerade genau der geleisteten Arbeit der Kraft am Massepunkt.

Das Kraftfeld selbst kann unterschiedliche Eigenschaften besitzen. Allgemein unterscheiden wir zwischen konservativen und nicht-konservativen Kraftfeldern. Letztere werden auch als dissipative Kraftfelder genannt. Deren Eigenschaften wollen wir im Folgenden diskutieren.

4.2.1 *Konservative Kraftfelder*

Allgemein gilt, dass wenn man eine Funktion U finden kann, für die gilt

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

so nennt man \mathbf{F} eine konservative Kraft. Die Funktion U bezeichnet man als das Potential oder die potentielle Energie. Im Allgemeinen besteht aber das Kraftfeld aus einem konservativen und einem dissipativen Anteil

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{cons.}} + \mathbf{F}_{\text{diss.}}$$

Es gilt dann

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} + \mathbf{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

$$\frac{d}{dt} [T + U(\mathbf{r})] = \mathbf{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Dieser Zusammenhang wird als Energiebilanz bezeichnet. Er besagt, dass die zeitliche Änderung der mechanischen Energie der Leistung der dissipativen Kräfte entspricht. Die Energie E ist eine Erhaltungsgröße, wenn die dissipativen Kräfte ($\mathbf{F}_{\text{diss.}} = 0$) verschwinden

$$E \doteq T + U(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

$$\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = E = \text{const.}$$

Die Größe E bezeichnet hier die Gesamtenergie des Massepunktes. Diese besteht aus potentieller und kinetischer Energie.

Wir wollen im Folgenden genauer diskutieren, unter welchen Voraussetzungen ein Kraftfeld konservativ ist bzw. welche weiteren Aussagen wir über das Potential gewinnen können. Ausgangspunkte unserer Überlegungen war die Forderung, dass

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

- a) Für den Fall, dass die Kraft senkrecht auf der Geschwindigkeit des Massepunktes steht, muss das Potential konstant sein.

$$\mathbf{F} \perp \dot{\mathbf{r}} \rightarrow U = \text{const.} \rightarrow \frac{dT}{dt} = 0$$

Hier wird keine Arbeit verrichtet, die kinetische Energie muss dann für ein konservatives System zeitlich konstant sein. Ein Beispiel für ein solches Kraftfeld wäre die Lorentzkraft, welche ein geladenes Teilchen in einem Magnetfeld erfährt [$\mathbf{F} = q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$] da $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F} = \dot{\mathbf{r}} \cdot q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = 0$.

- b) Wir können die obige Ausgangsgleichung auch noch einmal expliziter ausformulieren und finden

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} = \text{grad } U \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Daraus folgt

$$(\text{grad } U + \mathbf{F}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0.$$

Neben der Möglichkeit, dass das Skalarprodukt insgesamt verschwindet (den Fall haben wir gerade diskutiert), kann diese Gleichung erfüllt werden, wenn

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U$$

gilt. Dies ist der für uns interessante Fall. Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn wir es als den negativen Gradienten einer skalaren Funktion ausdrücken können. Dies verlangt, dass das Kraftfeld unabhängig sein muss von der Zeit und der Geschwindigkeit. Es gilt

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Eine Kraft wird konservativ genannt, wenn sie als Gradient eines skalaren Potentials darstellbar ist. Das Potential ist dabei nur bis auf eine Konstante bestimmt. Die Wahl des Vorzeichens ist Konvention.

Ein Elementarsatz der Vektoralgebra besagt, dass die Rotation eines Gradientenfeldes immer verschwindet, $\text{rot grad } \phi(\mathbf{r}) = 0$. Dies gilt natürlich im speziellen auch für das Potential. Daher muss ein konservatives Kraftfeld auch wirbelfrei sein

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0.$$

Oder anders ausgedrückt, die Kraft hat immer ein Potential, wenn sie wirbelfrei ist. Beachten Sie bitte, dass der Umkehrschluss nicht gilt. Nicht jedes wirbelfreie Kraftfeld ist konservativ. Wie wir gleich diskutieren werden, können auch dissipative Kraftfelder wirbelfrei sein.

Wir können auch die integrale Formulierung dieses Zusammenhanges diskutieren

- a) Wir betrachten dazu als erstes die geleistete Arbeit entlang eines geschlossenen Weges.

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint \text{grad } U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \oint dU(\mathbf{r}) = -U_{\text{ende}} + U_{\text{anf}} = 0.$$

Wir erkennen hier, dass konservative Kräfte auf geschlossenen Wegen keine Arbeit leisten. Die Arbeit hängt dabei nicht vom Weg ab.

- b) Wir können das auch mathematisch abstrakter formulieren, in dem wir den Stokeschen Satz anwenden

$$\int \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

da die Forderung nach einer lokal verschwindenden Rotation sich offensichtlich auch auf die globale Eigenschaft überträgt. Beachten Sie bitte, dass diese Argumentationskette nur in eine Richtung funktioniert. Verschwindet die Rotation eines Vektorfeldes, dann verschwindet das geschlossene Kurvenintegral über das Vektorfeld (im konkreten Fall hier beschreibt dies eine verschwindende geleistete Arbeit, $W = 0$). Die umgekehrte Schlussfolgerung ist aber nicht in jedem Falle richtig. Falls $W = 0$ gilt, folgt daraus nicht automatisch, dass $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$.

Zur Berechnung des Potentials müssen wir zunächst aus der Überprüfung der Forderung $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ sicherstellen, dass überhaupt ein Potential existiert. Anschliessend können wir das Potential berechnen mittels

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} dU = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

Hier taucht das Potential $U(\mathbf{r}_0)$ an einem Referenzpunkt \mathbf{r}_0 auf, welchen wir geeignet festlegen müssen. Rechnen Sie sich bitte, das Potential ist selbst nur bestimmt bis auf eine Konstante. Sie können einen beliebigen Wert addieren oder subtrahieren, ohne die resultierende Kraft zu verändern. Es ist nur diese Kraft, die zu einer Bewegung des Massepunktes führt, so dass dieses Referenzpotential geeignet gewählt werden kann. Weiterhin ist das obige Integral wegunabhängig. Daher können Sie sich auch einen geeigneten Integrationsweg aussuchen, um die Rechnung möglichst einfach zu gestalten. Das Potential entspricht hier der Arbeit, die gegen die Kraft verrichtet werden muss, um den Massepunkt von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} zu bringen.

Wegen der Unbestimmtheit des Potentials, kann dies in dem beliebig gewählten Bezugspunkt zu null gesetzt werden

$$U(\mathbf{r}_0) = 0 \rightarrow U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

Sehr häufig wird dieser Bezugspunkt im Unendlichen gewählt, wo das Potential auf null abgeklungen sein darf. Das muss aber nicht immer so sein.

Der Wert des Potentials an einem bestimmten Raumpunkt entspricht damit der Arbeit, um den Massepunkt gegen die Kraft von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} zu verschieben. Alternativ formuliert entspricht es auch der Arbeit, die die Kraft bei der Verschiebung des Massepunktes von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} leistet.

Das Potential muss man sich selbst als eine Art Gebirge vorstellen. Hier wird jeder Koordinate ein spezifischer Funktionswert zugeordnet. Dies ist vergleichbar zu einem Höhenprofil, welches allerdings nur zwei-dimensionalen Koordinaten eine dritte skalare Größe, die Höhe zuordnet. Wenn Sie in topographischen Karten sehen, werden Ihnen sicherlich gleich charakteristische Linien auffallen. Für den zwei-dimensionalen Raum sind das Linien konstanter Höhe. Im drei-dimensionalen Raum sind das Flächen und sie beschreiben Flächen mit einem konstanten Potential. Man spricht dann von Äquipotentialflächen. Für die gilt

$$U = \text{const.} \rightarrow dU = 0 \text{ auf Fläche.}$$

Es gib also keine Änderung des Potentials auf dieser Fläche. Nun gilt aber

$$dU = \text{grad } U \cdot d\mathbf{r} \doteq 0 \rightarrow d\mathbf{r} \perp \text{grad } U \rightarrow d\mathbf{r} \perp \mathbf{F}.$$

$d\mathbf{r}$ ist hier ein Linienelement in der Fläche. Wir erkennen daraus, dass die Kraft senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht. An einem Massepunkt, der sich auf einer Äquipotentialflächen bewegt, wird keine Arbeit verrichtet.

Im Gegensatz dazu beobachten wir den stärksten Anstieg des Potentials bei Bewegung in Richtung des Gradienten.

$$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{F} \rightarrow dU = |\text{grad } U| |d\mathbf{r}|.$$

Wir sehen hier, dass die Kraft immer senkrecht auf Äquipotentialflächen steht und in Richtung des größten Potentialgefälles zeigt.

4.2.2 Nichtkonservative (dissipative) Kräfte

Wir wollen im Folgenden exemplarisch explizit zeitabhängige Kräfte diskutieren

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t).$$

Diese sind also nur ein Beispiel für eine dissipative Kraft. Auch wenn für solche Kräfte die Rotation verschwinden mag

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0$$

und ein explizit zeitabhängiges Potential existieren mag

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad } U(\mathbf{r}, t),$$

gilt keine Energieerhaltung. Ein solches Kraftfeld ist nicht konservativ. Man spricht aber trotzdem von einer Potentialkraft. Dies kann man wie folgt beweisen

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\text{grad } U(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned}$$

Wobei wir von der Einsteinschen Summenkonvention ausgehen und eine virtuelle 0 dazu addiert haben. Nun sind aber die Terme $-\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{dU}{dt}$ so dass wir schreiben können

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Wir sehen hier, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie bestimmt wird durch die partielle Zeitableitung des Potentials. Dem Massepunkt wird somit Energie zugeführt bzw. entzogen.

Dissipative Kräfte sind allgemein charakterisiert durch $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ oder $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$.

Allgemein gilt immer

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{cons.}}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{diss.}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

$$\mathbf{F}_{\text{cons.}}(\mathbf{r}) = -\text{grad } U(\mathbf{r})$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} (T + U) = \mathbf{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = P_{\text{diss.}}$$

Bei dem Vorgang der Dissipation wird mechanische Energie in andere Energieformen umgewandelt.

4.2.3 Beispiele für Potentiale und Energiebilanz

1D harmonischer Oszillator

Der harmonische Oszillator ist das kanonische System, welche im Rahmen der klassischen Mechanik sehr ausführlich diskutiert wird. Man stellt ihn sich dort im Allgemeinen als einen Massepunkt vor, welcher mit einer Feder (deren physische Details vernachlässigt werden) mit einem Fixpunkt starr verbunden ist. Wendet man eine Kraft auf, um den Massepunkt zunächst aus seiner Ruhelage zu bewegen, wird die Rückstellkraft der Feder den Massepunkt davon überzeugen wollen, wieder in seine Ruhelage zurückzukehren. Unter Vernachlässigung von Dissipation, wird die sich dann ergebende Bewegung des Massepunktes gerade eine harmonische Oszillation in der Auslenkung relativ zu seiner Ruhelage sein. Die Beschreibung dieser Bewegung ist eine der Grundprobleme der theoretischen Mechanik und wir werden diese im Laufe des Kurses noch ausführlicher diskutieren.

Die Bedeutung des harmonischen Oszillators speist sich aus der Tatsache, dass in vielen anderen Teilgebieten der Physik dynamische Größen durch identische Gleichungen beschrieben werden. Ein Beispiel dafür ist der Strom in einem elektrischen Schwingkreis bestehend aus einem Kondensator und einer Spule. Auch die Auslenkung eines negativ geladenen Elektrons relativ zu einem positiv geladenen Kern wird mit Hilfe der gleichen Gleichung beschrieben. Aus dieser Größe können Sie später die Permittivität berechnen; eine Materialeigenschaft die die Ausbreitung elektromagnetischer Felder in einem Festkörper beschreibt. Auch in der Quantenmechanik spielt der dann quantenmechanische harmonische Oszillator eine wichtige Rolle. Er wird Ihnen also im Laufe Ihres Studiums immer wieder begegnen. Wenn Sie den harmonischen Oszillator verstanden haben, haben Sie sehr viel verstanden¹.

Die für uns wichtige Eigenschaft des harmonischen Oszillator ist die einer linearen Rückstellkraft bei einer kleinen Auslenkung. Was klein ist, lässt sich nicht in jedem Falls sagen, aber für ausreichend kleine Auslenkungen (Amplituden) ist diese Annahme für alle oben genannten Systeme hinreichend genau erfüllt. Wir gehen von einem eindimensionalen harmonischen Oszillator, bei dem eine Rückstellkraft nur in eine Richtung wirkt

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{e}_x$$

¹ Ich neige häufig zu der (leicht polemischen) Aussage, dass Sie sehr gut durch Ihr Studium durchkommen, wenn Sie die Fourier-Transformation beherrschen, wissen was eine Taylor-Reihe ist und wenn Sie den harmonischen Oszillator verstanden haben.

mit $k > 0$ eine für die betrachtete Feder charakteristische Größe, der sogenannten Federkonstante.

Die Bewegungsgleichung des Massepunktes auf den eine solche Kraft wirkt, lautet demnach

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Hierbei wird ω_0 die Resonanz- oder die Eigenfrequenz genannt. Warum dies so ist, werden wir später noch sehen. Wir möchten hier noch nicht diese Bewegungsgleichung lösen, sondern diskutieren zunächst nur die die Eigenschaften dieses Kraftfeldes.

Als erstes erkennen wir, dass die Rotation des Kraftfeldes verschwindet:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{rot } \mathbf{F} = 0.$$

Daher wissen wir, dass wir dem Kraftfeld ein skalares Potential zuschreiben können:

$$U(x) = - \int_0^x F_x(x') dx' = \int_0^x kx' dx' = \frac{1}{2} kx^2.$$

Das Potential des harmonischen Oszillators ist eine quadratische Funktion. Es ist ein konservatives System, für das Energieerhaltung gilt

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = E = \text{const.}$$

Ein realer harmonischer Oszillator wird aber nicht bis in alle Ewigkeiten oszillieren bzw. sich bewegen, sondern wird irgendwann zur Ruhe kommen. Er muss seine Energie verloren haben durch eine Wechselwirkung mit der Umgebung. Dies geschieht normalerweise durch Reibung, bei der potentielle oder kinetische Energie in thermische Energie umgewandelt wird. Die Feder bzw. der Massepunkt nimmt Energie auf und erwärmt sich. Dies wird auch als Dissipation bezeichnet. Eine mögliche Dissipation kann als phänomenologisch im einfachsten Fall als Rückstellkraft beschrieben werden, die proportional ist zur Geschwindigkeit. Für eine vernachlässigbare Geschwindigkeit wirkt offensichtlich keine Kraft. Für eine endliche Geschwindigkeit muss die Kraft offensichtlich auch endlich sein. Die Proportionalitätskonstante $\gamma > 0$ wird auch Reibungskoeffizient genannt. Es gilt für die dissipative Kraft

$$\mathbf{F}_{\text{diss}} = -\gamma \dot{x} \mathbf{e}_x \rightarrow \ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ mit } r = \frac{\gamma}{m}.$$

Die Kraft hängt explizit von der Geschwindigkeit ab, wir haben also kein konservatives System. Die Kraft wirkt der Geschwindigkeit entgegen, versucht diese zu reduzieren, was die Wahl des Vorzeichens erklärt. Die zeitliche Änderung der kinetischen und potentiellen Energie beträgt

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\gamma \dot{x}^2.$$

Für den Fall, dass der Reibungskoeffizient keine Funktion der Geschwindigkeit ist, $\gamma(v) = \gamma = \text{const.}$ spricht man von Stokescher Reibung. Sie tritt auf bei schnellen Massepunkten oder bei Massepunkten in zähen Medien, bei sehr hoher Viskosität also. Im Gegensatz dazu ist bei der Newtonschen Reibung der Reibungskoeffizient eine lineare Funktion der Geschwindigkeit, $\gamma(v) = \gamma_0 v$. Ein solches Reibungsgesetz ist anwendbar bei sich langsam bewegenden Massepunkte, z.B. einem Fallschirm.

Homogenes Schwerfeld

Als homogenes Schwerfeld betrachtet man die Kraftwirkung auf einen Massepunkt in Erdnähe. Man beschreibt das Problem dabei in einem lokalen Koordinatensystem und geht davon aus, dass die Erdkrümmung lokal vernachlässigbar ist. Dann zeigt der Normalenvektor der Erdoberfläche in z -Richtung und eine Kraft wirkt nur in die negative z -Richtung. Sie hängt nicht von der Position ab, was offensichtlich eine Näherung nur anwendbar für die unmittelbare Erdoberfläche ist. Beachten Sie bitte des Weiteren, dass hier das lokale System als Inertialsystem betrachtet wird, was, wie früher diskutiert, nicht richtig ist. Für viele praktische Belange ist diese Annahme aber völlig ausreichend. In Konsequenz betrachten wir keine Trägheitskräfte.

Das Kraftfeld der Erde wird dann beschrieben als

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z.$$

Die daraus dann resultierende Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{z} = -mg \quad \rightarrow \quad \ddot{z} + g = 0$$

Das Kraftfeld besitzt wieder eine verschwindende Rotation, da

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{F} = 0.$$

Das Potential berechnet sich zu

$$U(z) = - \int_0^z F_z dz' = \int_0^z mg dz' = mgz.$$

Die potentielle Energie ist also proportional zur Höhe. Auf Grund des konservativen Charakters des Kraftfeldes gilt wieder Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = E = \text{const.}$$

Unter Berücksichtigung einer Stokeschen Reibung verändert sich die Bewegungsgleichung zu

$$\mathbf{F}_{\text{diss.}} = -\gamma\dot{z}\mathbf{e}_z \quad \rightarrow \quad \ddot{z} + r\dot{z} + g = 0 \quad \text{mit } r = \frac{\gamma}{m}.$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen und der potentiellen Energie beträgt demnach

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\gamma \dot{z}^2.$$

Der Massepunkt verliert also mechanische Energie, wie man an dem Vorzeichen erkennen kann. Die Gesamtenergie verringert sich natürlich nicht. Es sind vielmehr die Teilchen des umgebenden Mediums, welche die Energie aufnehmen.

4.3 *Der Drehimpuls und die Drehimpulsbilanz, das Drehmoment*

Ausgangspunkt für die weitere Betrachtung ist wieder die vektorielle Bewegungsgleichung, welche wir aber nicht skalar mit $\dot{\mathbf{r}}$ multiplizieren möchten, wie wir es getan haben um zur Energiebilanz zu gelangen, sondern wir mit multiplizieren von links mit $\mathbf{r} \times$. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad | \mathbf{r} \times \\ m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \end{aligned}$$

Den Ausdruck auf der linken Seite können wir umformen mittels

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}.$$

Der letzte Schritt folgt trivialerweise, da das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet. Daraus folgt als Bilanzgleichung

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

wobei wir den Drehimpuls \mathbf{L} definieren als

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Die Größe auf der rechten Seite der Gleichung wird als Drehmoment bezeichnet und es berechnet sich zu

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Die Bilanzgleichung besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich ist dem einwirkenden Gesamtdrehmoment.

In diesen Gleichungen kann der Drehimpuls in Analogie zum Impuls und das Drehmoment in Analogie zur Kraft gesehen werden. Warum man hier verbal eine Verbindung zur Drehung herstellt, kann man sich einfach vorstellen, wenn man sich die Kraftwirkung auf einen Massepunkt betrachtet, der starr fixiert ist zum Koordinatenursprung. Für ein Kraft die in radialer Richtung angreift, verschwindet offensichtlich das Drehmoment. Dieser Massepunkt wird nicht in Rotation versetzt. Greift die Kraft senkrecht zur Ortskoordinate an, wird der mit dem Ursprung

starr verbundene Massepunkt anfangen zu rotieren. Die Ebene in der er rotiert steht gerade senkrecht zur Richtung des Kreuzproduktes aus Orts und Kraft. Die dynamische Größe die so geändert wird ist gerade genau der Drehimpuls. Dieser Impuls wird, umgangssprachliche diese Drehung, ist wieder maximal, wenn der Ortsvektor senkrecht steht zum Impuls.

Für den speziellen Fall eines verschwindenden Drehmoment ($\mathbf{M} = 0$) gilt Drehimpulserhaltung

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{L} = \text{const.}$$

Der Gleichung für den Drehimpuls $m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$ ist dann eine Konstante der Bewegung und die dazugehörige Differentialgleichung stellt ein vektorielles Bewegungsintegral dar.

Die Bedingung für ein verschwindendes Drehmoment kann auf zweierlei Arten erfüllt werden. Trivialerweise kann natürlich die Kraft verschwinden, $\mathbf{F} = 0$. Der Drehimpulserhaltungssatz liefert dann aber keinerlei weitere Erkenntnisse, die man nicht auch schon aus dem Impulserhaltungssatz hätte gewinnen können. Interessanter ist der Fall, wenn die Kraft \mathbf{F} an jedem Raumpunkt parallel oder antiparallel ist zur entsprechenden Ortskoordinate \mathbf{r} . Solche Kräfte heißen Zentralkräfte. In ihrer allgemeinsten Form lassen sie sich schreiben als

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

In allen Zentralkraftfeldern gilt Drehimpulserhaltung. Dabei muss das Kraftfeld selbst nicht notwendigerweise konservativ sein. Wenn es konservativ ist, muss zusätzlich noch

$$f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = f(r)$$

gelten.

Aus der Drehimpulserhaltung gibt es zwei interessante Konsequenzen, welche wir explizit erwähnen wollen.

1. Die Bewegung des Massepunktes erfolgt in einer Ebene, welche senkrecht zum Drehimpuls steht und die den Nullpunkt umfasst:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = m (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Dies ist eine Ebenengleichung durch den Nullpunkt.

2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Der Fahrstrahl bezeichnet hier den Radiusvektor, welche den Koordinatenursprung mit der Bahnkurve verbindet. Das vektorielle Flächenelement $d\mathbf{f}$ der Fläche aufgespannt durch \mathbf{r} und $d\mathbf{r}$ ist gerade gegeben durch

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}.$$

Die zeitliche Änderung beträgt dann

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2m}\mathbf{L}.$$

Diese Geschwindigkeit wird auch als Flächengeschwindigkeit bezeichnet. Die zeitliche Änderung der Flächengeschwindigkeit ist demnach gegeben als $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$. Unter der Annahme, dass Drehimpulserhaltung gilt, $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ folgt automatisch auch die Konstanz der Flächengeschwindigkeit $\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \text{const.}$. Dieser Flächensatz gilt für alle Zentralkräfte.

Der Drehimpulserhaltungssatz (Flächensatz) ist mathematisch eine Vektorgleichung und beinhaltet dementsprechend drei Konstanten der Bewegung. Zwei dieser Konstanten definieren die Bahnebene (im speziellen die Richtung der Normalen) und die dritte Konstante legt den Betrag der Flächengeschwindigkeit in der Bahnebene fest.

Als Beispiel für eine Zentralkraft wählen wir uns eine Bahnebene, die in der x - y -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegt. Entsprechend hat der Drehimpuls nur eine z -Komponente wegen des Kreuzproduktes

$$\mathbf{L} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\mathbf{e}_z.$$

Die konstante Flächengeschwindigkeit lautet demnach

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.}$$

Wir können auch in der Ebene Polarkoordinaten benutzen. Diese wären

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho \rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi.$$

Der Drehimpuls berechnet sich dann zu

$$\mathbf{L} = m\rho^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z$$

Der Betrag der Flächengeschwindigkeit wird dann wiederum festgelegt mittels

$$\rho^2\dot{\phi} = \text{const.}$$

Sie ist eine Konstante der Bewegung.

Abschliessend sei bemerkt, dass konservative Zentralkräfte sehr häufig eine wichtige Rolle spielen. Sie lassen sich schreiben als

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

und das Potential berechnet sich dann zu

$$U(r) = -\int_{r_0}^r f(r')dr'.$$

Der Fall, dass $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ beträgt, taucht zum Beispiel bei der Coulombkraft oder der Gravitationskraft auf. Mit der Wahl von $U(\infty) = 0$ berechnet sich das Potential zu

$$U(r) = \frac{\alpha}{r_0} - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{r}.$$

Für die Bewegung in solchen konservativen Zentralkraftfeldern gilt Energie- und Drehimpulserhaltung. Die Erhaltung des Drehimpulses begrenzt die Bewegung in einer Ebene mit $\rho^2\dot{\phi} = c$. Aus der Energieerhaltung ergibt sich

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r} = E.$$

Dies ist eine Differentialgleichung für zwei Variablen. Nach Einsetzen der Drehimpulserhaltung ergibt sich aber eine Differentialgleichung erster Ordnung für eine Variable:

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) - \frac{\alpha}{r} = E$$

Aus der ursprünglichen zwei-dimensionalen Bewegung in der Ebene wird effektiv eine ein-dimensionale Bewegung.

5 Diskussion der Bewegungsgleichungen I: Konservative Systeme

In diesem Kapitel wollen wir beispielhaft diskutieren, wie wir die Bewegungsgleichung und vor allem die ersten Integrale (die vorher diskutierten Erhaltungssätze) verwenden können, um die Dynamik eines einzelnen Massepunktes zu beschreiben. Dabei ist die Betrachtung der Impulserhaltung von geringem Interesse. Für den Fall der Impulserhaltung ist der Massepunkt keinem Kraftfeld ausgesetzt und führt lediglich eine geradlinig gleichförmige Bewegung aus, welche nur möglich ist in der Abwesenheit von Kräften. Die interessanten Fälle lassen sich aber erst beobachten für endliche Kräfte

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \neq 0.$$

Daher ist eigentlich nur die Betrachtung der Energie- und Drehimpulserhaltung interessant. Wir werden diesen Erhaltungssätze im Folgenden verwenden, um eine vollständige Lösung der Bewegungsgleichung zu erhalten. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit konservativen Systemen. In diesen gilt, dass die Kraft keine Funktion der Zeit und der Geschwindigkeit ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{\text{cons.}}$$

Im folgenden Kapitel behandeln wir ausgewählte Beispiele dissipativer Systemen.

5.1 Die allgemeine lineare Bewegung

Für den allgemeinen Fall einer linearen Bewegung darf die Kraft nur eine Komponente besitzen. Die entsprechende Koordinate entspricht der einzigen Richtung, in der eine nichttriviale Bewegung erfolgt. Wir nehmen dafür im Folgenden die x -Koordinate an:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(x)\mathbf{e}_x.$$

Das Potential ergibt sich dann mittels

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx'.$$

Die Rotation dieser Kraft verschwindet ($\text{rot } \mathbf{F} = 0$). Wir erkennen weiterhin, dass die Ortskoordinate parallel zur Kraft sein muss ($\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$). Daher ist auch die Geschwindigkeit parallel zur Ortskoordinate, da eine Beschleunigung in eine andere Richtung nicht stattfinden wird ($\mathbf{r} \parallel \dot{\mathbf{r}}$). Daraus ergibt sich ein verschwindender Drehimpuls und ein verschwindendes Drehmoment ($\mathbf{L} = \mathbf{M} = 0$). Ein verschwindender Drehimpuls beschreibt gerade genau eine lineare Bewegung, etwas, von dem wir zu Beginn ausgegangen sind. Daher ist eigentlich nur die Energieerhaltung interessant.

Für die gilt

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E.$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, die zur Bestimmung der Bahnkurve gelöst werden muss. Die Bahnkurve ist hier alleine gegeben durch $x = x(t)$. Wir können diese zunächst schreiben als

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2}{m} [E - U(x)].$$

Die linke Seite der Gleichung ist immer eine positive Zahl. Für eine Bewegung selbst muss daher $E > U(x)$ gelten. Eine Bewegung in Gebieten, in welche diese Ungleichung nicht erfüllt ist, ist nicht möglich.

Beispielhaft ist das Potential und die Energie sowie einige ausgewählte Koordinaten zur weiteren Diskussion rechts zu sehen.

Erlaubte Gebiete für eine Bewegung in diesem beispielhaften Potential sind die, für die

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \text{und} \quad x_3 \leq x$$

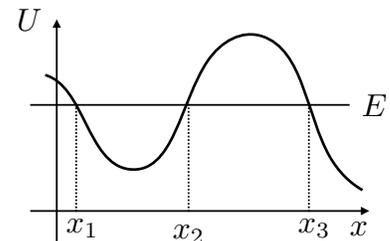
gilt.

Diese Punkte werden als Umkehrpunkte bezeichnet, da die Geschwindigkeit des Massepunktes in diesen Punkten ihr Vorzeichen ändert; die Richtung der Bewegung kehrt sich um. Dabei sind x_1 und x_2 Umkehrpunkte zwischen denen der Massepunkt eine periodische Bewegung ausüben wird. Für eine Bewegung aus dem unendlichen ($x = \infty$) würde der Massepunkt am Punkt x_3 reflektiert werden. Die Potentialbarriere zwischen x_2 und x_3 hindert den Massepunkt daran, in andere Raumgebiete zu gelangen.

Weitere charakteristische Punkte sind Ruhepunkte. Das sind Punkte im Raum, an denen keine Kraft auf den Massepunkt wirkt:

$$F = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = 0.$$

Eine Massepunkt der sich dort befindet und eine verschwindende Geschwindigkeit hat, wird für immer an diesem Punkt bleiben. Wenn die verschwindende Ableitung des Potentials zu einem Maximum gehört,



sprechen wir von einer instabilen Ruhelagen. Eine winzig kleine Störung, d.h. eine winzig kleine Auslenkung aus der Ruhelage, wird zu einer Kraft führen, die den Massepunkt von der Ruhelage wegbeschleunigt. Mit fortschreitender Zeit wird sich der Massepunkt daher von diesem Punkt entfernen. Umgangssprachlich würde man sagen, der Massepunkt rollt den Potentialberg hinab. Diese kleine Störung kann verursacht werden durch einen anderen Massepunkt, der eine Kraft ausübt, welche so klein ist, dass deren Betrachtung normalerweise nicht berücksichtigt werden braucht. Diese störende Kraft müsste explizit eine Funktion der Zeit sein, da ansonsten sie nur zu einer Verschiebung der Ruhelage führen würde. Man spricht hier von einer Rauschquelle.

Im Gegensatz dazu entspricht der Punkt, in dem die Ableitung des Potentials einem Minimum besitzt, eine stabile Ruhelage. Eine kleine Auslenkung aus der Ruhelage bewirkt eine rückstellende Kraft, welche den Massepunkt zurück zu seiner Ruhelage beschleunigt. Zeitlich veränderliche Rauschquellen haben daher keinen Einfluss und die Position des Massepunktes ist stabil. Dies ist eine wichtige Erkenntnis. Massepunkte streben immer dem Potentialminimum entgegen; sie versuchen ihre potentielle Energie zu minimieren.

Die Bewegungsgleichung leicht umgeformt ergibt

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}.$$

Beachten Sie bitte immer, wenn Sie die Wurzel ziehen kann das Vorzeichen mathematisch sowohl positiv als auch negativ sein. Erst durch physikalische Überlegungen können Sie das richtige Vorzeichen identifizieren. Wir separieren die Variablen und erhalten

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}.$$

Dies Gleichung können wir integrieren und erhalten

$$t = t(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x')]}} + \text{const..}$$

Die Energie und die obige Integrationskonstante entsprechen den beiden Konstanten die benötigt werden zur allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung, welche eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist.

Die Umkehrfunktion $x = x(t)$ der obigen Gleichung entspricht gerade genau der gesuchten Bahnkurve. Eine weitere Diskussion ohne Angabe einer konkreten Kraft bzw. des dazugehörigen Potentials ist nicht möglich. Wir werden daher im Folgenden einige wichtige Beispiele diskutieren.

5.2 Harmonischer Oszillator

Den harmonischen Oszillator diskutierten wir bereits und haben motiviert, dass er charakterisiert ist durch eine lineare Rückstellkraft mit negativem Vorzeichen, welche zu einem quadratischen Potential $U(x) = \frac{k}{2}x^2$ führt. Die Energieerhaltung liefert uns eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E$$

zur Beschreibung der Bewegung. Wir nehmen als Anfangsbedingung an, dass der Massepunkt sich in Ruhe befindet [$\dot{x}(t_0) = 0$] und sich zu diesem Zeitpunkt bei $x(t_0) = x_0 = a$ befindet. Das fixiert die Energie zu

$$E = \frac{k}{2}a^2.$$

Damit können wir Differentialgleichung lösen und erhalten

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}a^2$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2 = \frac{k}{m}(a^2 - x^2)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t(x) = \int_a^x \frac{dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \arcsin(1) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Das positive Vorzeichen ist hier gewählt worden, da die Zeit nur positive Werte annehmen sollen. Wir betrachten also eine Bewegung, die vorwärts in der Zeit abläuft. Wir haben hier auch wieder die früher bereits eingeführte charakteristische Frequenz des Oszillators benutzt. Das finale Ergebnis lautet somit

$$x = a \cos(\omega_0 t).$$

Dies ist eine zeitharmonische Bewegung um die Ruhelage. Die maximale Amplitude der Auslenkung ergibt sich dabei aus der Anfangsenergie, welche zum Schluss durch die Anfangskoordinate gegeben ist.

5.3 Freier Fall aus beliebiger Höhe

Das entsprechende Kraftgesetz haben wir bereits kennengelernt. Für die Gravitationskraft gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Wir betrachten die Kraft in Erdnähe und postulieren eine Kraft die nicht von der x - und y - Koordinate abhängt. Dieses homogene Kraftfeld ist dann nur eine Funktion der z - Koordinate und zeigt auch nur in die z -Richtung. Es gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{z^2} \mathbf{e}_z = -mg \frac{R^2}{z^2} \mathbf{e}_z$$

mit der Gravitationskonstante $g = \frac{GM}{R^2}$. Groß geschriebene Größen bezeichnen hier die Masse und den Radius der Erde. Das Potential ergibt sich aus der negativen Ableitung der Kraft zur z -Koordinate und beträgt

$$U(z) = -mg \frac{R^2}{z}.$$

Die Kraft hängt wieder nicht von der Zeit und auch nicht von der Geschwindigkeit des Massepunktes ab. Für eine solche konservative Kraft gilt wieder Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mg \frac{R^2}{z} = E.$$

Mit den Anfangsbedingungen $z(t_0) = z_0 = h$ und $\dot{z} = 0$ lässt sich die Energieerhaltung integrieren und wir erhalten als allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{z}^2 - g \frac{R^2}{z} &= -g \frac{R^2}{h} \\ t &= \pm \frac{1}{\sqrt{2gR}} \int \frac{dz'}{\sqrt{z'^{-1} - h^{-1}}} + \text{const.} \end{aligned}$$

Ohne diese Gleichung weiter lösen zu wollen, können wir einige interessante Fragen beantworten mit Hilfe des Energiesatzes. Zum Beispiel, wie groß ist die Einschlaggeschwindigkeit eines Körpers, der aus dem Unendlichen kommt $z = R$, $h = \infty$? Aus der Energieerhaltung erhalten wir

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 - g \frac{R^2}{R} = 0$$

$$\dot{z}^2 = v^2 = 2gR \rightarrow v = \sqrt{2gR} \approx 11.2 \text{ km/s.}$$

Wir können auch fragen, bei welcher Anfangsgeschwindigkeit wird ein Massepunkt die Erde verlassen können? Die Anfangsbedingung wäre hier $z_0 = z_a = h = R$ und die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit $\dot{z} = v_a$. Die Anfangsenergie wäre entsprechend

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - mgR = E_a.$$

Der Massepunkt hat das Erdfeld verlassen, wenn er unendlich weit kommt ($z_e = \infty$). Dann darf er auch eine vernachlässigbare Geschwindigkeit haben ($v_e = 0$) so dass er dann auch keine Energie mehr besitzt

$$0 - 0 = E_e.$$

Aus Energieerhaltung folgt

$$E_a = E_e$$

und wir können die notwendige Anfangsgeschwindigkeit berechnen als

$$v_a^2 = 2gR \rightarrow v_a = \sqrt{2gR}$$

Diese Geschwindigkeit wird auch als zweite kosmische Geschwindigkeit oder auch als Fluchtgeschwindigkeit bezeichnet. Die Fluchtgeschwindigkeit am Äquator für die Erde ist offensichtlich identisch zur Geschwindigkeit eines Massepunktes aus dem Unendlichen mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit.

5.4 Allgemeine Bewegung im Zentralkraftfeld

Eines der klassischen Probleme der Mechanik ist das Studium der Planetenbewegung. Dies ist ein an sich beliebig kompliziertes Problem, da im Grunde beliebig viele Himmelskörper in der Betrachtung berücksichtigt werden müssen, da sie im Zweifel alle eine endliche, wenn auch in den meisten Fällen vernachlässigbar kleine Kraft gegenseitig aufeinander ausüben. Um dieses Problem angehen zu können, müssen wir es vereinfachen. Wir müssen Annahmen treffen, die es uns erlauben, auf mathematisch einfachem Wege alle für uns relevanten observablen Phänomene korrekt zu beschreiben und vorherzusagen.

Die erste Annahme die wir treffen können ist die, dass wir uns zunächst nur auf Planeten in unserem Sonnensystem beschränken. Alle anderen Sterne und Planeten sind zu weit weg, als dass die von Ihnen verursachte Gravitationskraft einen Einfluss hätte. Weiterhin ist die Masse der Sonne ($M = 1.989 \times 10^{30}$ kg) um drei Zehnerpotenzen größer als die Masse des schwersten Planeten im Sonnensystem (Jupiter mit 1.898×10^{27} kg), so dass das Kraftfeld in dem sich die Erde ($m = 5,973 \times 10^{24}$ kg) bewegt dominiert wird durch die Sonne. In erster Näherung können daher andere Planeten vernachlässigt werden und das Problem reduziert sich auf ein Zweikörperproblem. Wie dieses Problem gelöst wird, werden wir im Laufe der Vorlesung noch diskutieren. Wir werden hier das Problem noch weiter vereinfachen und lösen das Problem unter der Annahme, dass die Masse der Erde vernachlässigbar klein ist und so keine Kraft auf die Sonne wirkt. Die Sonne ruht daher. Die Erde

selbst bewegt sich unter dem Einfluss des Kraftfeldes verursacht durch die Sonne. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

und die Kraft ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Die Kraft ist somit eine konservative Zentralkraft. Ich möchte kurz anmerken, dass eine solche Sequenz von Näherungen auch in anderen Teilgebieten der Physik wichtig ist. In der Atomphysik, wenn die Bewegung eines Elektrons um den Atomkern diskutiert wird, kann ebenfalls die Masse des Kerns als sehr viel größer angenommen werden als die des Elektrons. Dann kann die Bewegung des Elektrons um den Atomkern diskutiert werden unter dem Einfluss der (elektrostatischen) Coulombkraft. Diese Näherung wird als Born-Oppenheimer-Näherung bezeichnet.

Bevor wir das konkrete Problem der Planetenbewegung diskutieren, wollen wir allgemein die Bewegung eines Massepunktes unter dem Einfluss einer konservativen Zentralkraft diskutieren. Diese ist gegeben als

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

und ein dazugehöriges Potential kann berechnet werden mittels

$$U(r) = - \int_{r_0}^r f(r') dr'.$$

Beachten Sie bitte, wir gehen davon aus, dass das Potential im Referenzpunkt r_0 verschwindet. Falls dies nicht der Fall ist, müssten Sie den Term $U(r_0)$ noch dazu addieren. Dieser konstante Term im Potential hat aber keinerlei Einfluss, da die physikalische beobachtbare Größe, die Kraft, nur definiert ist über den negativen Gradienten des Potentials.

An dieser Stelle soll die Funktion $f(r)$ noch nicht weiter spezifiziert werden. Wir postulieren aber, dass das Potential berechnet werden kann für einen konkreten funktionellen Verlauf der Zentralkraft als Funktion der Radialkoordinate und somit als gegeben angenommen werden kann. Es gilt Energie- und Impulserhaltung. Wir haben früher bereits diskutiert, dass die Bewegung des Massepunktes in einer Ebene verläuft. Was genau können wir aber über die Bewegung aussagen? Das Problem soll im Folgenden in Polarkoordinaten beschrieben werden, welche jeden Punkt in der Ebene adressieren können.

Die Energieerhaltung gibt uns das folgende 1. Integral

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = E.$$

Aus der Drehimpulserhaltung erhalten wir

$$L = mr^2\dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

Beides ineinander eingesetzt und ausmultipliziert ergibt

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) + U(r) &= E \\ \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) &= E. \end{aligned}$$

Die drei Terme auf der linken Seite drücken drei unterschiedliche Arten von Energie aus. Der erste Term ist die Radialenergie. Sie entspricht der kinetischen Energie für eine Bewegung in radialer Richtung. Der zweite Term ist die Rotationsenergie. Und der dritte Term ist die potentielle Energie.

Die letzten beiden Terme können wir zusammenfassen zu einem effektiven Potential $U_{\text{eff}}(r)$, da beide Terme lediglich eine Funktion der Radialkoordinate sind:

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r).$$

Damit können wir die Bewegungsgleichung wieder unter Ausnutzung der Erhaltungssätze auf eine Differentialgleichung erster Ordnung reduzieren für eine Bewegung im ein-dimensionalen Raum, der Radialkoordinate als Funktion der Zeit. In dieser Koordinate sind dann alle Informationen zur genauen Bahnkurve des Massepunktes enthalten.

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E \rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r)]}.$$

Eine physikalisch sinnvolle Bewegung für den Massepunkt kann wieder nur in den Raumgebieten erfolgen, in denen das effektive Potential kleiner ist als die Energie E . Einen typischen Verlauf, wie er auch beim Gravitationspotential auftritt, ist in der Abbildung nebenan zu sehen.

Zur Diskussion der Bewegung können wir zwei charakteristische Fälle unterscheiden.

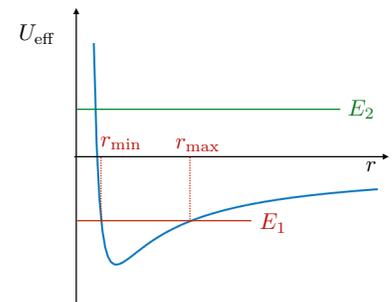
1. Energie E_1

Hier ist der erlaubte Bereich für eine Bewegung der für den gilt

$$r_{\min} < r < r_{\max},$$

Der Massepunkt wird dann eine periodische Bewegung zwischen den beiden Abständen durchführen. Aus der Forderung dass $U_{\text{eff}} \leq E$ sein soll, ergibt sich aus der Forderung

$$U_{\text{eff}} = E \rightarrow \dot{r} = 0$$



gerade genau die Definition eines Umkehrpunktes. Der Massepunkt hat dort eine verschwindende Geschwindigkeit. Im Allgemeinen wird der Massepunkt keine geschlossene Bahnkurve besitzen sondern Rosetten beschreiben. Geschlossene Bahnkurven lassen sich nur für den Spezialfall beobachten, dass das Potential entweder proportional ist zu $\frac{1}{r}$ oder proportional zu r^2 . Dann würden Ellipsen beschrieben werden.

2. Energie E_2

Für eine Energie größer als das Potential im unendlichen (hier zu null gesetzt), findet eine Bewegung im Raumgebiet

$$r_{\min} < r$$

statt. Für $E \geq U_{\text{eff}}(\infty)$ führt eine Bewegung aus dem Unendlichen unweigerlich zu einer Umkehr an dem Umkehrpunkt [$E = U_{\text{eff}}(r)$] und eine Bewegung zurück ins Unendliche¹. Im Umkehrpunkt ändert sich gerade wieder das Vorzeichen von $\frac{dr}{dt}$. Für den Fall $E = U_{\text{eff}}(\infty)$ ist die Bewegung eine Parabel. Für den Fall $E > U_{\text{eff}}(\infty)$ ist die Bewegung eine Hyperbel.

Wir wollen die Bewegungsgleichung nun integrieren. Formal erhalten wir

$$t = \int \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r')]}} + \text{const.}$$

Beachten Sie bitte, am Umkehrpunkt $U_{\text{eff}} = E$ ist zwar $\frac{dr}{dt} = 0$, dies ist aber nicht gleichbedeutend mit der Tatsache, dass der Massepunkt in Ruhe ist und keine Geschwindigkeit besitzt. Lediglich die Radialkoordinate ändert sich nicht. Der Massepunkt hat immer noch eine Winkelgeschwindigkeit.

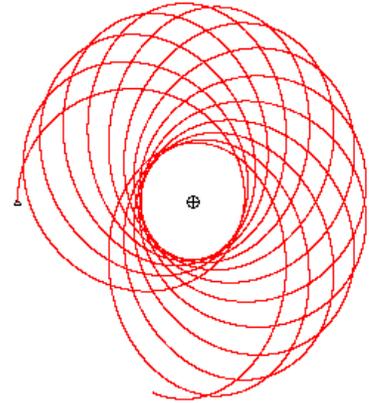
Der allgemeine Lösungsweg ist der, dass das obige Integral gelöst werden muss um explizit die Zeit als Funktion der Radialkoordinaten zu erhalten [$t(r)$]. Mit der Umkehrfunktion würde man die Radialkoordinate als Funktion der Zeit erhalten [$r(t)$] und somit (über die Drehimpulserhaltung) würde man den Winkel ϕ als Funktion der Zeit erhalten [$\phi(t)$].

Hier gehen wir einen anderen Weg und lösen explizit $\phi(r)$ um dann $r(\phi)$ zu berechnen. Dazu betrachten wir

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{L}{mr^2}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dr}{d\phi} = \dot{r} \frac{mr^2}{L} = \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r)]}$$



¹ Oder wie es Buzz Lightyear sagen würde, bis zur Unendlichkeit und darüber hinaus.

$$d\phi = \frac{L}{m} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r)]}}$$

$$\phi = \frac{L}{m} \int \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r')]}.$$

Für ein gegebenes Potential liefert uns die Lösung dieser Gleichung $\phi(r)$. Diese Gleichung kann invertiert werden, um die Bahnkurve $r(\phi)$ zu definieren. Zusammen mit der obigen Lösung von $t(r)$ bzw. $r(t)$ ist damit auch $\phi(t)$ bestimmt. Eine weitere Lösung der Gleichung ist nur möglich nach konkreter Angabe der Radialabhängigkeit der Zentralkraft. Dies werden wir im Folgenden gleich für die Planetenbewegung diskutieren.

Abschliessend sei noch kurz diskutiert, dass der Term $\frac{L^2}{2mr^2}$ im effektiven Potential, für $L \neq 0$ entscheiden dafür ist, dass der Massepunkt nicht ins Zentrum des Kraftfeldes gelangt. Dieser Term wird häufig auch als Zentrifugalenergie bezeichnet.

Der Massepunkt fällt nur dann ins Zentrum der Zentralkraft, wenn das radiale Potential für kleine Radien genügend schnell gegen $-\infty$ divergiert. Um die Anforderungen an die Schnelligkeit der Divergenz zu identifizieren, betrachten wir eine Bahnkurve für den Massepunkt, welche dem Koordinatenursprung entgegenstreben soll, $r \rightarrow 0$. Das Quadrat der Geschwindigkeit muss, damit diese physikalisch bleibt, eine positive Zahl sein, also $\dot{r}^2 > 0$. Mit dem ersten Integral der Energieerhaltung

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2} > 0$$

folgt die Forderung

$$r^2 U(r) + \frac{L^2}{2m} < Er^2.$$

In dieser Ungleichung kann r nur dann null werden, wenn

$$r^2 U(r) \Big|_{r \rightarrow 0} \leq -\frac{L^2}{2m}$$

erfüllt ist. Diese Ungleichung ist erfüllt, wenn das Potential ein negatives Vorzeichen hat und mit einer Potenz größer als -2 als Funktion der Radialkoordinate abfällt, $U(r) \propto -\frac{1}{r^n}$ mit $n > 2$. Dann strebt das Potential ausreichend schnell gegen $-\infty$. Für den Fall $n = 2$, muss das Potential einen funktionellen Zusammenhang der Form $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ mit $\alpha \geq \frac{L^2}{2m}$ besitzen, damit der Massepunkt in den Mittelpunkt des Zentralkraftfeldes stürzt.

5.5 Planetenbewegung

Wir wollen das eben diskutierte nun konkretisieren und anwenden auf den speziellen Fall der früher diskutierten Bewegung eines einzelnen Planeten unter Einwirkung der Gravitationskraft der Sonne, welche als räumlich nicht veränderlich angenommen wird. Eine vergleichbare Diskussion könnte man auch durchführen bei der Betrachtung der Bewegung eines Elektrons um den Atomkern unter Berücksichtigung der Coulombkraft. Die entsprechenden Zentralkraftfelder lauten

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -mg \frac{R^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

für die Gravitationskraft und

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \pm \frac{Ze^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

für die Coulombkraft. Im letztern Fall muss ein negatives Vorzeichen gewählt werden für den Fall, dass die Ladungen ein unterschiedliches Vorzeichen haben (wie es der Fall ist bei der Beschreibung der Bewegung eines Elektrons um den Atomkern). Prinzipiell kann die Kraft aber auch ein positives Vorzeichen besitzen, falls die beiden beteiligten Ladungen das gleiche Vorzeichen haben.

Das zugehörige Potential zur Gravitationskraft lautet

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}.$$

Das effektive Potential lautet dann

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r}$$

und die Bewegungsgleichung (1. Integral), welche sich aus Energie- und Drehimpulserhaltung ergibt, lautet

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 - G \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E.$$

Wir werden nun die früher allgemein diskutierten charakteristischen Größen genauer bestimmen.

5.5.1 Potentialminimum

Die Position des Minimum des Potentials ergibt sich aus der Forderung einer verschwindenden ersten Ableitung. Genauer gesagt, könnte dies dann auch noch ein Maximum sein. Aus dem allgemeinen funktionellen Zusammenhang wissen wir aber, dass dies ein Minimum ist:

$$\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0 \rightarrow \frac{L^2}{mr_0^3} = G \frac{mM}{r_0^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$r_0 \doteq k = \frac{L^2}{Gm^2M} \rightarrow U_{\text{eff}}(k) = -\frac{G^2m^3M^2}{2L^2} = -\frac{GmM}{2k}.$$

Die Position des Minimum des Potentials ist proportional zum Quadrat des Drehimpulses. Bei diesem Abstand besitzt der Massepunkt die größte Radialgeschwindigkeit. Eine weitere Diskussion der Bewegung des Massepunktes verlangt eine Fallunterscheidung bezüglich der Energie E .

1. $U_{\text{eff}}(k) \leq E < 0$

Diese Forderung ist identisch zu $-1 \leq \frac{2Ek}{GmM} < 0$. Der Massepunkt wird dann eine periodische Bewegung in radialer Richtung zwischen noch zu bestimmenden Umkehrpunkten durchführen. Für den extremen Fall, dass $E = U_{\text{eff}}(k)$ ist, wird $\dot{r} = 0$. Der Massepunkt besitzt dann die für eine Bewegung minimale mögliche Energie und er wird eine Kreisbewegung durchführen

2. $0 \leq E$

Der Massepunkt wird, wie früher diskutiert, eine Bewegung ins Unendliche durchführen.

5.5.2 Umkehrpunkte

Die Umkehrpunkte sind gerade definiert durch

$$U_{\text{eff}}(r_{\text{ex}}) = E$$

Mit

$$U_{\text{eff}}(r_{\text{ex}}) = \frac{L^2}{2mr_{\text{ex}}^2} - G\frac{mM}{r_{\text{ex}}} = E$$

$$\frac{1}{r_{\text{ex}}^2} - 2\frac{Gm^2M}{L^2}\frac{1}{r_{\text{ex}}} - \frac{2m}{L^2}E = 0$$

ergibt sich mit

$$k = \frac{L^2}{Gm^2M} \rightarrow \frac{2m}{L^2} = \frac{2}{kGmM}$$

die folgende Gleichung

$$\frac{1}{r_{\text{ex}}^2} - \frac{2}{k}\frac{1}{r_{\text{ex}}} - \frac{1}{k^2}\frac{2Ek}{GmM} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung aufgelöst ergibt für die Position der Umkehrpunkte

$$\frac{1}{r_{\text{ex}}} = \frac{1}{k} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2Ek}{GmM}} \right] = \frac{1}{k} (1 \pm \epsilon)$$

wo wir ϵ (die Bedeutung als Exzentrizität wird später noch deutlich) definiert haben als

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ek}{GmM}}.$$

Damit ergeben sich als explizite Koordinaten für die Umkehrpunkte

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{\min}} &= \frac{1}{k} (1 + \epsilon) & \text{und} & & \frac{1}{r_{\max}} &= \frac{1}{k} (1 - \epsilon) \\ r_{\min} &= \frac{r_0}{1 + \epsilon} & \text{und} & & r_{\max} &= \frac{r_0}{1 - \epsilon} \end{aligned}$$

Der Wert $\epsilon = 0$ wird erreicht für $E = -\frac{GmM}{2k}$, was genau der minimalen Energie entspricht, welche dem Minimum des effektiven Potentials entspricht. Wir hatten bereits diskutiert, dass der Massepunkt dann eine Kreisbahn beschreibt. Dies wird gerade auch reflektiert durch die Tatsache, dass die beiden Umkehrpunkte zusammenfallen. Eine begrenzte, periodische Bewegung wird der Massepunkt für $0 < \epsilon < 1$ beschreiben. Für $\epsilon = 1$ würde der maximale Umkehrpunkt gerade genau im unendlichen liegen. Entsprechende beschreibt der Massepunkt eine unbegrenzte Bewegung für $\epsilon \geq 1$.

5.5.3 Bewegungsgleichung

Wir wollen jetzt die eigentliche Bewegungsgleichung lösen. Wir könnten hierfür die Gleichung

$$\phi = \frac{L}{m} \int \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r')]}}$$

nehmen und lösen. Wie früher bereits angedeutet, ist das aber kompliziert und für das spezifische Problem nicht ganz günstig. Wir gehen hier einen anderen Weg und führen zunächst den reziproken Abstand s als neue Variabel ein

$$s = \frac{1}{r} \rightarrow s = s(\phi) \rightarrow r = r(\phi).$$

Der Drehimpulserhaltungssatz sagt uns wieder, dass

$$L = mr^2 \dot{\phi}.$$

Damit folgt für die partielle Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\phi} = s' &= \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\phi} = \frac{ds}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{mr^2}{L} \\ &= -\frac{1}{r^2} \dot{r} \frac{mr^2}{L} = -\frac{m}{L} \dot{r} \\ \rightarrow \dot{r} &= -\frac{L}{m} s'. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir wiederum in den Energiesatz einsetzen

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 - G \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2m} (s'^2 + s^2) - GmMs &= E \\ s'^2 + s^2 - 2 \frac{Gm^2M}{L^2} s &= \frac{2mE}{L^2} \\ s'^2 + s^2 - \frac{2}{k} s &= \frac{2mE}{L^2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung differenzieren wir nun ein weiteres Mal nach ϕ und erhalten

$$s''s' + ss' - \frac{1}{k}s' = 0 \rightarrow s'' + s - \frac{1}{k} = 0.$$

Das ist die finale Bewegungsgleichung eines Massepunktes im Gravitationsfeld. Beachten Sie bitte, dass wir im letzten Schritt streng genommen s' ausgeklammert haben, so dass $s' = 0$ ebenfalls eine Lösung der Ursprungsdifferentialgleichung ist. Diese Lösung brauchen wir aber nicht weiter zu berücksichtigen, da sie in der im Folgenden dokumentierten inhomogenen Lösung enthalten ist.

Die Lösung der obigen Differentialgleichung setzt sich aus der Lösung der inhomogenen und der homogenen Differentialgleichung zusammen

$$s(\phi) = s_{\text{inhomogen}}(\phi) + s_{\text{homogen}}(\phi).$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$s(\phi) = A \sin \phi + B \cos \phi.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$s(\phi) = \frac{1}{k}.$$

Die Gesamtlösung ist daher

$$s(\phi) = \frac{1}{k} + A \sin \phi + B \cos \phi$$

Im Folgenden müssen wir noch aus den beiden Anfangsbedingungen die beiden Integrationskonstanten A und B bestimmen. Wir legen zunächst fest, dass der Winkel $\phi = 0$ dem Winkel entspricht, welcher der Massepunkt am sonnennächsten Punkt r_{min} annimmt. Dort wird entsprechend die Funktion $s(r)$ maximal. An diesem Punkt verschwindet zunächst einmal per Definition die Änderung des inversen Abstandes als Funktion des Winkels. Beachten Sie bitte, dies gilt sowohl für eine

periodische Bewegung des Massepunktes als auch für eine Bewegung des Massepunktes aus dem unendlichen:

$$s'(0) \doteq 0 = A.$$

Wir setzen dann einfach ein und benutzen unser früheres Wissen des minimalen Abstandes

$$s(\phi = 0) \doteq \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1 + \epsilon}{k} = \frac{1}{k} + B \rightarrow B = \frac{\epsilon}{k}.$$

Für die inverse Bahnkurve bzw. die Bahnkurve ergeben sich dann die folgenden Gleichungen als finales Ergebnis

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k} (1 + \epsilon \cos \phi) \quad r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

Das ist die Gleichung für Kegelschnitte in ebenen Polarkoordinaten. Die Parameter ϵ und k sind definiert als

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ek}{GmM}} \quad \text{und} \quad k = \frac{L^2}{Gm^2M}.$$

Da die Exzentrizität ausschliesslich über die Energie bestimmt wird, bestimmt sie schlussendlich die Bahnform. Der Drehimpuls definiert hingegen den Ort der größten Geschwindigkeit ($\phi = \pi/2$). Zur Diskussion der Bahnform machen wir die folgende Fallunterscheidung.

a) $\epsilon = 0$

Wie früher diskutiert, erfolgt die Bewegung des Massepunktes dann auf einer Kreisbahn. Die Energie beträgt

$$E = -\frac{GmM}{2k} = -\frac{G^2m^3M}{2L^2}.$$

b) $0 < \epsilon < 1$

Die Bahnkurve beschreibt eine Ellipse. Die Energie kann im folgenden Intervall sich befinden

$$-\frac{GmM}{2k} < E < 0.$$

c) $\epsilon = 1$

Die Bahnkurve beschreibt eine Parabel. Die Energie muss verschwinden, $E = 0$.

d) $\epsilon > 1$ Die Bahnkurve beschreibt eine Hyperbel. Die Energie muss größer sein als null, $E > 0$.

Damit ist das Gesamtproblem gelöst. Unter Umständen möchte man jetzt lediglich noch explizit die Zeitabhängigkeit berechnen. Dazu nehmen wir die Gleichung

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2(\phi)} \rightarrow t(\phi) = \frac{m}{L} \int d\phi' r^2(\phi') + \text{const.}$$

Nach Lösen dieser Gleichung haben wir $t(\phi)$. Die Umkehrfunktion liefert dann $\phi(t)$. Diesen Ausdruck können wir dann in $r(\phi)$ einsetzen und wir haben auch einen expliziten Zusammenhang für $r(t)$.

Wir wollen im Folgenden die Bewegungsformen noch einmal genauer diskutieren. Wir konzentrieren uns auf Ellipse und Hyperbel.

a) Ellipse

Eine Ellipse beschreibt allgemein den geometrischer Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei Brennpunkten konstant (= $2a$) ist. In unserer Betrachtung befindet sich die schwere Masse in einem dieser beiden Brennpunkte. a bezeichnet hier die große Halbachse der Ellipse (die Hälfte der maximalen Ausdehnung). Die kleine Halbachse bezeichnen wir mit b . Für eine Ellipse gilt der Zusammenhang

$$b^2 = a^2 - e^2$$

mit e dem halben Abstand zwischen den beiden Brennpunkten. Der sonnennächste Punkt befindet sich bei

$$r_{\min} = r(\phi = 0) = a - e = \frac{k}{1 + \epsilon}.$$

Der sonnenfernste Punkt befindet sich bei

$$r_{\max} = r(\phi = \pi) = a + e = \frac{k}{1 - \epsilon}.$$

In beiden Gleichungen können wir k isolieren und die beiden anderen Seiten der Gleichung dann entsprechend gleichsetzen. Das führt zu einem Ausdruck für die Exzentrizität als Funktion der Größen der Ellipse

$$\epsilon = \frac{e}{a}.$$

Damit ergeben sich für einige der oben genannten Größen

$$\begin{aligned} r_{\min} &= a - e = a(1 - \epsilon) \\ b^2 &= a^2 - e^2 = a^2(1 - \epsilon)(1 + \epsilon) = a(1 + \epsilon)r_{\min} = ak. \end{aligned}$$

Daraus folgt für das Verhältnis der Halbachsen

$$\frac{b^2}{a} = (1 + \epsilon)r_{\min} \rightarrow \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{Gm^2M}$$

Wir versuchen im Folgenden die Halbachsen als Funktion von Energie und Drehimpuls auszudrücken. Dazu betrachten wir den Energiesatz bei $\phi = 0$. Wir berechnen als erstes

$$\dot{r}(\phi = 0) = \dot{r}_{\min} = -\frac{L}{m}s'(\phi = 0) = 0.$$

Der letzte Punkt ergibt sich aus der Tatsache, dass dieser Punkt r_{\min} ein Umkehrpunkt ist. Der Energiesatz lautet dann

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}_{\min}^2 - \frac{GmM}{r_{\min}} + \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} = GmM \left(\frac{k}{2r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\min}} \right)$$

da $k = \frac{L^2}{Gm^2M}$. Wir können diesen Ausdruck weiter manipulieren und erhalten so (mit $a^2 - e^2 = ak$)

$$\begin{aligned} E &= GmM \left(\frac{k - 2(a - e)}{2(a - e)^2} \right) = GmM \left(\frac{\frac{a^2 - e^2}{a} - 2(a - e)}{2(a - e)^2} \right) \\ &= GmM \left(\frac{a^2 - e^2 - 2a(a - e)}{2a(a - e)^2} \right) \\ &= -\frac{GmM}{2a}. \end{aligned}$$

Zusammen mit $\frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{Gm^2M}$ lassen sich so die große und kleine Halbachse als Funktion der Energie und des Drehimpulses berechnen mittels

$$a = -\frac{GmM}{2E} \quad \text{und} \quad b = \frac{|L|}{\sqrt{2mE}}.$$

Die große Halbachse ist also durch die Energie festgelegt, die kleine Halbachse durch Energie und Drehimpuls.

Nun wollen wir zum Schluss noch die Umlaufzeit berechnen und diese ins Verhältnis setzen mit den Längen der Halbachsen. Der Flächensatz lautete

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2m}\mathbf{L} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{1}{2m}L.$$

Separation der Variablen und integriert über die gesamte Fläche einer Ellipse ($A = \pi ab$) ergibt mit T als der Umlaufzeit

$$\begin{aligned} f = \pi ab &= \frac{LT}{2m} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi mab}{L} \\ \rightarrow \frac{T^2}{a^3} &= \left(\frac{2\pi mb}{L} \right)^2 \frac{1}{a} = \left(\frac{2\pi m}{L} \right)^2 \frac{L^2}{Gm^2M} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.} \\ \rightarrow \frac{T^2}{a^3} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Zusammengefasst werde diese mathematisch gefundenen Erkenntnisse in den Keplerschen Gesetzen:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie Kuben der großen Halbachsen.

Es bleibt anzumerken, dass historisch natürlich die Keplerschen Gesetze zuerst gefunden wurden. Aus ihnen wurde dann das Gravitationsgesetz extrahiert. Dies ist wesentlich allgemeiner und stellt damit eine höhere Ebene der Erkenntnis und Abstraktion dar.

b) Hyperbel

So wie die beiden Halbachsen charakteristisch sind für eine Ellipse, wird die Hyperbelbahn durch den Stoßparameter d und den Ablenkwinkel θ charakterisiert. Asymptotisch werden diese Bahnkurven linear, so dass ein Winkel sinnvoll definiert werden kann. Der Stoßparameter selbst bezeichnet den Abstand, in dem der Massepunkt am Zentrum ohne Ablenkung vorbeifliegen würde. Wir möchten im Folgenden beide Größen als Funktion der Energie E und des Drehimpulses ausdrücken. Ausgangspunkt ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \epsilon \cos \phi).$$

Im asymptotischen Limit, wenn $r \rightarrow \infty$ gehen soll, ist der Winkel ϕ_∞ definiert als

$$\cos \phi_\infty = -\frac{1}{\epsilon}.$$

Der Ablenkwinkel ist gerade definiert als

$$\begin{aligned} \pi - \theta &= 2(\pi - \phi_\infty) \rightarrow \frac{\theta}{2} = \phi_\infty - \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \sin(\phi_\infty - \frac{\pi}{2}) = -\cos \phi_\infty = \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Der Ablenkwinkel berechnet sich somit zu

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}.$$

Aus Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung im Unendlichen finden wir den folgenden Zusammenhang zwischen Energie und Drehimpuls

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \dot{r}_\infty^2 > 0 \\ L &= m|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = m|\mathbf{r}_\infty \times \dot{\mathbf{r}}_\infty| = md|\dot{\mathbf{r}}_\infty| \\ \rightarrow L^2 &= 2mEd^2. \end{aligned}$$

Weiterhin können wir wie bei der Ellipse durch Betrachtung des 'sonnennächsten' Punktes die folgenden Zusammenhänge finden

$$\dot{r}_{\min} = 0 \quad r_{\min} = \frac{k}{1 + \epsilon}.$$

Für die Energie gilt dort

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GmM}{r_{\min}} + \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} = GmM \left(\frac{k}{2r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\min}} \right) \\ &= GmM \left[\frac{(1 + \epsilon)^2}{2k} - \frac{1 + \epsilon}{k} \right] = -GmM \left[\frac{(1 + \epsilon)(1 - \epsilon)}{2k} \right]. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit $L^2 = 2mEd^2$ und $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{2kE}{GmM} = \frac{2L^2E}{G^2m^3M^2} = \frac{4d^2E^2}{G^2m^2M^2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - 1 = \cot^2 \frac{\theta}{2}.$$

Damit ist auch der Ablenkwinkel eindeutig durch E und L festgelegt.

Es gilt

$$d = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \quad \text{und} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \frac{GmM}{2dE}.$$

Mit diesen beiden Kenngrößen ist die Hyperbel komplett bestimmt.

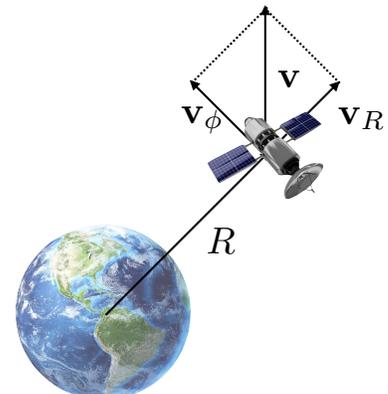
5.5.4 Kosmische Geschwindigkeiten

In Anwendung der obigen Gleichungen lassen sich abschliessend noch zwei kritische Geschwindigkeiten berechnen, welche in der Raumfahrt von großer Wichtigkeit sein. Dies sind die beiden kosmischen Geschwindigkeiten. Diese sind Mindestgeschwindigkeit tangential zur Erde, welcher ein Massepunkt (eine Rakete, ein Satellit) wenigstens besitzen muss, um auf eine kreisförmige Umlaufbahn geschickt zu werden bzw. um das Schwerefeld der Erde vollständig verlassen zu können. In den folgenden Gleichungen ist M nicht mehr die Masse der Sonne sondern die der Erde. m ist entsprechend die Masse der Rakete bzw. des Satelliten.

Wie früher diskutiert, kann ein Massepunkt alle Punkte erreichen, in denen das effektive Potential kleiner ist als die Energie. Für diese Orte gilt

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} < E.$$

Wie bereits diskutiert, hat der Drehimpuls eine abstoßende Wirkung, der dominant ist für kleine Radien. Ohne einen Drehimpuls wäre jedweder Versuch eine Rakete zu starten sinnlos, da sie unweigerlich direkt zum Massepunkt gezogen würde ohne irgendeinen Mechanismus der Abstoßung. Der notwendige Drehimpuls ist abhängig von der Entfernung R zwischen Massepunkt der Erde und dem Satelliten. Je weiter weg der Startpunkt ist, desto geringer der notwendige Drehimpuls.



Wir müssen also auf alle Fälle den Satelliten in das Raumgebiet bringen, in dem das effektive Potential kleiner ist als die Energie. Daraus ergibt sich ein Minimalanforderung

$$R < r_{\min} = \frac{k}{1 + \epsilon} = \frac{L^2}{Gm^2M} \frac{1}{1 + \epsilon} \rightarrow L^2 > Gm^2MR(1 + \epsilon).$$

Zur Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit benutzen wir den Drehimpulserhaltungssatz:

$$L^2 = m^2R^4\dot{\phi}^2 = m^2R^2v_{\phi}^2 \rightarrow v_{\phi}^2 > (1 + \epsilon)\frac{GM}{R}.$$

Wir können jetzt zwei mögliche Bewegungsformen diskutieren. Für $E < 0$ wird der Satellit eine periodische Bewegung durchführen. Er kreist um die Erde. Betrachtung dieses Falls führt zur ersten kosmische Geschwindigkeit. Für $E = 0$ erhalten wir als Lösung der Bewegungsgleichung eine Parabel. Wenn der Satellit entlang einer solchen Bahnkurve fliegt, wird er das Schwerfeld der Erde verlassen. So gelangen wir zur zweiten kosmische Geschwindigkeit. In jedem Fall ist $E \leq 0$, also

$$E = \frac{m}{2}v^2 - G\frac{mM}{R} \leq 0 \rightarrow v^2 = v_r^2 + v_{\phi}^2 \leq \frac{2GM}{R}.$$

Für die erste kosmische Geschwindigkeit soll wenigstens eine stabile Umlaufbahn in Form einer Kreisbahn erreicht werden. Diese Kreisbahn ist charakterisiert durch eine Exzentrizität von $\epsilon = 0$. Daraus folgt

$$v_{\phi}^2 > (1 + \epsilon)\frac{GM}{R} \rightarrow v_1 > \sqrt{\frac{GM}{R}} \rightarrow v_1^{\text{Erde}} = 7.9\text{km/s}.$$

Für die zweite kosmische Geschwindigkeit soll eine Parabel erreicht werden, deren Exzentrizität gerade gegeben ist als $\epsilon = 1$. Daraus folgt

$$v_{\phi}^2 > (1 + \epsilon)\frac{GM}{R} \rightarrow v_2 > \sqrt{\frac{2GM}{R}} \rightarrow v_2^{\text{Erde}} = 11.2\text{km/s}.$$

6 Diskussion der Bewegungsgleichungen II: Dissipative Systeme

Bisher haben wir die Bewegungen als idealisiert betrachtet, in der eine mögliche Umgebung nicht weiter berücksichtigt wurde. Dies wollen wir im Folgenden erweitern und eine mögliche Wechselwirkung mit der Umgebung zusätzlich noch mit berücksichtigen. Ich möchte gerne betonen, dass in diesen Betrachtungen die Umgebung natürlich nicht exakt berücksichtigt werden kann, da die Dynamik viel zu komplex wäre, als dass wir sie beschreiben könnten. Was wir aber machen werden ist eine phänomenologische Berücksichtigung in Form der Kraftwirkung, welche als zusätzliche Terme in der Bewegungsgleichungen erscheinen werden. Die Wechselwirkung mit der Umgebung wird damit durch Kräfte repräsentiert, die auf den betrachteten Massepunkt wirken und diesen in seiner Bewegung beeinflussen. Diese Kräfte werden dann, z.B. von der Geschwindigkeit des Massepunktes abhängen.

An der Stelle kommt ein intellektuell wichtiger Aspekt der theoretischen Physik ins Spiel, die Wahl der richtigen mathematischen Form dieser zusätzlichen Terme¹. Sie können an sich jeden beliebigen funktionellen Zusammenhang wählen und dann dessen Einfluss auf die möglichen Bahnkurven eines Massepunktes untersuchen. Sie haben hier alle Freiheiten. Durch Neugier getrieben können Sie gerne untersuchen, welchen Einfluss ein beliebig kompliziertes Kraftgesetz hat und was dessen Auswirkungen sind. Diese spielerische Fähigkeit macht zum großen Teil theoretische Physik aus und war die Triebfeder für immer neuere Entwicklungen². Was Sie aber natürlich immer machen müssen, ist der Vergleich dieser Vorhersagen mit experimentellen Befunden. Erst dieser Vergleich kann eine Theorie falsifizieren. Verifizieren kann ein Befund streng genommen keine Theorie, aber je mehr Experimente korrekt vorhergesagt werden, desto eher ist sie geeignet, unsere Realität zu beschreiben. Der Natur selbst ist es völlig egal, ob sie richtig oder falsch beschrieben wird. Uns muss es aber interessieren, eine theoretisches Gebilde zu haben, das möglichst einfach formuliert ist und doch aus ihr mit Hilfe mathematischer Methoden möglichst viele experimentelle Befunde beschrieben werden können. So stimulierten

¹ Dies trifft natürlich nur dann zu, wenn Sie nicht aus anderen mikroskopischeren Theorien den funktionellen Zusammenhang der Kraft bestimmen können.

² Ehrlicherweise muss gesagt werden, dass dieses Vorgehen natürlich in vielen anderen Naturwissenschaften und im Besonderen auch in der Mathematik praktiziert wird. Ein klassisches Beispiel für die Mathematik ist zum Beispiel die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie. Der Ausgangspunkt dort war einfach gewesen, dass man ein einzelnes Axiom der Geometrie anders formuliert und dann untersucht, was für Konsequenzen das hat, ob das zu irgendwelchen widersprüchlichen Aussagen führt. Im geänderten Axiom schneiden sich Parallelen im Unendliche (oder divergieren). Offensichtlich führt das zu einer widerspruchsfreien Geometrie.

Experiment und Theorie sich gegenseitig und haben zu einer permanenten Entwicklung geführt. Wir werden im Folgenden aber natürlich nicht alle Verwirrungen der Theorie dokumentieren, sondern natürlich immer nur diese Ergänzungen der Kraftgesetze diskutieren, welche die meisten experimentellen Befunde richtig beschreiben konnten.

6.1 Freier Fall mit Reibung

Wir wollen als erstes die Bewegung eines Massepunktes im homogenen Schwerfeld der Erde noch einmal diskutieren. Wir nehmen nun zusätzlich das Vorhandensein eines Gases oder eine Flüssigkeit an, in welcher sich der Massepunkt bewegt. Diese Umgebung wird immer einen Widerstand gegen die Bewegung darstellen, welche als eine geschwindigkeitsabhängige Kraft beschrieben wird. Diese folgt wie alle anderen eingepägten Kräfte aus anderen Theorien; wurde aber historisch phänomenologisch eingeführt.

Wir unterscheiden zwei Fälle. Für kleine Körper wird die Strömung, in der der Massepunkt sich bewegt, nicht verwirbeln. Man spricht von einer laminaren Strömung. Man bezeichnet diesen Fall als Stokesche Reibung. Für eine Kugel ist die entsprechende Kraft nach Stokes $F(v) = 6\pi\eta Rv \rightarrow F_{\text{diss}} \propto v$. η ist hier der materialspezifische Viskositätsparameter. Für gewöhnliche Körper bei denen es zu einer Verwirbelung der Strömung kommt, in der dieser fallen, spricht man von einer turbulenten Strömung. Bei dieser Newtonschen Reibung ist die Kraftwirkung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, $F_{\text{diss}} \propto v^2$. Hier können Sie sich bereits auf einfachem Wege motivieren, warum eine aerodynamische Form bei einem Fahrzeug so wichtig ist.

Bevor wir die beiden Fälle individuell diskutieren, wollen wir die Kraft noch einmal allgemein betrachten. Die dissipative Kraft lässt sich also beschreiben mittels

$$\mathbf{F}_{\text{diss}} = f(\dot{z})\mathbf{e}_z.$$

Für die Kraftwirkung im Medium müssen wir nicht nur die Schwerkraft betrachten sondern auch den Auftrieb. Daher beschreiben wir die Kraft als

$$\mathbf{F} = -(m - m_{\text{med}})g\mathbf{e}_z = -mg_m\mathbf{e}_z$$

mit

$$g_m = \left(1 - \frac{m_{\text{med}}}{m}\right)g = \left(1 - \frac{\rho_{\text{med}}}{\rho}\right)g.$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{z} = -mg_m + f(\dot{z})$$

mit $v = \dot{z}$ ergibt sich die zu lösende Differentialgleichung zu

$$\frac{dv}{dt} = -g_m + \frac{1}{m}f(v).$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$t = \int_0^v \frac{dv'}{-g_m + m^{-1}f(v')}.$$

6.1.1 Stokesche Reibung

Die konkrete dissipative Kraft lautet

$$f(v) = -rv.$$

Mit $\kappa = \frac{r}{m}$ berechnet sich die Zeit als Funktion der Geschwindigkeit zu

$$\begin{aligned} t &= \int_0^v \frac{dv'}{-g_m - \kappa v'} \\ &= -\frac{1}{\kappa} \ln(g_m + \kappa v') \Big|_0^v \\ &= -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{g_m + \kappa v}{g_m}\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow g_m + \kappa v = g_m e^{-\kappa t} \rightarrow v(t) = -\frac{g_m m}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right).$$

Hier können Sie auch wieder als guter Physiker die Plausibilität der Lösung in Grenzfällen untersuchen. Für eine vernachlässigbare Reibung ($r \rightarrow 0$) erhalten Sie als Grenzwert wieder genau $v(t) = -g_m t$. Sie reproduzieren die früher gefundene Geschwindigkeit als Funktion der Zeit ohne Reibung und sehen auch, dass diese unabhängig ist von der Masse.

Für eine beliebige große Zeit strebt der Massepunkt einer konstanten Fallgeschwindigkeit entgegen. Dann kompensieren sich gerade Schwerkraft, Auftrieb und Reibungskraft exakt. Diese Fallgeschwindigkeit beträgt

$$t \rightarrow \infty: v_\infty = -\frac{g_m m}{r} = -\frac{g_m}{\kappa}.$$

Die Ortskoordinate lässt sich nach nochmaliger Integration berechnen (Integrationskonstante ist die Ausgangshöhe h) zu

$$z(t) - h = \frac{g_m m^2}{r^2} - \frac{g_m m}{r} \left(t + \frac{m}{r} e^{-\frac{r}{m}t}\right).$$

6.1.2 Newtonsche Reibung

Allgemein für den Fall von Fall und Wurf lässt sich das Kraftgesetz formulieren als

$$f(v) = -qv^2 \frac{v}{|v|}.$$

Der letzte Term ist hier notwendig, um das Vorzeichen der Geschwindigkeit korrekt zu berücksichtigen. Für die für uns relevanten Situation des Falls ($v < 0$) berechnet sich die Zeit

$$t = \int_0^v \frac{dv'}{-g + m^{-1}f(v')}$$

mit $\kappa^2 = \frac{q}{mg_m}$ als

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{g_m} \int_0^v \frac{dv'}{1 - (\kappa v')^2} \\ &= -\frac{1}{2g_m} \int_0^v dv' \left(\frac{1}{1 + \kappa v'} + \frac{1}{1 - \kappa v'} \right) \\ &= -\frac{1}{2g_m \kappa} [\ln(1 + \kappa v') - \ln(1 - \kappa v')] \Big|_0^v \\ &= -\frac{1}{2g_m \kappa} \ln \left(\frac{1 + \kappa v}{1 - \kappa v} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \kappa v}{1 - \kappa v} = e^{-2g_m \kappa t}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow v(t) &= -\frac{1}{\kappa} \frac{e^{2g_m \kappa t} - 1}{e^{2g_m \kappa t} + 1} \\ v(t) &= -\frac{1}{\kappa} \tanh(g_m \kappa t) \\ &= -g_m \sqrt{\frac{m}{qg_m}} \tanh \left(\sqrt{\frac{qg_m}{m}} t \right). \end{aligned}$$

Im Grenzfall einer sehr großen Zeit ergibt sich wieder eine konstante Fallgeschwindigkeit

$$|v_\infty| = g_m \sqrt{\frac{m}{qg_m}}.$$

Nach nochmaliger Integration erhält man als Bahnkurve

$$z(t) = h - \frac{m}{q} \ln \cosh \left(\sqrt{\frac{qg_m}{m}} t \right).$$

6.2 Freier harmonischer Oszillator

Das kanonische System der theoretischen Mechanik und vieler anderer Teilgebiete der Physik ist der harmonische Oszillator. Für einen freien, eindimensionalen harmonischen Oszillator der nicht durch eine externe Kraft getrieben wird, wo sich also der Massepunkt nur unter dem Einfluss einer Rückstellkraft bewegt, welche linear ist in der Auslenkung, lässt sich das Kraftgesetz mit Stokescher Reibung schreiben als

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{cons.}} + \mathbf{F}_{\text{diss}} = -kx\mathbf{e}_x - r\dot{x}\mathbf{e}_x.$$

Allgemein lässt sich jede konservative Kraft schreiben als³

$$\mathbf{F}_{\text{cons.}} = -kx\mathbf{e}_x + k_2x^2\mathbf{e}_x \dots \approx -kx\mathbf{e}_x.$$

Der betrachtete Term ist also der niedrigste Ordnungsterm eines beliebigen Kraftfeldes in der Nähe eines stationären Fixpunktes. In diesem hat das dazugehörige Potential ein Minimum, die Kraftwirkung verschwindet also. Daher taucht in der obigen Potenzreihe kein nullter Ordnungsterm auf, der eine konstante Kraft repräsentieren würde. Aus dieser Allgemeingültigkeit erklärt sich die besondere Bedeutung des harmonischen Oszillators. Höhere Terme in dieser Entwicklung führen zu einer nichtlinearen Mechanik. Ähnlich wie in der nichtlinearen Optik, führt das zur Erzeugung höherer harmonischer Schwingungen. Hier beschränken wir uns zunächst auf die eindimensionale Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = 0.$$

Mit der Eigen- oder Resonanzfrequenz $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ und dem Dämpfungsparameter $\gamma = \frac{r}{2m}$ diskutieren wir im Folgenden Lösungen der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2x + 2\gamma\dot{x} = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Im Folgenden diskutieren wir kurz allgemeine Lösungsansätze für solche Differentialgleichungen in einem mathematischen Einschub. Wir verwenden dazu komplexe Zahlen bzw. einen komplexwertigen Lösungsansatz, weshalb wir zunächst diesbezüglich die wichtigsten Aspekte repetieren möchten.

Mathematischer Einschub (Komplexe Zahlen)

Per Definition berechnet sich die imaginäre Einheit i als

$$i \doteq \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1.$$

Die imaginäre Einheit ist damit die Lösung der Gleichung

$$x^2 + 1 = 0,$$

wobei wir hier auch $-i$ als Lösung erhalten. Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ ist charakterisiert durch einen Realteil $a = \Re(z)$ und einem Imaginärteil $b = \Im(z)$. a und b können beliebige reelle Zahlen sein. Den komplex konjugierten Ausdruck einer komplexen Zahl (oder auch einer Gleichung) erhält man durch die Ersetzung $i \rightarrow -i$. Die komplex konjugierte Zahl z^* ist daher definiert als $z^* = a - ib$.

Anstelle von Real- und Imaginärteil kann die komplexe Zahl auch mit Hilfe ihres Betrages $r^2 = |z|^2 = a^2 + b^2$ und eines Phasenwinkels $\phi = \arg(z) = \text{atan2}_{\frac{b}{a}}$ beschrieben werden. Beide Notationen können ineinander überführt werden mittels

$$z = a + ib = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Folgende Rechenregeln gelten für zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$.

a) **Addition:** $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

³Hier müsste ein mathematischer Einschub zur Taylorentwicklung hin.

b) **Multiplikation:** $z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

c) **Division:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$

Komplexe Zahlen werden im Folgenden benutzt, um die Koordinaten harmonischer Oszillationen zu beschreiben. Für eine Funktion $f(y) = \cos y + i \sin y$ mit $y \in \mathbb{R}$ berechnet sich die Ableitung zu

$$\frac{df}{dy} = -\sin y + i \cos y = if(y).$$

Das gleiche gilt für die Exponentialfunktion

$$\frac{de^{iy}}{dy} = ie^{iy}.$$

Wir können daher schreiben

$$f(y) = e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Diese letzte Gleichung wird als Eulersche Formel bezeichnet. Aus ihr ergibt sich, dass jede komplexe Zahl geschrieben werden kann als $z = re^{i\phi}$.

Die allgemeine Potenz einer komplexen Zahl berechnet sich zu $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\phi}$. Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi).$$

Dies ist der Satz von de Moivre.

Mathematischer Einschub (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

Allgemein ist eine Gleichung der Form

$$y^{(n)}(x) = f[y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), \dots, y^{(1)}(x), y(x), x]$$

eine Differentialgleichung n 'ter Ordnung. Im folgenden lassen wir die x -Abhängigkeit von y weg. Die Differentialgleichungen, welche wir hier in der theoretischen Mechanik diskutieren, sind üblicherweise Differentialgleichungen zweiter Ordnung, d.h. $n = 2$. Man spricht von einer linearen Differentialgleichung, wenn in der Differentialgleichung keine Produkte von Ableitungen auftreten. Wir können sie dann schreiben als

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{(i)}(x)y^{(i)} + b(x) = 0.$$

Eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist gerade dadurch gekennzeichnet, dass die Konstanten keine Funktion des Ortes sind, $a_i(x) = \text{const.}$. In einer homogenen Differentialgleichung ist darüber hinaus $b(x) = 0$. Die obige Gleichung für den freien harmonischen Oszillator erfüllt gerade genau alle diese Anforderungen.

Zum Lösen solcher Gleichungen verwenden wir immer einen Exponentialansatz.

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Nach einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung erhalten wir

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^{\lambda x} = 0.$$

Nichttriviale Lösungen sind nur dann möglich, wenn der Term in der Klammer null wird. Dies reduziert sich auf die Suche nach Nullstellen in einem Polynom n 'ten Grades und gibt gerade genau die n Lösungen λ_i mit $i = 1 \dots n$. Die Allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich dann als

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}.$$

Die unbekanntenen Koeffizienten c_i müssen dann aus den Anfangswerten der Differentialgleichung bestimmt werden. Daher sind auch immer n Anfangswerte notwendig zur Lösung einer Differentialgleichung n 'ter Ordnung.

Eine Besonderheit tritt auf, wenn zwei der möglichen Nullstellen identisch sind, sagen wir λ_i und λ_j . Dieser Fall verlangt eine spezielle Beachtung, da an sich die Lösung für den Beitrag zur Bewegungsgleichung entsprechend ebenfalls identisch wären. In diesem Falle wählt man einen modifizierten Lösungsansatz für die beiden Funktionen, welche

$$\tilde{y}_i(x) = c_i e^{\lambda_i x}$$

$$\tilde{y}_j(x) = c_j x e^{\lambda_j x}$$

lauten. Ein Beispiel lautet hierfür

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 6 \frac{dy(x)}{dx} + 9y(x) = 0.$$

Die entsprechende charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

Lösungen dieser Differentialgleichungen wie man durch Einsetzen sieht sind dann

$$y_1(x) = e^{3x}$$

und

$$y_2(x) = x e^{3x}.$$

Weiterführende Aussagen sollen hier nicht gemacht werden. Diese würden den Umfang dieser Vorlesung übersteigen und Sie würden mit diesem Problem im Rahmen Ihrer Mathematikausbildung auch noch einmal konfrontiert werden.

Ein einfaches physikalisches Beispiel zur Lösung einer Differentialgleichung wäre das Lösen eines harmonischen ungedämpften Oszillators. Die Differentialgleichung dazu wäre

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Wir setzen den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ in die Differentialgleichung ein und erhalten.

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) e^{\lambda t} = 0$$

Die entsprechenden Nullstellen befinden sich bei $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Die Lösung lässt sich daher schreiben als

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} = (c_1 + c_2) \cos(\omega_0 t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega_0 t).$$

c_1 und c_2 sind komplexwertige Konstanten, welche sich aus den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = v_0$ zu einem Zeitpunkt t_0 ergeben.

Die Lösungen einer inhomogenen Differentialgleichung $[b(x) \neq 0]$ setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer Partikulärlösung. Einen einfachen Weg, wie diese gefunden werden kann, kann leider nicht immer in jedem Fall angegeben werden und unter Umständen muss man diese sinnvoll erraten.

Mit dem Wissen um den Lösungsweg solcher Differentialgleichungen, benutzen wir nun einfach den Ansatz

$$x \propto e^{\lambda t}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir als Polynom

$$\lambda^2 + \omega_0^2 + 2\gamma\lambda = 0,$$

welches gelöst wird durch

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Die allgemeine Lösung für die Bewegung des harmonischen Oszillators lautet daher

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t},$$

wobei sich die beiden Koeffizienten a_1 und a_2 aus den Anfangsbedingungen ergeben. Für eine weitere Betrachtung dieser allgemeinen Lösung bietet es sich an, eine Fallunterscheidung durchzuführen. Dabei unterscheiden wir im Folgenden in Bezug auf das Argument der Wurzel, welches negativ, positiv oder gleich null sein kann. In Abhängigkeit davon werden wir qualitativ unterschiedliche Bewegungsarten beobachten.

6.2.1 Starke Dämpfung → Kriechfall

Für den Fall, dass $\omega_0^2 < \gamma^2$ ist, ist das Argument der Wurzel negativ und die Wurzel selbst eine rein imaginäre Zahl. Unter Berücksichtigung der imaginären Einheit vor der Wurzel, können wir das schreiben als

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Beide Zeitkonstanten $\lambda_{1,2}$ sind dann negativ und führen zu exponentiell abklingenden Funktion wegen der starken Reibung (Dämpfung). Die dann zu beobachtende Bewegungen sind keine Schwingungen. Unter der Annahme, dass als Anfangsbedingung

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = v$$

gelten, folgt die Bahnkurve dem folgenden funktionellen Zusammenhang

$$x(t) = \frac{v}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t\right).$$

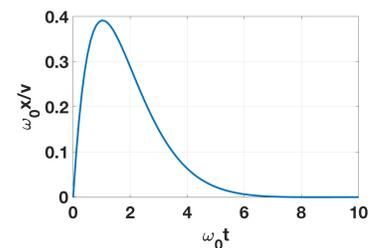
6.2.2 Mittlere Dämpfung → aperiodischer Grenzfall

Für den speziellen Fall, dass $\omega_0^2 = \gamma^2$ ist, wird das Argument der Wurzel null und beide Eigenwerte sind identisch zu

$$\lambda_{1,2} = -\gamma.$$

Durch diese doppelte Nullstelle ist neben $e^{-\gamma t}$ auch $t e^{-\gamma t}$ eine Lösung⁴. Als funktioneller Zusammenhang für die Bahnkurve ergibt sich dann

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a_1 + a_2 t).$$



⁴ Siehe Diskussion im Mathematischer Einschub zu gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Unter Annahme der gleichen Anfangsbedingungen wie im vorher betrachteten Szenario, wird die Bahnkurve beschrieben durch

$$x(t) = vte^{-\gamma t}.$$

Bei dieser Bewegung können wir ebenfalls nicht von einer Schwingung sprechen. Die Bewegung ist aperiodisch. Im Vergleich zum allgemeinen Kriechfall, kommt der Oszillator nach Auslenkung hier aber am schnellsten zur Ruhe. Das hat praktische Implikationen, zum Beispiel im Gerätebau (z.B. bei einem Tachometer, zumindest wenn Sie einen analogen benutzen. Sie möchten nicht minutenlang warten nach einer Geschwindigkeitsänderung, bis Sie diese auf Ihrem Tacho richtig deuten können; diese sollte möglichst zeitnah richtig angezeigt werden).

Obige Gleichung können wir auch aus dem folgenden Grenzfall ableiten

$$x(t) = \frac{v}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t\right)$$

$$\lim_{\gamma^2 \rightarrow \omega_0^2} \frac{\sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t\right)}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = t,$$

was obige Gleichung reproduziert.

6.2.3 Schwache Dämpfung → Schwingfall

Für den Fall, dass die Dämpfung klein ist gegenüber der Resonanzfrequenz ($\omega_0^2 > \gamma^2$), hat das Polynom zwei komplex konjugierte Wurzeln als Lösungen.

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Wieder mit den gleichen Anfangsbedingungen beschreibt der Massepunkt die folgende Bahnkurve

$$x(t) = \frac{v}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t\right).$$

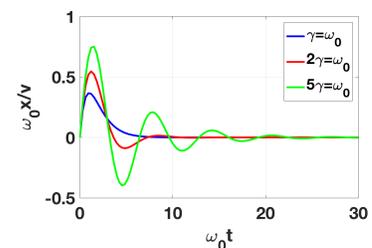
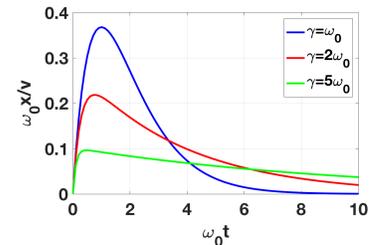
Dies ist eine harmonische Schwingung mit exponentieller Dämpfung. Die Dämpfung verschiebt dabei die Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators hin zu

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Dies ist die Frequenz, mit welcher der gedämpfte harmonische Oszillator oszilliert.

Das Verhältnis der Amplitude zweier konsekutiver maximaler Auslenkungen auf der gleichen Seite ist gegeben durch

$$D = \frac{x_n}{x_{n+2}} = e^{\gamma T}$$



mit der Schwingungsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

Dieses Verhältnis wird Dämpfungsverhältnis genannt, da es offensichtlich ein Maß für die Dämpfung ist. Die Dämpfung wird auch häufig mit Hilfe des logarithmischen Inkrement angegeben, welches definiert ist als

$$\Lambda = \ln D = \gamma T.$$

Aus Messungen von D und T lassen sich dann einfach γ und ω_0 extrahieren. Bei bekannter Masse ist dann auch r bekannt. Zur Erinnerung, dies war die Reibungskonstante berechenbar über $r = 2m\gamma$.

6.3 Getriebener Oszillator: harmonische Anregung

Wir wollen nun nicht mehr nur die Bewegung eines freien harmonischen Oszillators diskutieren, sondern zusätzlich noch berücksichtigen, dass eine zeitabhängige Kraft den Massepunkt antreibt. Diese äußere Kraft überwindet die Dämpfung und wird zu einer permanenten Bewegung führen. Die allgemeine Kraft, welche auf den Massepunkt wirkt, wird beschrieben durch das folgende Gesetz:

$$\mathbf{F}(x, t) = -kx\mathbf{e}_x - r\dot{x}\mathbf{e}_x + F(t)\mathbf{e}_x.$$

Beachten und verstehen Sie bitte die Logik hinter der Wahl des Vorzeichens jedes einzelnen Terms. Der erste Term ist die Rückstellkraft. Diese versucht den Massepunkt nach Auslenkung wieder in seiner Ruhelage zu befördern. Wird der Massepunkt in die positive Richtung ausgelenkt ($x > 0$), zeigt die Kraft die am Massepunkt angreift in die negative Richtung. Und genauso andersrum. Wird der Massepunkt in die negative Richtung ausgelenkt, muss eine Kraft an ihn angreifen, welche in die positive Richtung zeigt. Die beiden Vorzeichen heben sich auf. Der zweite Term ist die Reibung. Sie ist eine Kraft, welche dazu führt, dass die Bewegung langsamer wird. Sie muss also in die entgegengesetzte Richtung angreifen als die Richtung des Geschwindigkeitsvektors. Das Vorzeichen des letzten Terms ist eher der Konvention geschuldet und bis zu einem gewissen Masse willkürlich. Die Richtung der Kraft selbst ist im Vorzeichen der Funktion $F(t)$ enthalten.

Bevor wir die Lösung des allgemeinen Falls diskutieren, werden wir von einer zeitharmonischen Kraft ausgehen, welche geschrieben wird als

$$F(t) = F \cos(\Omega t + \theta).$$

Diese harmonische Kraft ist charakterisiert durch eine Kreisfrequenz Ω und eine spezielle Phasenverschiebung. Beide Größen bestimmen

die physikalischen Phänomene bzw. das Verhalten des Systems. Insbesondere wird aber die Differenz zwischen Resonanzfrequenz ω_0 und der Frequenz der anregenden Kraft wichtig sein. Diese Größe, $\Omega - \omega_0$, wird auch als Verschiebung oder als *detuning* bezeichnet. Dieses Modell des getriebenen harmonischen Oszillators wird Ihnen im Laufe Ihrer Physikausbildung immer wieder, auch jenseits der Mechanik begegnen. Beispielhaft sei hier die Polarisation in dielektrischen Medien genannt, welche Sie im Rahmen der Elektrodynamik kennenlernen werden.

Bevor wir irgendetwas mathematisch diskutieren, wollen wir uns noch kurz vergegenwärtigen, welche Art der Lösung wir erwarten. Von Einschwingvorgängen einmal abgesehen, welche durch die vorhandene Dämpfung nach kurzer oder langer Zeit abgeklungen sind, wird der Massepunkt mit einer periodischen Kraft angetrieben. Diese diskrete Translationsinvarianz in der Zeit überträgt sich auf den Zustand des Massepunktes. Dieser wird nach der gleichen Periode ebenfalls wieder am gleichen Raumpunkt sich befinden und besitzt die gleiche Geschwindigkeit. Er wird daher ebenfalls eine periodische Bewegung ausführen. An welchen Orten er sich genau befinden wird, ist eine Funktion aller freier Parameter des Systems. Weiterhin wird der Massepunkt bei zeitharmonischen treibenden Kraft nicht immer exakt der Anregung folgen können, sondern unter Umständen eine leicht veränderte Phasenlage besitzen. Diese Größen interessieren uns im Folgenden im Detail und wir wollen diese berechnen.

Dafür formen wir die Differentialgleichung zunächst einmal passend um und definieren $\bar{f} = \frac{F}{m}$. Wir erhalten dann für die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma \dot{x} = \bar{f} \cos(\Omega t + \theta).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (ohne den Quellterm) $x_{\text{hom}}(t)$ und einer partikulären Lösung $x_s(t)$.

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_s(t).$$

Den Grenzfall können wir uns bereits einfach überlegen. Die homogene Lösung hat eine verschwindende Lösung für sehr große Zeiten; das haben wir gerade im letzten Abschnitt beobachtet.

$$x_{\text{hom}}(t \rightarrow \infty) = 0$$

Daher muss für sehr große Zeiten die Lösung durch die partikuläre Lösung gegeben sein

$$x(t \rightarrow \infty) = x_s(t).$$

Aus der anfänglichen Überlegung, wie die Bewegung des Massepunktes im stationären Fall aussehen muss, wählen wir als Ansatz

$$x_s(t) = A \cos(\Omega t + \alpha)$$

und bestimmen im folgenden die Amplitude A und die relative Phase α , wobei uns schlussendlich nur die Phasendifferenz interessiert zwischen Kraft und Auslenkung. Das gesamte Problem lässt sich wesentlich einfach in einer komplexen Notation lösen und wir verwenden im Folgenden

$$x_s(t) = ae^{i\Omega t} \quad \text{mit} \quad a = Ae^{i\alpha}.$$

Beachten Sie bitte und das ist ganz wichtig, physikalisch beobachtbar sind immer nur reelwertige Größen. Was eine imaginäre Koordinate ist, kann ich Ihnen nicht sagen und das werden Sie sicherlich auch selbst nicht beantworten können. Daher, rechnen Sie bei solchen Problemen komplex, aber wenn Sie am Ende auf physikalisch observable Größen schlussfolgern wollen, betrachten Sie ausschliesslich den Realteil.

Sie müssen den gleichen komplexen Ansatz bei der Kraft wählen

$$\bar{f} \cos(\Omega t + \theta) \rightarrow fe^{i\Omega t} \quad \text{mit} \quad f = \bar{f}e^{i\theta}.$$

Wenn Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzen, können Sie die Zeitableitung leicht bilden und Sie erhalten

$$\left(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2\right)a = f.$$

Diese Gleichung können Sie nach a , der komplexen Amplitude der Oszillation des Massepunktes umstellen und erhalten

$$\begin{aligned} a &= \frac{f}{-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2} \\ \rightarrow Ae^{i\alpha} &= \frac{\bar{f}e^{i\theta}}{-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen können wir einfach die gesuchten Größen berechnen.

$$\begin{aligned} \rightarrow A &= \frac{\bar{f}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \\ \rightarrow \tan(\theta - \alpha) &= \tan \delta = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \end{aligned}$$

Wie wir diesen Ausdrücken für die Schwingungsamplitude und der Phasendifferenz entnehmen können, hängen beide Größen sehr empfindlich von der Wahl der treibenden Frequenz Ω relativ zur Eigenfrequenz ω_0 des Oszillators ab. Einige allgemeine Aussagen können getroffen werden.

1. Die Schwingung hat ihre maximale Amplitude in Resonanznähe. Wenn sich ω_0^2 und Ω^2 gerade genau kompensieren, ist der Nenner näherungsweise am kleinsten. Der Nenner ist exakt am kleinsten bei der Frequenz $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$.

2. Die Linienbreite der Resonanz ist proportional zur Dämpfung.
3. Für Frequenzen sehr viel kleiner als die Resonanzfrequenz, schwingt der harmonische Oszillator in Phase mit der Anregung; er kann der Anregung also folgen. Für Frequenzen sehr viel größer als die Resonanzfrequenz, schwingt der harmonische Oszillator π -außer Phase mit der Anregung.

Zum besseren Verständnis sind rechts auf dem Seitenrand sowohl die Phasendifferenz also auch die Schwingungsamplitude für verschiedene Dämpfungsparameter als Funktion der treibenden Frequenz dargestellt.

Sie erkennen an der Phase, dass für kleine Frequenzen in der Anregung der Massepunkt der treibenden Kraft folgen kann. Er oszilliert in Phase. Für größere Frequenzen kann der Massepunkt der Anregung nicht mehr folgen und er oszilliert außer Phase. Im Grenzfall oszilliert er genau π phasenverschoben. In der Resonanzfrequenz ist die Phasenverschiebung gerade genau $\pi/2$. Das ist ein generisches Verhalten aller harmonischer Oszillatoren.

Bei der eigentlichen Resonanzfrequenz $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ beträgt die Oszillationsamplitude in der Spitze

$$A_{\max} = \frac{\bar{f}}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{F}{2\gamma m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

Eine weitere charakteristische Größe ist die Linienbreite. Im Englischen wird sie häufig abgekürzt als FWHM (full width at half maximum). Sie ist die Differenz der beiden Frequenzen, bei der die Amplitude gerade auf die Hälfte ihres Maximalwertes abgeklungen ist

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \rightarrow A^2(\Omega_{1,2}) = \frac{1}{2}A^2(\Omega_r)$$

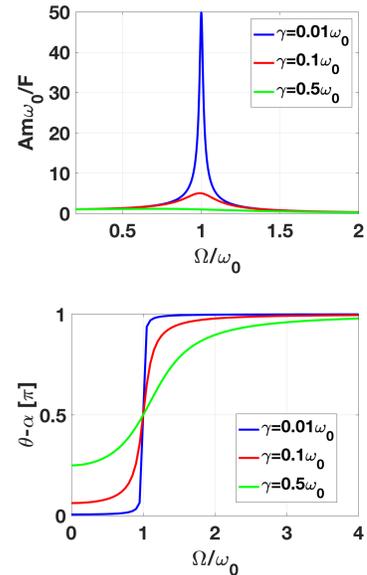
6.4 Getriebener Oszillator: beliebige Anregung

Diese einfache analytische Lösung für die Bewegung eines harmonischen Oszillators der getrieben wird von einer externen Kraft können wir aber leider nur für eine zeitliche harmonische Kraft angeben. Wie sieht es denn aber jetzt mit einer beliebigen zeitlichen Abhängigkeit aus? Hier wollen wir zwei Möglichkeiten kennenlernen.

Zum einen können wir die periodische Kraft immer in einer Fourierreihe zerlegen:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{in\Omega t}.$$

Der große Vorteil besteht darin, dass wir die Antwort des Systems auf eine beliebig zeitabhängige Kraft schreiben können als die Antwort



des Systems auf eine Summe von Kräften, die alle individuell einen zeitharmonischen Verlauf besitzen. Die Auslenkung des harmonischen Oszillators auf eine solche zeitharmonische Kraft haben wir gerade berechnet und gesehen, dass sie analytisch gut zugänglich ist. Da das Superpositionsprinzip gilt, können wir zum Schluss die Antwort des Systems auf jede der zeitharmonischen Kräfte addieren, um die Bewegung des harmonischen Oszillators in Antwort auf eine beliebig zeitabhängige Kraft vorhersagen zu können. Diesen Übergang vom Zeitbereich (die Kraft ist eine Funktion der Zeit) in den Frequenzbereich (die Kraft ist eine Funktion der Frequenz, in der obigen Gleichung charakterisiert durch den Index n) nennt man Fouriertransformation. Diese werden wir im Folgenden diskutieren.

Mathematischer Einschub (Fouriertransformation)

Die Fourier Transformation ist das mathematische Werkzeug, mit der man eine beliebige Funktion zerlegt in ein Spektrum harmonischer Schwingungen. Ausgangspunkt ist die Fourierreihenentwicklung für eine periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode a . Dies lässt sich immer schreiben mittels

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(m\frac{2\pi}{a}x\right) + B_m \sin\left(m\frac{2\pi}{a}x\right).$$

Die Fourierkoeffizienten A_m und B_m berechnen sich aus dem Überlappintegral, also der Projektion, der Funktion $f(x)$ auf die entsprechende harmonische Schwingung

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \cos\left(m\frac{2\pi}{a}x\right) \\ B_m &= \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \sin\left(m\frac{2\pi}{a}x\right). \end{aligned}$$

Alternativ kann dies auch mit Hilfe der Exponentialfunktion beschrieben werden als

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\frac{2\pi}{a}x} \\ f_m &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a dx f(x) e^{-im\frac{2\pi}{a}x}. \end{aligned}$$

Formal kann dieser Formalismus auf beliebige nichtperiodische Funktionen erweitert werden, wenn man den Grenzübergang zu einer unendlich ausgedehnten Periode geht. Dann sind die harmonischen Schwingungen nicht mehr diskret, mit der die Funktion beschrieben werden kann, sondern werden eine kontinuierliches Spektrum; dem Fourierspektrum. Formal schreibt man

$$\begin{aligned} m\frac{2\pi}{a} &\rightarrow k \\ \sum_m &\rightarrow \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \\ f_m &\rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tilde{f}(k). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \\ \tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\tilde{f}(k)$ die Fouriertransformierte von $f(x)$. Ich möchte Sie an der Stelle darauf hinweisen, dass gerade in der theoretischen Physik (aber natürlich überall) eine saubere Notation von essentieller Wichtigkeit ist. Auch wenn dies in vielen Lehrbüchern nicht so gehandhabt wird, geben Sie bitte einer physikalischen Größe im Orts-/Zeitbereich und der dazugehörigen physikalischen Größe im Frequenzbereich nicht das gleiche Formelzeichen. Ich mache dies hier einmal falsch aus pädagogischen Gründen, aber $f(k)$ sollte niemals die Fouriertransformierte von $f(x)$ sein. Wenn Sie dann noch, was Sie auch nie machen sollten, das Argument $(k)/(x)$ weglassen, haben Sie gar keine Ahnung mehr ob Sie sich mit einer Größe im Zeit-/Ortsbereich oder im Frequenzbereich befinden. Daher, seien Sie sich der physikalischen Bedeutung Ihrer Notation immer bewusst und vermeiden Sie Unklarheiten. Lernen Sie die Verwendung einer sauberen Notation vor allem jetzt in Ihrem ersten Semester. Die Erfahrung sagt, dass Sie das in späteren Jahren nicht mehr machen.

Beachten Sie bitte weiterhin, dass es bis zu einem gewissen Masse auch einen Freiheitsgrad in der Wahl des Vorfaktors der Fouriertransformationen gibt. Hier ist er mit einem $\frac{1}{2\pi}$ vor der Hintransformation angenommen wurden; verbreitet ist auch eine symmetrische Aufteilung in zwei Vorfaktoren mit jeweils dem Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ganz gleich wie Sie das wählen, wichtig ist in jedem Falle, dass Sie nach einmaligem Rundlauf (Realraum \rightarrow Fourierraum \rightarrow Realraum, d.h. $\tilde{\tilde{f}} = f$) wieder bei der identischen Funktion angekommen sind.

Es gelten folgende Rechenregeln.

$$\begin{aligned} f'(x) &\leftrightarrow ik\tilde{f}(k) \\ f^{(n)}(x) &\leftrightarrow (ik)^n \tilde{f}(k) \\ f(x-x_0) &\leftrightarrow e^{-ikx_0} \tilde{f}(k) \\ \delta(x-x_0) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{ikx_0}. \end{aligned}$$

Insbesondere aus der ersten Eigenschaft, ergeben sich die folgenden Fouriertransformationspaare für eine zeitharmonische Funktion mit dem Ansatz $e^{-i\omega t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega.$$

Mit diesem Fouriertransformationpaare können Sie Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen überführen, wenn Sie diese nicht im Realraum sondern im entsprechenden Fourierraum lösen. Dies vereinfacht Ihre Arbeit ungemein.

Mathematischer Einschub (Die δ -Distribution)

Die δ -Distribution stellt eine Erweiterung des Funktionenbegriffs auf unstetige Funktionen dar, die nicht im Riemannschen Sinne zu integrieren ist.

Die δ -Distribution ist definiert mit der folgenden Gleichung:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx'.$$

Sie ist damit ein Funktional, welche eine Funktion auf eine Zahl abbildet. Wir tasten sozusagen den Funktionswert an der Stelle x ab. Lassen Sie sich bitte nicht von der Wahl des Vorzeichens irritieren. Es gelten die folgenden Zusammenhänge, welche sich aber alle aus der obigen Definition ableiten.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x+x')dx' \\ f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(-x')dx' \\ f(-x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(-x-x')dx' \end{aligned}$$

Die explizite Angabe hier soll Ihnen helfen, später Fehler zu vermeiden.
Einige Eigenschaften:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & x \neq x' \\ \infty & x = x' \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx' = 1$$

$$\delta(x) = \delta(-x).$$

δ -Distributionen existieren ebenfalls in höheren Dimensionen.

$$\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \stackrel{!}{=} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \stackrel{!}{=} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' dz' \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') = \int_{-\infty}^{\infty} dV' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1$$

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dV'$$

Wir können diese δ -Distributionen auch anders darstellen, was unter Umständen eine Vereinfachung ist.

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dV_k e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

Die δ -Distribution kann natürlich auch in anderen Koordinatensystemen beschrieben werden. Zum Beispiel in 3D mit $\delta(r) = 0$ für $r \neq 0$ in Kugelkoordinaten und $\delta(\rho) = 0$ für $\rho \neq 0$ in Zylinderkoordinaten. Es gilt

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

in Kugelkoordinaten, da

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dV \delta(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} dr d\phi d\theta r^2 \sin\theta \delta(\mathbf{r}) \\ &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dr r^2 \delta(\mathbf{r}) \\ &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dr r^2 \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dr \delta(r) = 1. \end{aligned}$$

Alternativ kann sie auch in Zylinderkoordinaten dargestellt werden als

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho}.$$

Im Speziellen gilt in 2D:

$$\delta^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}.$$

Einige wichtige Rechenregeln mit δ -Distributionen:

- Ableitung einer δ -Distribution $\frac{\partial}{\partial x} \delta(x)$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x - x') dx' \\ &= f(x')\delta(x - x') \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x'} f(x') \delta(x - x') dx' \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} f(x). \end{aligned}$$

- δ -Distribution einer Funktion $g(x)$: $\delta [g(x)]$

$$\delta [g(x)] = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right|_{x_i}} \delta(x - x_i).$$

In dieser Gleichung bezeichnen x_i die Nullstellen der Funktion, so dass $g(x_i) = 0$ gilt. Als Beispiel mag

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

oder

$$\delta(\sin(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - n\pi)}{|\cos n\pi|} = \sum_n \delta(x - n\pi)$$

dienen.

Es ist häufig nützlich, die δ -Distribution als Grenzübergang aus stetigen Funktionen darzustellen. Zum Beispiel

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}.$$

Diese Funktion hat die Eigenschaft, dass ihr Integral immer 1 ist, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \sigma) dx = 1$ und es gilt $f(x, \sigma) = 0$ für $x \neq 0$ wenn $\sigma \rightarrow 0$. Weiterhin gilt für diesen Grenzfall:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f(x, \sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} = \delta(x).$$

Diese Funktion multipliziert mit einer beliebigen analytischen Testfunktion (mit kompaktem Träger) und über den ganzen Raum integriert, ergibt im Grenzfall den Wert der Testfunktion, dort wo die Distribution lokalisiert ist. Damit sind alle Eigenschaften der δ -Distribution erfüllt.

Kommen wir wieder zur Kraft zurück, welche wir in einer Fourierreihe zerlegt haben. Dies führt zu der folgenden Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma \dot{x} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{in\Omega t}.$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann ebenfalls in einer Reihe dargestellt werden

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} B_n e^{in\Omega t}$$

wobei sich die Amplituden entsprechend wieder mit der folgenden Gleichung berechnen lassen

$$\left(-(n\Omega)^2 + 2i\gamma(n\Omega) + \omega_0^2 \right) B_n = f_n.$$

Alles was wir gemacht haben, ist die Zerlegung einer beliebigen zeitabhängigen Funktion in harmonische Oszillationen; die Fouriertransformation. Wir haben ein lineares System in dem Superposition gilt (*lex quarta*). Das heißt, Sie können die Antwort des Systems auf jede dieser zeitharmonischen Oszillationen berechnen und dann anschliessend die individuellen Lösungen wieder aufaddieren, um so die Gesamtantwort

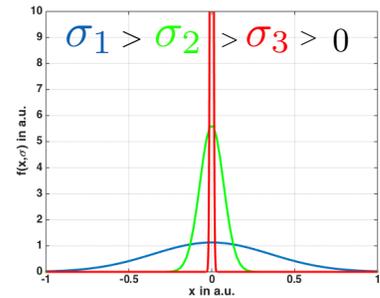


Abbildung 6.1: Gaussfunktion als Funktion des Parameters σ . Wir sehen, dass für kleiner werdende Parameter die Funktion schmäler und größer wird in ihrer Amplitude um den Koordinatenursprung. Das Integral über die gesamte x -Achse bleibt dabei immer konstant und ist normiert auf eins.

des Systems zu erhalten. Da Sie die zeitharmonische Antwort analytisch kennen, ist dieses Verfahren sehr effizient.

In dem eben geschilderten Ansatz haben Sie die beliebig zeitlich abhängige treibende Kraft in harmonische Oszillationen zerlegt, welche Sie individuell lösen konnten. Eine alternative Art der Zerlegung besteht in der individuellen Betrachtungen einer Sequenz von impulsförmigen Anregungen. Jeder Impuls entspricht dabei einem Kraftstoß, welcher in einem unendlich kleinen Zeitintervall eine Kraft ausübt, welche integral betrachtet gerade der Kraft zu einer bestimmten Zeit t entspricht. Die Antwort des Systems auf diesen Kraftstoß können Sie, und wir werden das im Folgenden machen, berechnen. Die Gesamtantwort des Systems auf eine zeitlich beliebig abhängige Kraft erhalten Sie dann wieder aus der Summe der Antworten aller individueller Kraftstöße.

Die Antwort des Systems auf diese impulsförmige (δ -förmige) Anregung⁵, wird als die Greensche Funktion bezeichnet (oder auch Green Funktion, so ganz einig ist man sich da nicht über die Notation). Ähnlich wie die Fouriertransformation findet die Idee der Greenschen Funktion eine weit verbreitete Anwendung in der Physik und sie wird Ihnen im Laufe Ihres Studiums im Kontext verschiedener Systeme immer wieder begegnen.

Im Allgemeinen wird der Steinwurf in einen See als das einfachste Bild benutzt, um den physikalischen Gehalt der Greenschen Funktion zu erklären. Bei einem Wurf mit einem Stein in einen See werden die Wasserwellen punktförmig in Zeit und Raum angeregt. Das dadurch entstehende Muster, ebenfalls eine Funktion von Raum und Zeit, ist gerade die Greensche Funktion der Gleichung, welche die Ausbreitung von Wasserwellen beschreibt. Welche Gleichung das ist, spielt hier keine Rolle. Die Greensche Funktion beschreibt einfach die Antwort des physikalischen Systems auf die Anregung. Daher wird sie auch häufig als Antwortfunktion bezeichnet. Wenn Sie jetzt eine Handvoll Kies nehmen und ins Wasser werfen, können Sie das so entstehende Wellenmuster einfach als Superposition der Greenschen Funktion beschreiben, welche Ihnen die Antwort jedes einzelnen Kieselstein gibt. Die Greenschen Funktionen müssen relativ zur entsprechenden Raum- und Zeitkoordinate superpositioniert werden, um zu akkommodieren, dass die Anregung an verschiedenen Raumpunkten und zu verschiedenen Zeiten erfolgte. Hierzu müssten Sie lediglich Ort und Zeit des Einschlages jedes Kieselsteines kennen, was an sich kein leichtes Unterfangen ist. Aber prinzipiell ist das natürlich möglich.

Beachten Sie bitte, dieses Konzept der Greenschen Funktion, ähnlich wie die Zerlegung in zeitharmonische Oszillationen, ist nur anwendbar für lineare Systeme. In denen muss das Prinzip der Superposition gelten.

⁵ Im mechanischen Sinne kann man einen Hammerschlag verstehen als eine solche punktförmige Anregung in Raum und Zeit.

Zur Bestimmung der Greenschen Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators, betrachten wir einen Kraftstoß der zunächst beschrieben wird mit Hilfe einer die δ -Distribution approximierenden Funktion. Im einfachsten Falle wählen wir dazu eine Kastenfunktion $\delta_\epsilon(t)$ definiert als

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } |t| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ strebt diese Funktion gerade genau einer δ -Distribution entgegen

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t).$$

Für eine Einheitsamplitude der Kraft und einem Stoß zum Zeitpunkt $t = t'$, lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma \dot{x} = \delta(t - t').$$

Diese Gleichung soll gelöst werden mit den Anfangsbedingungen

$$x(t'_-) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t'_-) = 0,$$

wobei $t'_- = \lim_{y \rightarrow 0} (t' - y)$ ist. Dieser Zeitpunkt bezeichnet also die Zeit unmittelbar vor dem Stoß. Der Massepunkt soll in Ruhe sein und sich am Gleichgewichtspunkt befinden. Er wird dann erst angestoßen durch den Impuls zum Zeitpunkt $t = t'$. Die Lösung dieser Gleichung ist gerade die gesuchte Greensche Funktion

$$G(t; t') \doteq x(t).$$

Beachten Sie bitte kurz die Notation. Die Greensche Funktion ist eine Funktion der Zeit (vor dem Semikolon) und hängt parametrisch vom Zeitpunkt des Stoßes ab (nach dem Semikolon).

Was wissen wir über die Greensche Funktion? Zunächst einmal muss Sie verschwinden zu allen Zeiten vor dem eigentlich Stoß

$$G(t; t') = 0 \quad \text{für } t < t'.$$

Eine solche Eigenschaft versteht man als Kausalität. Der Massepunkt kann nicht in Bewegung sein, bevor er angestoßen wird, die Ursache muss immer vor der Wirkung stattfinden.

Weiterhin gilt das Prinzip der Translationsinvarianz, hier im speziellen für die Zeittranslation. Die Greensche Funktion hängt nicht von der absoluten Zeit ab sondern nur von der Zeitdifferenz zwischen t und t' . Während Kausalität für die Greensche Funktion jedweder Art gilt, muss diese Translationsinvarianz nicht immer gelten.

Auf einer abstrakten Ebene wissen Sie, dass die Greensche Funktion eine reelwertige Funktion sein muss, da die physikalische Größe, die sie beschreibt, die Auslenkung, ebenfalls reelwertig ist. Allgemein gilt

$$D_t G(t - t') = \delta(t - t')$$

mit D_t einem beliebigen linearen Differentialoperator in der Zeit. Wir wollen uns merken, dass es zu jedem linearen Differentialoperator eine Greensche Funktion gibt. Der Differentialoperator den man wählt, ist gerade der von der DGL, welche gelöst werden möchte.

In unserem speziellen Beispiel betrachten wir also:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 + 2\gamma \frac{d}{dt} \right] G(t - t') = \delta(t - t')$$

Für $t > t'$ gilt dann aber

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 + 2\gamma \frac{d}{dt} \right] G(t - t') = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung haben wir früher diskutiert (freier, gedämpfter, harmonischer Oszillator im Schwingfall hier jetzt ohne explizite Anfangsbedingungen) und sie lautet

$$G(t - t') = e^{-\gamma(t-t')} \{ a_1 \cos [\omega(t - t')] + a_2 \sin [\omega(t - t')] \}$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Um die Konstanten der Anfangsbedingungen zu bestimmen, integrieren wir als nächstes die Bewegungsgleichung über ein infinitesimales Intervall um der Zeitpunkt $t = t'$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 + 2\gamma \frac{d}{dt} \right] G(t - t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t - t')$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dt} G(t - t') \right]_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} = 1$$

$$\rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(\epsilon) = 1.$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(-\epsilon) = 0$ ist und dass aus der Stetigkeit und Beschränktheit von $G(t)$ für $t \rightarrow t'$ folgt, dass die Terme ω_0^2 und $2\gamma \frac{d}{dt}$ keine Beiträge liefern.

Als zweite Anfangsbedingung aus der Stetigkeit der Greenschen Funktion erhalten wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\epsilon) = 0.$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten zu

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{1}{\omega}.$$

Die gesamte Greensche Funktion lautet damit

$$G(t-t') = \begin{cases} \frac{1}{\omega} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega(t-t')] & \text{für } t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

Die Auslenkung des Massepunktes in Folge einer beliebigen zeitlich abhängigen Kraft berechnet sich damit zu

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') f(t').$$

Lesen Sie diese Gleichung physikalisch! Die Greensche Funktion beschreibt die zeitlich abhängige Auslenkung nach einer impulsförmigen Anregung. Zu jedem Zeitpunkt wird diese Anregung durch die Kraft $f(t)$ beschrieben. Die Stärke ist gerade in dieser Funktion kodiert, so dass Sie die Greensche Funktion mit der entsprechenden Kraftamplitude wichten müssen, um auf die Gesamtantwort zu kommen.

7 Systeme von Massenpunkten

Bisher haben wir uns auf einen einzelnen Massepunkt in der Betrachtung beschränkt, deren Bewegung beeinflusst wird von seiner Umwelt, welche eine Kraft auf ihn ausübt. Die Ursachen dieser Kraft können vielfältiger Natur sein, spielen aber im Rahmen der Punktmechanik keinerlei Bedeutung. Wichtig ist nur, dass überhaupt eine Kraft wirkt. Dann wird, die Bewegung beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$

Diese Betrachtung kann natürlich einfach auf eine endliche Anzahl von Massenpunkten übertragen werden. In diesem Falle wird die Bewegung jedes einzelnen Massepunktes beschrieben durch das gekoppeltes System von Differentialgleichungen

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i.$$

Die Kopplung erfolgt hier durch die Kraft \mathbf{F}_i , welche allgemein eine Funktion von Ort, Zeit und Geschwindigkeit des Massepunktes i ist, aber ebenfalls von Ort und Zeit aller anderer Massepunkte $i \neq j$ abhängt. Für N Massenpunkte führt das zu einem System von $3N$ gekoppelten Differentialgleichungen.

Die philosophische Bedeutung dieser Grundgleichung besteht in der Überzeugung, dass wir beliebig komplexe Körper immer zerlegen können in eine Ansammlung von Massenpunkten. Diese repräsentieren die Masse des in kleine Volumina zerlegte Körper und deren Ortskoordinaten. Jegliche interne Dynamik in diesen kleinen Volumina wird vernachlässigt, was hinreichend genau ist, wenn die Volumina nur ausreichend klein gewählt werden. Sie müssen aber auch hinreichend groß sein, um atomare Details nicht mehr berücksichtigen zu müssen, welche unweigerlich das Versagen der Punktmechanik mit sich bringen werden. Die Eigenschaften solch kleiner Strukturen können dann nur im Rahmen der Quantenmechanik hinreichend präzise beschrieben werden.

Das Modell des Massepunktsystems hat sich insbesondere bewährt beim starren Körper. Dort wird der Körper nicht deformiert unter dem Einfluss einer Kraft und die relativen Abstände der Massenpunkte

zueinander sind fest. Für eine unendliche Anzahl von Massepunkten können wir keine diskrete Beschreibung mehr benutzen sondern müssen den Übergang zur Kontinuumsmechanik gehen, insbesondere auch dann wenn der Körper nicht mehr als starr angenommen wird. Solche Körper werden mit Hilfe einer Massendichte beschrieben, $\rho = \frac{dm}{dV}$, die eine stückweise stetige Funktion von Ort und Zeit ist und welche sich unter dem Einfluss von Kräften verändert wird. Mit solchen Systemen werden wir uns aber im Folgenden zu einem überwiegenden Teil nicht beschäftigen. Dies schmälert aber keinesfalls den Nutzen der Diskussion von Massepunktsystemen, da die Kontinuumsmechanik diskutiert werden kann durch die Diskussion geeigneter Grenzübergänge.

Nach der Definition wichtiger Begriffe, werden wir uns wieder mit dem Impulssatz, dem Energiesatz und dem Drehimpulssatz beschäftigen. Eine Konkretisierung auf zwei Körper erlaubt uns am Ende die Diskussion einiger wichtiger Anwendungen.

7.1 Definitionen

7.1.1 Freiheitsgrade

Die Anzahl der Freiheitsgrade eines Massepunktsystems wird mit f bezeichnet. f entspricht dabei der Anzahl der Koordinaten, um die Bewegung des Massepunktes zu beschreiben. Für einen Massepunkt i sind das einfach die Ortskoordinaten x_i , y_i und z_i . Für ein System aus N Massepunkten hat das Massepunktsystem somit $f = 3N$ Freiheitsgrade.

Für einen starren Körper ist die Beschreibung der Ortskoordinaten eines jeden Massepunktes aber hoffnungslos redundant. Die Beschreibung eines starren Körpers ist bereits möglich, wenn er charakterisiert wird durch die Angabe von drei nichtkollinearen Punkten. Stellen Sie sich hierunter einfach einen Würfel vor, dessen Orientierung und Ausrichtung im Raum eindeutig gegeben ist durch die Angabe von drei seiner Eckpunkte.

Aus diesen drei Punkten \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 und \mathbf{r}_3 ergeben sich nominell neun Koordinaten. Dies ist aber immer noch redundant, da wir den konstanten Abstand zwischen den Punkten noch nicht weiter berücksichtigt haben.

Die Forderungen, dass

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \text{const.} \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| = \text{const.} \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| = \text{const.}$$

gilt, reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade auf sechs. Diese sind dann drei translatorische Freiheitsgrade (wo befindet sich im absoluten Raum eine ausgewählte Zentrumsordinate) und drei rotatorische Freiheitsgrade (wie orientiert ist der starre Körper im absoluten Raum relativ zu der ausgewählten Zentrumsordinate).

7.1.2 Schwerpunkt

Der Schwerpunkt oder auch der Massenmittelpunkt (im Englischen *center of mass*) bezeichnet gerade genau diese Vorzugscoordinate, welche benutzt wird, um den Ort des Massepunktsystems zu bestimmen. Beachten Sie bitte, allgemein sind Schwerpunkt und Massenmittelpunkt zwei verschiedene Dinge. Wir definieren im Folgenden den Massenmittelpunkt. Für den Schwerpunkt muss noch die Schwerkraft berücksichtigt werden. Ein ausgedehnter Körper verspürt in einem inhomogenen Gravitationsfeld unterschiedliche Beschleunigungen in verschiedenen Teilen des Körpers. Der Schwerpunkt und Massenmittelpunkt fallen dann nicht mehr zusammen. Die Unterscheidung spielt aber im Folgenden keine Rolle für uns. Die Schwerpunktscoordinate \mathbf{r}_s berechnet sich zu

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$$

mit der Gesamtmasse des System

$$M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Damit gilt

$$M \mathbf{r}_s = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i.$$

Der Übergang zum kontinuierlichen System ist hier leicht nachvollziehbar, in dem wir die Summe in ein Integral übergehen lassen. Der Schwerpunkt eines kontinuierlichen Systems berechnet sich zu

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{\int_V \rho(\mathbf{r}) dV} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{M}.$$

7.2 Impulssatz

Wir betrachten im Folgenden die allgemeine Bewegungsgleichung für N Massepunkte

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i.$$

Dies sind $3N$ gekoppelte Gleichungen, da wir die angreifende Kraft schreiben können als

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_{ik}.$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{f}_{ik} die Kraft des Massepunkt k auf den Massepunkt i . $\mathbf{F}_i^{(a)}$ bezeichnet die Kraftwirkung der Umgebung auf den betrachteten

Massepunkt. Diese Umgebung besteht dabei aus Massepunkten die nicht explizit betrachtet werden, die also keinerlei Dynamik unterworfen sind. Die Aufteilung in System und Umgebung mag hier, und in vielen anderen Situationen, bis zu einem gewissen Grade willkürlich erscheinen. In der Praxis ist die Unterteilung häufig aber eindeutig. Die beiden Terme werden als äußere und innere Kräfte bezeichnet. Die gesamte Kraft setzt sich aus äußeren Kräften und inneren Kräften zusammen.

Weiterhin muss in der obigen Summe die Kraft \mathbf{f}_{ii} zu null gesetzt werden, da der Massepunkt auf sich selbst natürlich keine Kraft ausüben kann. Weiterhin gilt aus Gründen der Symmetrie

$$\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki}.$$

Um weitere Betrachtungen durchführen zu können, fordern wir, dass die inneren Kräfte nicht explizit zeitabhängige Zentralkräfte sind:

$$\mathbf{f}_{ik} \propto \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}.$$

Beachten Sie bitte, dies muss nicht immer der Fall sein. Es macht aber durchaus Sinn anzunehmen, dass die Kraft zwischen zwei Massepunkten immer entlang der direkten Verbindung zwischen diesen beiden Punkten angreift.

Durch Summieren der N vektoriellen Bewegungsgleichungen erhalten wir

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_i \sum_k \mathbf{f}_{ik} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}.$$

Der letzte Schritt ergibt sich eben gerade aus der Eigenschaft, dass $\mathbf{f}_{ik} + \mathbf{f}_{ki} = 0$. Mit der Definition des Gesamtimpulses

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

und der gesamt angreifenden äußeren Kraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(a)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)},$$

ergibt sich als Impulssatz

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Wir sehen hier, dass für den Fall einer verschwindenden äußeren Kraft der Gesamtimpuls erhalten bleibt:

$$\mathbf{F} = 0 \rightarrow \mathbf{p} = \text{const.}$$

Ein solches System bezeichnet man als abgeschlossen. Da aber lediglich die Summe der Einzelimpulse erhalten bleibt, führt das selbst zu

einem gekoppelten Satz an nichttrivialen Bewegungsintegralen für die einzelnen Massepunkte.

Es ist daher wesentlich hilfreicher die obige Gleichung im Sinne einer Beschreibung für die Bewegung des Schwerpunktes zu interpretieren:

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\mathbf{r}}_S \rightarrow M \ddot{\mathbf{r}}_S = \mathbf{F}.$$

Diese einzelne Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreibt die Bewegung des Schwerpunktes im resultierenden Gesamtkraftfeld. Falls keine äußeren Kräfte wirken, bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig und geradlinig. Einige weitere Aspekte wollen wir kurz verbal diskutieren:

- Diese einzelne Gleichung zur Beschreibung der Bewegung des Massenschwerpunkt, $M \ddot{\mathbf{r}}_S = \mathbf{F}$, stellt schlussendlich die Rechtfertigung dar, selbst ausgedehnte Körper als Massepunkte zu beschreiben. Bei der Beschreibung der Bewegung von ausgedehnten Objekten, reicht es völlig aus, sich auf den Massenmittelpunkt zu beschränken. Diese Konzentration auf den Massenmittelpunkt mag aber natürlich keinerlei interne Dynamik beschreiben, zum Beispiel die Rotation des Körpers.
- Die Schwerpunktbewegung ist unabhängig von inneren Kräften. Selbst bei dem ‚Zerfall‘ eines Massepunktsystems unter Wirkung der inneren Kräfte, setzt der Schwerpunkt seine Bewegung fort. Das klassische Beispiel ist hier ein in der Luft explodierendes Geschoss.
- Es sei noch einmal betont, dass die Definition was zur Umgebung und was zum System gehört bis zu einem gewissen Grade willkürlich ist. Jedes System kann so vergrößert werden, dass alle Kräfte innere Kräfte sind und umgekehrt. Mit der Vergrößerung des Systems werden sich natürlich auch seine charakteristischen Eigenschaften wie Gesamtmasse und Schwerpunkt verändern, was dann entsprechend berücksichtigt werden muss.

7.3 Energiesatz

Ausgangspunkt für den Energiesatz ist wieder die Bewegungsgleichung eines einzelnen Massepunktes unter Einwirkung der äußeren und inneren Kräfte. Anstatt über alle Massepunkte zu summieren, multiplizieren wir die Gleichung mit $\dot{\mathbf{r}}_i$ und schauen was passiert.

Aus der Bewegungsgleichung für den i 'ten Massepunkt erhalten wir

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_j \mathbf{f}_{ij} \quad | \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} T_i = \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Die Terme auf der rechten Seite entsprechen die Leistung der äußeren Kraft am Massepunkt i und die Leistung aller inneren Kräfte die am Massepunkt i angreifen. Der Term auf der linken Seite entspricht gerade der kinetischen Energie des Massepunkt i .

Summieren wir jetzt wieder über alle Massepunkt, können wir die zeitliche Änderung der gesamten kinetischen Energie berechnen.

$$\frac{d}{dt}T = \sum_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = P^{(a)} + P^{(i)} = P$$

Die Änderung der kinetischen Energie des Massepunktsystems ist gleich der Leistung aller Kräfte. Wir betrachten jetzt im folgenden innere und äußere Kräfte etwas genauer.

7.3.1 Äußere Kräfte

Die äußeren Kräfte können sowohl konservativ als auch dissipativ sein. Wir spalten daher die beiden Anteil auf

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{cons.}} + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{diss.}}$$

Für konservative Kräfte gilt

$$\text{rot}_i \mathbf{F}_i^{\text{cons.}} = 0,$$

so dass wir diese als den negativen Gradienten eines Potentials

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv U(\mathbf{r}_i)$$

schreiben können

$$\text{grad}_i U(\mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial U(\mathbf{r}_i)}{\partial z_i} \end{pmatrix}$$

so dass gilt

$$\mathbf{F} = - \sum_i \text{grad}_i U(\mathbf{r}_i) + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{diss.}}$$

Die Leistung der äußeren Kräfte berechnet sich so zu

$$P^{(a)} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = - \sum_i \text{grad}_i U(\mathbf{r}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + P^{(d)} = - \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i^j} \frac{dx_i^j}{dt} + P^{(d)},$$

Daraus folgt

$$P^{(a)} = - \sum_i \frac{dU(\mathbf{r}_i)}{dt} + P^{(d)} = - \frac{dU}{dt} + P^{(d)}.$$

7.3.2 Innere Kräfte

Wie früher bereits motiviert, gehen wir davon aus, dass die inneren Kräfte Zentralkräfte sind und nur vom Abstand der beiden Massepunkte abhängen:

$$\mathbf{f}_{ij} = f_{ij}(r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \quad \text{mit } \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$$

Dies ist eine konservative Zentralkraft, welcher wir ein Potential zuordnen können. Dieses Potential kann bestimmt werden mittels

$$u_{ij}(r_{ij}) = u_{ji}(r_{ji}) = - \int_{-\infty}^{r_{ij}} dr' f_{ij}(r')$$

Das Potential des i 'ten Massepunkt im Kraftfeld des j 'ten Massepunkt entspricht dem Potential des j 'ten Massepunkt im Kraftfeld des i 'ten Massepunkt. Das Potential kann dabei verstanden werden als die Arbeit, die geleistet werden muss, um den i 'ten Massepunkt unter Einfluss des Kraftfeldes des j 'ten Massepunktes aus dem unendlichen an seinen finalen Platz zu bewegen.

Es gilt

$$\mathbf{f}_{ij} = -\text{grad}_i u_{ij}(r_{ij})$$

und

$$\mathbf{f}_{ji} = -\text{grad}_j u_{ji}(r_{ji}) = \text{grad}_i u_{ji}(r_{ji}) = \text{grad}_i u_{ij}(r_{ij}) = -\mathbf{f}_{ij} = -\text{grad}_j u_{ij}(r_{ij})$$

da $u \propto \sqrt{(x_i - x_j)^2 + \dots}$ und der Abstand offensichtlich invariant ist gegenüber Vertauschung der Koordinaten.

Als nächstes führen wir das Gesamtpotential der inneren Kräfte ein

$$u = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j u_{ij}(r_{ij}).$$

Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ erklärt sich aus der Tatsache, dass zum Einbringen des ersten Massepunkt aus dem unendlichen auf seine abschliessende Position keine Arbeit verrichtet werden muss, da kein Kraftfeld vorhanden ist. Zum Einbringen des zweiten Massepunktes muss Arbeit verrichtet werden gegen das Kraftfeld, welches vom ersten Massepunkt erzeugt wird. Zum Einbringen des dritten Massepunktes muss Arbeit verrichtet werden gegen das Kraftfeld, welches vom ersten und vom zweiten Massepunkt erzeugt wird. Das geht dann immer so weiter. Das führt zu einem gesamten Potential der Form

$$u = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^i u_{ij}(r_{ij}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i u_{ij}(r_{ij}).$$

Der letzte Schritt folgt aus der Tatsache, dass $\mathbf{f}_{ii} = 0$ ist. Wenn Sie sich das graphisch vorstellen, summieren Sie hier über alle Einträge

einer Matrix, welche nur oberhalb der Diagonalen besetzt ist. Aus $u_{ij}(r_{ij}) = u_{ji}(r_{ji})$ folgt aber auch, dass Sie über die gesamte Matrix summieren können; nur dass Sie dann das Ergebnis noch einmal durch zwei teilen müssen. Damit kommen wir zu obiger Formel.

Was wir im folgenden beweisen möchten ist die Aussage

$$-\text{grad}_i u = \sum_j \mathbf{f}_{ij}.$$

Wir gehen dafür wie folgt vor und betrachten zunächst den Gradienten relativ zu einem Massepunkt l

$$\begin{aligned} -\text{grad}_l u &= -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left[\text{grad}_l u_{ij}(r_{ij}) \delta_{il} + \text{grad}_l u_{ij}(r_{ij}) \delta_{lj} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \text{grad}_l u_{lj}(r_{lj}) - \frac{1}{2} \sum_i \text{grad}_l u_{il}(r_{il}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \text{grad}_l u_{lj}(r_{lj}) - \frac{1}{2} \sum_j \text{grad}_l u_{jl}(r_{jl}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \text{grad}_l u_{lj}(r_{lj}) - \frac{1}{2} \sum_j \text{grad}_l u_{lj}(r_{lj}) \\ &= -\sum_j \text{grad}_l u_{lj}(r_{lj}) = \sum_j \mathbf{f}_{lj}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i -\text{grad}_i u \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\frac{du}{dt}.$$

Damit lässt sich das Gesamtpotential des konservativen Anteils des Systems U^G schreiben als Summe des externen und des internen Potentials

$$U^G = U + u = \sum_i U_i(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j u_{ij}(\mathbf{r}_{ij}).$$

Damit finden wir abschließend als Energiesatz

$$\frac{d}{dt} (T + U^G) = P^{(d)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(d)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Dabei ist zu beachten, dass der exakte Superskript von $P^{(d)}$ eigentlich $P^{(a,d)}$ wäre. Dies soll noch einmal vergegenwärtigen, dass diese die erbrachte oder verbratene Leistung (in Abhängigkeit des Vorzeichens) der äußeren dissipativen Kräfte ist. Einige abschliessende Bemerkungen zu der Gleichung noch:

- Falls keine äußeren Kräfte an das System angreifen, spricht man von einem abgeschlossenem System. Dann gilt immer Energieerhaltung, da die inneren Kräfte konservativ sind.

- Energieerhaltung gilt selbstverständlich auch, wenn die äußeren Kräfte nicht dissipativ sind.
- Wenn die äußeren Kräfte zeitabhängig sind und wir ihnen dann ein zeitabhängiges Potential zuschreiben können, gilt

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}, t) = -\text{grad}_i U(\mathbf{r}_i, t) \rightarrow \frac{d}{dt} (T + U^G) = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

7.4 Virialsatz

Bei der Bewegung von Massepunktsystemen findet permanent eine Umwandlung von kinetischer in potentieller Energie und zurück statt. Dies gilt im speziellen bei einem konservativen Kraftfeld, wo der Energiesatz lediglich eine Aussage über die Summe der beiden Energien treffen kann. Diese ständige Umwandlung ist am besten begreiflich bei der periodischen Bewegung eines Massepunktes. Der Umkehrpunkt ist gerade definiert als der Punkt, an dem der Massepunkt eine verschwindende Geschwindigkeit besitzt und mithin seine kinetische Energie null ist. Im Nulldurchgang des Potentials verschwindet gerade die potentielle Energie. In dem Zusammenhang erlaubt der Virialsatz eine Aussage darüber, wie groß diese beiden Energien im zeitlichen Mittel sind. Er gilt nur für konservative Kraftfelder, welche wir im Folgenden annehmen möchten¹.

Um den Virialsatz herzuleiten, betrachten wir die Bewegungsgleichung des i 'ten Massepunkt

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^G$$

und multiplizieren dies skalar mit \mathbf{r}_i

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^G \cdot \mathbf{r}_i.$$

Das lässt sich schreiben als

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \mathbf{F}_i^G \cdot \mathbf{r}_i.$$

Wir summieren nun über alle Massepunkte und nehmen an, dass wir der Kraft ein Potential zuschreiben können, was für konservative Kräfte immer möglich ist und erhalten

$$\sum_i \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = - \sum_i \text{grad}_i U_i^G \cdot \mathbf{r}_i.$$

Der Virialsatz bezieht sich in seiner Aussage auf zeitliche Mittelwerte, weshalb nur diese für uns interessant sind. Zeitliche Mittelwerte einer Größe $f(t)$ sind definiert als

$$\overline{f(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} f(t') dt'.$$

¹ Für nichtkonservative macht die Betrachtung des zeitlichen Mittels nicht sehr viel Sinn, da sich das natürlich ständig ändert.

Damit folgt für den ersten Term der obigen Gleichung

$$\begin{aligned} \overline{\sum_i \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i)} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \sum_i \frac{d}{dt'} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) dt' \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i \Big|_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}}. \end{aligned}$$

Für endliche Bewegungen, solche welche beschränkt bleiben, welche wir im folgenden annehmen möchten, bleiben sowohl \mathbf{r}_i also auch $\dot{\mathbf{r}}_i$ endlich selbst für den Fall $t \rightarrow \infty$. Daher geht das zeitliche Mittel dieses Termes gegen null.

Wir erhalten so als Virialsatz

$$\overline{\sum_i \left(\frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right)} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \text{grad}_i U_i^G \cdot \mathbf{r}_i}.$$

Der zeitlicher Mittelwert der kinetischen Energie ist gerade das halbe Virial des Massenpunktesystems:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \text{grad}_i U_i^G \cdot \mathbf{r}_i}.$$

Es gibt einige Spezialfälle, welche wir kurz diskutieren möchten.

1. Harmonischer Oszillator

Für einen harmonischen Oszillator ist das Potential eine homogene Funktion zweiten Grades, $U \propto \mathbf{r}_i^2$. Nach dem Eulerschen Theorem über homogene Funktionen gilt dann gerade

$$\sum_i \text{grad}_i U_i^G \cdot \mathbf{r}_i = 2U.$$

Daher ist für einen harmonischen Oszillator die mittlere kinetische und potentielle Energie gerade gleich groß.

2. Zentralkraftfeld, Gravitationsfeld

Wir gehen hier davon aus, dass wir uns in einem Gravitationsfeld mit einem geeigneten effektiven Potential befinden, so dass die Massepunkte eine endliche (oszillatorische) Bewegung durchführen. Dann kann man folgende Argumentationskette für das Potential aufstellen

$$U \propto \frac{1}{r} \rightarrow \text{grad } U \propto \frac{\mathbf{r}}{r^3} \rightarrow \text{grad } U \cdot \mathbf{r} \propto \frac{1}{r} \rightarrow -U.$$

Damit ist die mittlere kinetische Energie gerade genau

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{U} \rightarrow 2\bar{T} = -\bar{U} \rightarrow E = -\bar{T}.$$

Ist die Gesamtenergie kleiner als null (Voraussetzung für endliche Bewegung), entspricht der Betrag der Energie gerade dem negativen Mittelwert der kinetischen Energie.

Abschliessend möchten wir noch einmal die ausgezeichnete Rolle des Schwerpunktes diskutieren, welcher ein Bezugssystem definiert. Darüber hinaus spielt der Schwerpunkt auch physikalisch eine ausgezeichnete Rolle.

Zur Erinnerung, der Schwerpunkt berechnet sich als

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad \text{mit } M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

An Stelle eines absoluten Koordinatensystems können wir den Bezugspunkt aber auch in der Schwerpunkt legen. Die absoluten Koordinaten (ungestrichene Größen) und die Koordinaten im Schwerpunktsystem hängen dann zusammen über

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_s + \mathbf{r}'_i.$$

Damit ergibt sich für die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_s + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 \\ &= \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_s^2 + \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + m_i \dot{\mathbf{r}}_s \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i \right) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_s^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + \dot{\mathbf{r}}_s \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_s^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + M \dot{\mathbf{r}}_s \cdot \dot{\mathbf{r}}'_s \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_s^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 = T_s + T' \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist nur möglich, wenn wir als Bezugspunkt den Massenmittelpunkt des Massepunktsystems wählen, denn dann gilt $\dot{\mathbf{r}}'_s = 0$. Die kinetische Energie des Gesamtsystems besteht aus der Summe der kinetischen Energie der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse und der kinetische Energie der einzelnen Massepunkte relativ zum Schwerpunkt. Daher ist eine Beschreibung der Bewegung relativ zu der Schwerpunktkoordinate vorteilhaft und sollte gewählt werden, da dann diese zusätzlichen Terme nicht weiter beachtet werden müssen.

Die Betrachtungen sollen am Beispiel der reduzierten Masse beim Zweikörperproblem diskutiert werden. Wir möchten also, an Stelle der kinetischen Energie der Einzelsystems, die kinetische Energie schreiben als Summe der kinetische Energie der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse und der kinetische Energie der einzelnen Massepunkte relativ zum Schwerpunkt. Die kinetische Energie unter Berücksichtigung jeder einzelnen Koordinate berechnet sich als

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2.$$

Der Schwerpunkt befindet sich bei

$$\mathbf{r}_s = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Seine Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}.$$

Zur Beschreibung der Relativbewegung, führen wir zunächst den Vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

ein. Mit diesem möchten wir explizit \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 bzw. ihre Geschwindigkeiten ausdrücken, um dann abschliessend die kinetische Energie mit \mathbf{r}_s und \mathbf{r} bzw. ihren Geschwindigkeiten auszudrücken.

Wir stellen dazu die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems geeignet um und setzen dann \mathbf{r}_2 ein.

$$(m_1 + m_2) \dot{\mathbf{r}}_s = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}).$$

Umgestellt nach $\dot{\mathbf{r}}_1$ ergibt das

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}.$$

Analog für $\dot{\mathbf{r}}_2$ ergibt das

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}.$$

Eingesetzt in den Ausdruck für die kinetische Energie erhalten wir

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\mathbf{r}}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\mathbf{r}}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_s^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_s^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 \end{aligned}$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Das ist gerade genau die kinetische Energie des Schwerpunktes und die kinetische Energie der Relativbewegung der beiden Massepunkte. Wir können die Energie zerlegen in diese beiden Anteile.

7.5 Drehimpulssatz

Wir gehen im Folgenden wieder davon aus, dass die inneren Kräfte Zentralkräfte sind. Der Drehimpuls jedes einzelnen Massepunkt i berechnet sich mittels

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Der Gesamtdrehimpuls ist die Summe der einzelnen Drehimpulse

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i.$$

Genau das gleiche gilt für das Drehmoment und das Gesamtdrehmoment

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

und

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i.$$

Um zu einer Bilanzgleichung zu gelangen, welche die zeitliche Änderung des gesamten Drehimpulses mit dem gesamten Drehmoment in Verbindung setzt, folgen wir unserem früheren Ansatz und multiplizieren zunächst die Bewegungsgleichung jedes einzelnen Massepunktes von links mit $\mathbf{r}_i \times$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{p}_i &= \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{f}_{ik} \quad | \mathbf{r}_i \times \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_i &= \mathbf{M}_i + \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik}. \end{aligned}$$

Summation über alle Massepunkte ergibt

$$\sum_i \frac{d}{dt} \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{M}_i + \sum_i \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik}.$$

Den letzten Term betrachten wir individuell und sehen

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik} &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ki}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik} - \mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{f}_{ik}. \end{aligned}$$

Unter der oben getroffenen Annahme, dass die inneren Kräfte Zentralkräfte sind, gilt

$$\frac{\mathbf{f}_{ik}}{|\mathbf{f}_{ik}|} \propto \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}.$$

Dann muss offensichtlich der letzte Term verschwinden

$$\sum_i \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik} = 0.$$

Folgerichtig muss gelten

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M}.$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines Massenpunktsystems ist gleich dem Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte, unter der Annahme dass die inneren Kräfte Zentralkräfte sind. Wirken keine äußeren Drehmomente, bleibt der Drehimpuls erhalten. Für ein abgeschlossenes System (keine äußeren Kräfte, $\mathbf{F} = 0$) gilt Drehimpulserhaltung.

Dies sind drei erste Integrale der Bewegungsgleichung. Bei Drehung um eine feste Achse, z.B. um die z-Achse, spezifiziert sich diese Gleichung zu

$$L_z = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\phi}_i.$$

Falls $M_z = 0$, ist dies eine Erhaltungsgröße und konstant

$$M_z = 0 \rightarrow \sum_i m_i r_i^2 \dot{\phi}_i = \text{const.}$$

Bei einem starren Körper lässt sich die Gleichung noch einmal vereinfachen, da dort alle Massepunkte die gleiche Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_i = \omega \forall i$ besitzen. Dann können wir mit dem Trägheitsmoment $\Theta = \sum_i m_i r_i^2$ den Drehimpuls schreiben als

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \Theta \omega.$$

Im Kontinuum berechnet sich das Trägheitsmoment eines starren Körpers zu

$$\Theta = \int dmr^2 = \int dV \rho(\mathbf{r}) r^2.$$

Auch der Drehimpuls ist abhängig vom Bezugssystem, welches wir im Folgenden noch einmal diskutieren möchten. Wir betrachten dazu ein beliebiges Koordinatensystem, in welchem die Position der Massepunkte mit gestrichelten Koordinaten beschrieben wird. Das Koordinatensystem ist verschoben um den Vektor \mathbf{r}_0 . Wir werden später wieder sehen, dass für eine geeignet gewählte Verschiebung, nämlich genau in den Massenschwerpunkt ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_s$), die mathematischen Gleichungen wieder eine sehr einfache Form annehmen. Wir wollen im Folgenden gerade den Zusammenhang zwischen \mathbf{L} und \mathbf{L}' herstellen. Wir unterscheiden im Folgenden einen ruhenden Schwerpunkt und einen bewegten Schwerpunkt.

- $\dot{\mathbf{r}}_0 = 0$

Hier wird nur der Nullpunkt des Bezugssystems verschoben, z.B. in das Schwerpunktsystem. Der Schwerpunkt selbst soll aber ruhend sein. Das Massepunktsystem führt keine translatorische Bewegung aus. Dann gilt

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}}_i \\
&= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{r}_0 \times \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\
\mathbf{L}' &= \mathbf{L} - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} \text{ für } \mathbf{p} = 0 \vee \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{p}$$

Wenn der Schwerpunkt ruht, ist das Drehmoment unabhängig vom gewählten Bezugspunkt.

- $\dot{\mathbf{r}}_0 \neq 0$

Wiederholen wir die Betrachtung für ein sich bewegendes Bezugssystem.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}' &= \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i) \\
&= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0) \\
&= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) - \mathbf{r}_0 \times \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_0) + \sum_i m_i (\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0) \\
\mathbf{L}' &= \mathbf{L} - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p} - M (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}}_0.
\end{aligned}$$

Dies ist ein komplizierter Ausdruck. Er vereinfacht sich nur, wenn $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_0$ gewählt wird. In diesem Fall reduziert sich das Drehmoment zu

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}$$

was genau das gleiche Ergebnis ist wie im Fall eines ruhenden Bezugssystem.

Um das Drehmoment in beiden Koordinatensystemen in Verbindung zu bringen, müssen wir zunächst die zeitliche Änderung des Drehimpulses berechnen.

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \dot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{p} - \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}} - M (\dot{\mathbf{r}}_s - \dot{\mathbf{r}}_0) \times \dot{\mathbf{r}}_0 - M (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0) \times \ddot{\mathbf{r}}_0.$$

Der Term $-M (\dot{\mathbf{r}}_s - \dot{\mathbf{r}}_0) \times \dot{\mathbf{r}}_0$ entspricht gerade genau $-\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{r}}_0$, so dass er sich mit dem zweiten Term aufhebt und wir erhalten

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}} - M (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0) \times \ddot{\mathbf{r}}_0.$$

Das Gesamtdrehmoment berechnet sich zu

$$\mathbf{M}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i \\
&= \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.
\end{aligned}$$

Wir fassen die beiden Gleichungen zusammen und erhalten so

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}' - M(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0) \times \ddot{\mathbf{r}}_0.$$

Für die beiden Spezialfälle eines nichtbeschleunigten Bezugssystem reduziert sich die Gleichung auf

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0 \rightarrow \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'$$

oder aber dass das Schwerpunktsystem als Bezugssystem gewählt wurde

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_s \rightarrow \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'$$

7.6 Zwei-Körper-Probleme

Wir wollen abschliessend die Bewegungsgleichungen noch einmal für ein zwei-Körper-Problem konkretisieren und auf das Kepler-Problem anwenden.

Zur Erinnerung, beim Zwei-Körper-Problem haben wir die kinetischen Energie geschrieben als die kinetische Energie des Massenschwerpunktes und der Relativkoordinate mit der reduzierten Masse

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_s^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Die Geschwindigkeiten der beiden Massepunkte berechnen sich mit Hilfe der Schwerpunktskoordinate und der Relativkoordinate als

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_1 &= \dot{\mathbf{r}}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \\
\dot{\mathbf{r}}_2 &= \dot{\mathbf{r}}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$

Dieses zwei-Körper-Problem ist gerade charakterisiert durch sechs Bewegungsgleichungen für sechs Freiheitsgrade, was Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind. Integriert haben diese zwölf Konstanten. Für ein abgeschlossenes System liefern die Erhaltungssätze von Energie, Impuls und Drehimpuls insgesamt 10 dieser Konstanten. Das

sind die Energie, die drei Ortskomponenten des Schwerpunktes, die drei Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes und die drei Komponenten des Drehimpuls. Für das zwei-Körper-Problem lassen sich die übrigen zwei Konstanten noch relativ gut bestimmen, für ein drei-Körper-Problem mit dann 8 fehlenden Konstanten ist dies auf analytischem Wege und ohne das Vorhandensein zusätzlicher Symmetrien nicht mehr möglich.

Die Lösung des zwei-Körper-Problems wollen wir konkret diskutieren am Kepler-Problem (Planetenbewegung). Bei ausschliesslicher Betrachtung der Wechselwirkung zweier Massepunkte gibt es nur innere Kräfte. Wir betrachten die Gravitationskraft, was eine Zentralkraft ist. Für die Bewegungsgleichung der Schwerpunktkoordinate gilt dann

$$M\ddot{\mathbf{r}}_S = 0.$$

Wenn wir ein Inertialsystem als Bezugssystem wählen, in dem die Schwerpunktskoodinate den Ursprung bildet, $\mathbf{r}_S = 0$, dann gilt $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$.

Das Gravitationspotential ist gegeben durch

$$u_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Der Gradient der Funktion $\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ relativ zur Koordinate 1 berechnet sich als

$$\text{grad}_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Der Gradient relativ zur zweiten Koordinate beträgt

$$\text{grad}_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Die Kraft, welche die beiden Massepunkte gegenseitig aufeinander ausüben beträgt

$$\mathbf{f}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{f}_{21}$$

Die Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate lautet dann

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ &= -G \frac{1}{m_1} m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} - G \frac{1}{m_2} m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -G \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -G \frac{1}{\mu} \mu (m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ \rightarrow \mu \ddot{\mathbf{r}} &= -G \mu (m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Das ist nichts weiter als die Bewegung eines Massepunktes mit der Masse μ im Feld eines Zentralkörpers mit der Masse $m_1 + m_2$. Unter der Annahme, dass eine der Massen sehr viel größer ist als die andere, entspricht die reduzierte Masse gerade der Masse des leichteren Körpers und die Masse des Zentralkörpers ist gerade die Masse des schwereren Körpers. Genau diesen Situation haben wir ausführlich früher diskutiert. Die Lösungen damals waren Kegelschnitte, diesmal für \mathbf{r} . Da die Absolutkoordinaten der beiden Massepunkte gerade gegeben sind durch

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r},$$

ergeben sich für die Bewegung dieser Massepunkte ebenfalls Kegelschnitte. Geometrisch sind sie ähnliche Bahnen; halt nur gewichtet mit den entsprechenden Massen. Es gilt

$$\left| \frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} \right| = \frac{m_2}{m_1}.$$

Für $m_2 \gg m_1$ folgt $|\mathbf{r}_2| \approx 0$. Die schwere Masse verharret damit im Schwerpunkt.

Laut den Keplerschen Gesetzen erfolgt die Bewegungen der beiden Massepunkte auf Ellipsen mit einer konstanten Flächengeschwindigkeit. Die Umlaufzeit beträgt

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 = \frac{4\pi^2}{Gm_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} a^3.$$

Das dritte Keplersche Gesetz lautet dann

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}.$$

Wir haben hier im Verhältnis also noch eine kleine Korrektur, welche der Masse des Planeten m_1 abhängig ist.