

Vorlesung Mechanik A

WINTERSEMESTER 2021/22

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

GEHALTEN VON

PROF. DR. M. M. MÜHLEITNER

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Literaturauswahl	1
1.2	Was ist theoretische Physik?	2
1.3	Mechanik	3
2	Kinematik	7
2.1	Mathematischer Einschub	7
2.1.1	Vektoren	7
2.1.2	Differentialrechnung	11
2.2	Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung	14
2.3	Koordinatensysteme	16
2.3.1	Natürliche Koordinaten	17
2.3.2	Matrizen	20
2.3.3	Drehungen	23
2.3.4	Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten	28
2.3.5	Kugelkoordinaten	33
2.4	Beispielaufgaben	36
2.4.1	Kreisbewegung	36
2.4.2	Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit	37
2.4.3	Bewegung mit konstanter Beschleunigung	37
2.4.4	Grundbegriffe	38
3	Die Newtonschen Axiome	43
3.1	Kraft und Masse	44
3.2	Lex Prima - Das Trägheitsgesetz	46
3.3	Lex Secunda - Aktionsprinzip	47
3.4	Lex Tertia - das Wechselwirkungsprinzip, actio = reactio	48
3.5	Superpositionsprinzip	48
3.6	Mathematischer Einschub - Differentialgleichungen	49
3.7	Inertialsysteme und Galilei-Transformation	50
4	Beschleunigte Bezugssysteme Scheinkräfte	53
4.1	Die Scheinkräfte	57
4.1.1	Die Translationskraft	57
4.1.2	Die Zentrifugalkraft	57
4.1.3	Die Corioliskraft	58
4.1.4	Die Azimutalkraft	58

5	Erhaltungssätze	59
5.1	Mathematischer Einschub: Vektoralgebra	59
5.1.1	Gradient	59
5.1.2	Divergenz	60
5.1.3	Rotation	61
5.1.4	Jacobi-Determinante	61
5.2	Impulserhaltung	62
5.3	Energieerhaltung	63
5.4	Konservative Kraftfelder	64
5.5	Drehimpulserhaltung	67
6	Der harmonische Oszillator	69
6.1	Mathematischer Einschub: Komplexe Zahlen	71
6.2	Freier harmonischer Oszillator	73
6.3	Harmonischer Oszillator mit Reibung	73
6.3.1	Schwache Dämpfung - Schwingfall	74
6.3.2	Starke Dämpfung - Kriechfall	75
6.3.3	Mittlere Dämpfung - Aperiodischer Grenzfall	76
6.4	Erzwungene Schwingungen	77
6.5	Harmonische Anregung	77
6.6	Beliebige Anregung	79
6.6.1	Lösung durch Fourierzerlegung	80
6.6.2	Mathematischer Einschub: Die δ -Distribution	81
6.6.3	Lösung bei beliebiger Anregung	82
7	Zweiteilchensysteme (mit Zentralkraft)	85
7.1	Schwerpunkt- und Relativkoordinaten	85
7.2	Bahnkurven	89
7.3	Mathematischer Einschub: Ellipse und Hyperbel	93
7.4	Die Kepler Gesetze	96
A	Die Fouriertransformation	97
B	Die δ-Distribution	101

Kapitel 1

Einleitung

Disclaimer-1: Dieser Vorlesungsaufschrieb erhebt keinen Anspruch auf Fehlerfreiheit.

Disclaimer-2: Auch ich erfinde das Rad nicht noch einmal neu. Das heißt, dass ich mich bei meinem Vorlesungsaufschrieb an vorhandenen Aufschrieben orientiert habe. Insbesondere habe ich auf einen Aufschrieb zur Vorlesung von Prof. Dr. M. Steinhauser und Dr. L. Mihaila aus dem WS07/08 und auf das Skript von Prof. Dr. C. Rockstuhl aus dem WS16/17 zurückgegriffen.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung, zum Übungsbetrieb und zu den Klausuren sowie die Übungsblätter und das Skript finden Sie auf ILIAS.

1.1 Literatúrauswahl

Physik

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1&2, Klassische Mechanik*, Springer Verlag.

Relativ großes Gewicht auf das Einüben von Formalismen, weniger auf die ausführliche Diskussion des physikalischen Gehaltes; Herleitungen oft im Detail durchgeführt; Darstellung ist fast immer klar; viele gute Übungsaufgaben mit Lösungen und Kontrollfragen; 1. Band enthält eine recht ausführliche Wiederholung der relevanten mathematischen Methoden; moderne Themen wie Integrierbarkeit und Chaos nicht enthalten; relativistische Mechanik findet sich in Band 4.

- H. Goldstein, C.P. Poole Jr., J.L. Safko, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH.

Im Vergleich zu Nolting mehr Gewicht auf Diskussion, weniger auf mathematische Zwischenschritte; neue Auflage enthält Chaos und numerische (computer-gestützte) Übungsaufgaben; Buch ist geeignet für Studierende, die sich den Stoff selbst erarbeiten.

- L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, I, Mechanik*, Verlag Harri Deutsch.

Zwischenschritte selten angegeben und Diskussionen kürzer als bei Goldstein; modernere Themen fehlen; meist schwierige Übungsaufgaben ohne Lösungen; relativistische Mechanik findet sich in Band 2.

- F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH.

Hoher Anteil von Beispielen und Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen; wenig Raum für eigentliche Darstellung der Theoretischen Mechanik; enthält relativistische Mechanik und chaotische Dynamik.

- T. Fließbach, *Mechanik*, Spektrum Verlag.
- J. Honerkamp und H. Römer, *Grundlagen der klassischen Theoretischen Physik*, Springer.
- F. Scheck, *Mechanik*, Springer.
- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics Vol. 1*.

Mathematik

- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch.
- R. Shankar, *Basic Training in Mathematics (A Fitness Program for Science Students)*, Plenum Press, New York.

1.2 Was ist theoretische Physik?

Die Physik (lateinisch *physica* 'Naturlehre') ist eine Naturwissenschaft. Ihr Ziel ist die Ermittlung der Gesetze, denen die unbelebte Natur folgt, und deren mathematische Beschreibung. In den letzten Jahrhunderten wurde hierfür die folgende Strategie entwickelt und verfolgt:

- Es werden - im Gegensatz zur reinen Naturbeobachtung - gezielte Experimente durchgeführt.
- Die Messergebnisse werden durch das Aufstellen möglichst allgemeiner mathematischer Zusammenhänge zwischen den Messgrößen interpretiert.

Beides ist nötig für eine umfassende und aussagekräftige Beschreibung der Natur. Der Ausgangspunkt für die theoretisch-mathematische Formulierung der Naturgesetze ist immer das Experiment. Dieses entscheidet auch endgültig über die Richtigkeit einer Theorie. Mit der fortschreitenden Spezialisierung der Physik im 20. Jahrhundert wurde eine Arbeitsteilung in Experimentalphysik und theoretische Physik sinnvoll.

Bei der Experimentalphysik steht das Experiment im Vordergrund, um gezielt Gesetzmäßigkeiten aufzuspüren und empirische Modelle abzuleiten. Zum einen wird dabei nach neuen Phänomenen gesucht, zum anderen werden die von der theoretischen Physik gemachten Vorhersagen überprüft. Die Sprache der theoretischen Physik ist die Mathematik. Die in der Experimentalphysik gefundenen empirischen Modelle werden mit Hilfe der Mathematik auf bekannte Theorien zurückgeführt. Falls diese (noch) nicht existieren, werden Hypothesen für neue Theorien entwickelt, die dann wiederum experimentell überprüft werden. Dies geschieht dadurch, dass man im Rahmen der aufgestellten Hypothese Vorhersagen für durchzuführende Experimente macht. Dies gilt natürlich auch für bereits bekannte Theorien. Die

theoretische Physik macht ganz konkret quantitative Vorhersagen. Sie arbeitet mit Modellen. Mit Hilfe von Modellen wird die Wirklichkeit idealisiert/vereinfacht dargestellt. Diese werden sukzessive im Wechselspiel mit den Erkenntnissen aus dem Experiment verbessert und verallgemeinert.

Eine gute Theorie muss in der Lage sein, beobachtete Phänomene zu beschreiben und erklären sowie auch nicht beobachtete Phänomene vorherzusagen. Hierfür werden auf der Grundlage von Erfahrungen und Beobachtungen allgemeine Grundsätze, Axiome, aufgestellt. Mithilfe der Axiome und mathematischer Methoden werden Gesetze aufgestellt, die Vorhersagen für beobachtbare Größen machen, die im Experiment überprüft werden. Die Theorie motiviert aber auch, Experimente zu entwickeln, die bisher nicht beobachtete Phänomene untersuchen, die von der Theorie vorhergesagt werden. Bekannte Beispiele der jüngeren Zeit sind die Entdeckung des Higgsbosons oder die Beobachtung von Gravitationswellen.

Im Laufe der Zeit hat sich in der theoretischen Physik ein großes Maß an Universalität herausgebildet, so dass verschiedene Gebiete der Physik durch ähnliche Prinzipien und Begriffsbildungen charakterisiert werden. So finden z.B. in der Theorie der Turbulenz von Strömungen klassischer Flüssigkeiten und Gase ähnliche mathematische Methoden Anwendung wie in der Elementarteilchenphysik.

In der theoretischen Physik spielen seit den 1960er Jahren Symmetriebetrachtungen eine wichtige Rolle. So hat man festgestellt, dass z.B. die zwischen Elementarteilchen erlaubten Wechselwirkungen durch zugrunde liegende Symmetrien bestimmt sind. Mit diesen Symmetrien sind Erhaltungsgrößen verbunden, die in unserem Beispiel hier die Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen charakterisieren. Das Zurückführen auf Symmetrien ermöglicht eine einfache und vereinheitlichte theoretische Beschreibung. Ähnliche Prinzipien finden in der Festkörperphysik Anwendung und werden, insbesondere nach der Entdeckung neuer Materialien, immer weiter entwickelt.

Die theoretische Physik ist heute auf vielen Gebieten mit völlig neuen Fragestellungen und Entwicklungen konfrontiert, die einen Strom neuer Ideen und Denkweisen hervorrufen. Dies liegt daran, dass die Physik neuen Problemstellungen gegenüber offen und flexibel ist.

Die erste Vorlesung über theoretische Physik führt anhand der Newtonschen Mechanik der Massenpunkte in die Denkweise der theoretischen Physik ein. Gleichzeitig werden die mathematischen Grundlagen für die ersten Semester vermittelt. Es soll sowohl die Begriffs- und Strukturbildung in der theoretischen Physik verdeutlicht werden als auch die Fähigkeit vermittelt werden, physikalische Vorgänge der Mechanik zu berechnen. Die Mechanik ist uns aus der alltäglichen Erfahrung bekannt und damit hervorragend geeignet, Sie mit den allgemeinen Zielen der theoretischen Physik vertraut zu machen.

1.3 Mechanik

Die (klassische) Mechanik beschäftigt sich mit der Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten, denen die Statik und die Bewegung materieller Körper unterliegt. Letztere erfolgt unter dem Einfluß von Kräften, die in der Mechanik als bekannt vorausgesetzt werden. Es handelt sich also um die Lehre der Bewegung von Körpern und der dabei auf sie wirkenden Kräfte.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Mechanik in verschiedene Themenbereiche einzuteilen. Eine Möglichkeit ist die Unterteilung in die Themengebiete *Statik*, *Kinematik* und *Dynamik*.

Die Statik beschäftigt sich mit der Zusammensetzung und dem Gleichgewicht von Kräften, die auf einen ruhenden Körper wirken. Die Kinematik (vom altgriechischen *kinema*, d.h. Bewegung) behandelt die Beschreibung der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum. Hierfür werden die Größen Zeit, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eingeführt. Die Ursachen der Bewegung, die Kräfte, werden hierbei außer Acht gelassen. Die Dynamik (vom griechischen *dynamis*, d.h. Kraft) hingegen befasst sich mit der Wirkung von Kräften, also der Beschreibung der Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. Es wird hier also die Ursache der Bewegung betrachtet und mathematisch mit berücksichtigt. Die dynamischen Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen. Weiter kann die Mechanik unterteilt werden in spezielle Teilgebiete: die *Mechanik starrer Körper*, in der es um Massenpunkte und nicht deformierbare Körper geht, die *Kontinuumsmechanik*, die sich mit kontinuierlich ausgedehnten, deformierbaren Körpern befasst, und die *Statistische Mechanik*, die Teilgebiet der Thermodynamik ist. Eine andere Unterteilung orientiert sich an den mathematischen Methoden zur Beschreibung der Dynamik des Systems. Man unterscheidet zwischen der Newtonschen Mechanik, die Teil dieser Vorlesung ist, der Lagrangeschen Mechanik, der Hamiltonschen Mechanik und der Hamilton-Jacobi Mechanik. Die letzteren sind Bestandteil der Vorlesung der klassischen theoretischen Physik B. Sie orientieren sich an den grundlegenden Strukturen eines Systems und dessen Symmetrien, um Bewegungsgleichungen aufzustellen und bilden die idealen Werkzeuge zur Aufstellung neuer Theorien wie etwa in der Elementarteilchenphysik.

Die Mechanik nimmt unter den Teilgebieten der Physik eine besondere Stellung ein. Sie ist das älteste Teilgebiet der Physik und bildet die Grundlage für die gesamte theoretische Physik. Die planmäßige Erforschung der Naturgesetze begann im 16. und 17. Jahrhundert in der Mechanik. Beispielsweise wurde mit den Fallversuchen von Galilei (G. Galilei, 1564-1642, Abb. 1.1) erstmals das gezielte Experimentieren als Hilfsmittel wissenschaftlicher Erkenntnis in der Physik eingeführt. Galileis Untersuchungen zur Dynamik wurden von Huygens (C. Huygens, 1629-1695, Abb. 1.2) fortgeführt und von Newton (I. Newton, 1643-1727, Abb. 1.3) zu einem gewissen Abschluß gebracht. Auf den Newtonschen Axiomen fußt das ganze Gebäude der klassischen Mechanik.



Abbildung 1.1: Galileo Galilei, 1564-1642; Quelle: Justus Sustermans - <http://www.nmm.ac.uk/mag/pages/mnuExplore/ViewLargeImage.cfm?ID=BHC2700>.



Abbildung 1.2: Christiaan Huygens, 1629-1695; Quelle: Caspar Netscher - <http://ressources2.techno.free.fr/informatique/sites/inventions/inventions.html>.

Das mechanistische Weltbild des 19. Jahrhunderts beruht auf der Idee, dass die gesamte Wirklichkeit durch strikte Naturgesetze bestimmt wird. Physikalische Vorgänge sind dann verstanden, wenn sie mechanisch erklärt werden können. Man geht davon aus, dass alle Zustände zu allen Zeitpunkten errechenbar sind, wenn man die Naturgesetze und Zustände zu einem bestimmten Zeitpunkt exakt kennt. Wir wissen heute, dass dies auf viele Phänomene nicht anwendbar ist. So haben moderne physikalische Theorien zwar ihren Ursprung in der klassischen Mechanik. Diese hat aber nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Die Phänomene der Quantenwelt sehr kleiner Teilchen etwa müssen durch die Quantenmechanik beschrieben werden (siehe Vorlesungen Quantenmechanik I+II). Und bei Teilchengeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit muss die klassische Mechanik durch die relativistische Mechanik (siehe Vorlesungen Mechanik A, Elektrodynamik und Quantenmechanik II) ersetzt werden.

Im ersten Teil der Vorlesung (Mechanik A) werden Sie mit wichtigen Grundbegriffen und mathematischen Methoden vertraut gemacht, die auch für die anderen Teilbereiche der Phy-



Abbildung 1.3: Sir Isaac Newton, 1643-1727; Quelle: Godfrey Kneller - National Portrait Gallery: NPG 2881While.

sik wichtig sein werden. Wir werden die Kinematik und die Dynamik von Massepunkten und Systeme von Massepunkten behandeln. Es werden die Newtonschen Axiome eingeführt. Wir werden uns mit Energie, Impuls und Drehimpuls beschäftigen sowie deren Erhaltungssätzen. Es werden Schwingungen und insbesondere der Harmonische Oszillator behandelt sowie das Zweikörperproblem unter dem Einfluß einer Zentralkraft. Wir betrachten hierbei das Keplerproblem. Schließlich wird evtl. noch die Streuung von Teilchen anhand der Rutherford-Streuung untersucht, bevor die Vorlesung mit Vielteilchensystemen abschließt.

Der zweite Teil der Vorlesung (Mechanik B im SS 2022) führt den Lagrangeformalismus ein. Es werden Variationsprinzipien behandelt und der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen diskutiert.

Kapitel 2

Kinematik

Die *Kinematik* beschreibt die Bewegung von Körpern. Die geschieht durch die Angabe von Ortskoordinaten und deren Zeitabhängigkeit. Für die vollständige Beschreibung des Bewegungszustandes eines Systems sind unter Umständen viele Angaben erforderlich, da einzelne Teile ganz verschiedene Bewegungen ausführen können. Jedes System jedoch ist aus einzelnen Punkten zusammengesetzt. Daher betrachten wir hier die Beschreibung der Bewegung eines einzelnen Massepunktes. Zunächst aber sollen einige mathematische Grundlagen bereitgestellt werden.

2.1 Mathematischer Einschub

2.1.1 Vektoren

Vektoren sind allgemein im Raum \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) definiert. Sie sind damit definiert als die Menge der n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) mit $x_i \in \mathbb{R}$. Der Vektor \vec{a} im drei-dimensionalen Raum ist dann gegeben durch

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Die Punkte des physikalischen Raumes können durch Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben werden. Hierfür ist allerdings ein Koordinatensystem mit Ursprung notwendig. Das Koordinatensystem bildet mit seinen Achsen das Referenzsystem, bezüglich dessen der Vektor definiert wird. Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem gebildet aus drei orthogonalen Achsen in x -, y - und z -Richtung, die sich in einem gemeinsamen Punkt, dem Koordinatenursprung schneiden, siehe Abb. 2.1.¹ Die Richtungen der drei Achsen werden durch Einheitsvektoren definiert, d.h. Vektoren der Länge 1. Die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems in den drei Richtungen x , y und z sind definiert als

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

¹Wir verwenden per Definition ein Rechtssystem.

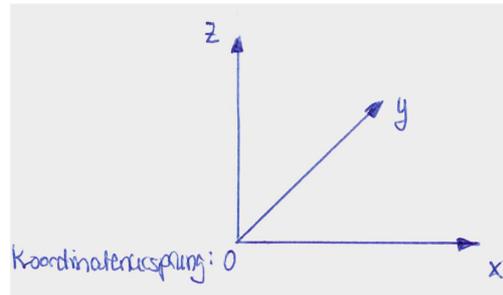


Abbildung 2.1: Das kartesische Koordinatensystem.

Die Einheitsvektoren bilden eine orthonormale Basis, bezüglich derer sich jeder Vektor durch die Angabe seiner Koordinaten bezüglich \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z charakterisieren lässt. Also

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z . \quad (2.3)$$

Ortsvektor: Die zu Beginn der Vorlesung am häufigsten verwendeten Vektoren sind Ortsvektoren, i.a. mit \vec{r} bezeichnet. Mit diesen beschreiben wir Punkte im Euklidischen Raum. Mit der Angabe des Koordinatenursprungs wird ein Bezugssystem festgelegt. Der Ortsvektor eines Punktes P ist dann der Vektor, der den Koordinatenursprung mit dem entsprechenden Punkt im physikalischen Raum verbindet, also

$$\text{Ortsvektor: } \overrightarrow{OP} = \vec{r} . \quad (2.4)$$

Die Definition des Koordinatensystems bzw. des Koordinatenursprungs ist willkürlich und nicht eindeutig. So kann jeder beliebige Punkt als Koordinatenursprung mittels einer geeigneten Translation, Rotation oder eines Boosts aus dem ursprünglichen Koordinatenursprung definiert werden. Der Boost ist eine Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen, die sich relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen. Mit der Änderung des Koordinatenursprungs ändert sich natürlich auch der Ortsvektor, siehe Abb. 2.2.

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^3 a_i b_i , \quad (2.5)$$

wobei im letzten Schritt $x \equiv 1$, $y \equiv 2$ und $z \equiv 3$ gesetzt wurde. Das Summenzeichen \sum bedeutet, dass über die Indizes i von 1 bis 3 summiert wird, also

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 . \quad (2.6)$$

Für die oben eingeführten Einheitsvektoren gilt offensichtlich

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (\delta_{ij} = \text{Kronecker-Delta}) . \quad (2.7)$$

Die Länge bzw. Betrag, auch Norm genannt, eines Vektors ist gegeben durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2} = a . \quad (2.8)$$

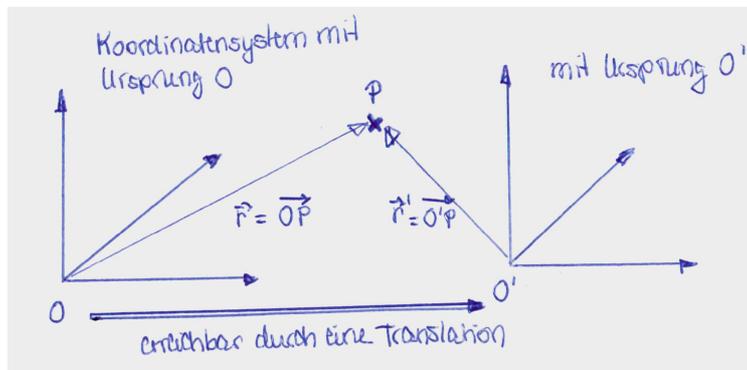


Abbildung 2.2: Der Ortsvektor \vec{r} von P im Koordinatensystem mit Ursprung O und der Ortsvektor \vec{r}' von P im Koordinatensystem mit Ursprung O' . Der Ursprung O' geht aus O durch eine Translation hervor.

Der Winkel θ zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} , siehe Abb. 2.3, bestimmt sich aus

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = ab \cos \theta . \quad (2.9)$$

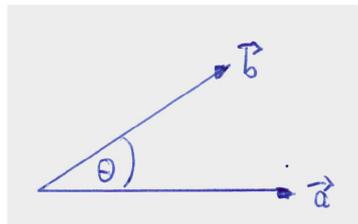


Abbildung 2.3: Der Winkel θ zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Bemerkungen:

- Das Skalarprodukt (auch Punktprodukt genannt) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist ein *Skalar*, d.h. unabhängig vom Koordinatensystem. Die Formel gilt für jedes beliebige kartesische Koordinatensystem.
- Es gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ falls $\theta = \pi/2$ oder $a = 0$ oder $b = 0$.
- Gleichung (2.9) zeigt, dass das Skalarprodukt ein Maß für die Größe der Projektion eines Vektors \vec{b} auf einen anderen Vektor \vec{a} ist.

Einschub: Physikalische Größen können durch Skalare, Vektoren oder Tensoren beschrieben werden. Tensorielle physikalische Größen sind für uns zunächst nicht relevant. Eine

skalare physikalische Größe wird lediglich durch die Angabe eines Zahlenwertes (Maßzahl) und einer Einheit (Maßeinheit) charakterisiert. Physikalische Größen, die beobachtbar sind, werden mit einer reellen Zahl angegeben. Beispiele sind die Masse oder das Volumen eines Körpers, Temperatur, Druck oder auch Wellenlänge. Eine vektorielle physikalische Größe verlangt sowohl die Angabe des Betrages als auch der Richtung. Beispiele sind die Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft oder Impuls.

Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren ist definiert durch

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Es gilt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \quad \text{und} \quad \perp \vec{b}. \quad (2.11)$$

Der Vektor \vec{c} steht senkrecht auf der durch \vec{a} und \vec{b} definierten Fläche, und zwar so, dass \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ein Rechtssystem bilden, siehe Abb. 2.4.

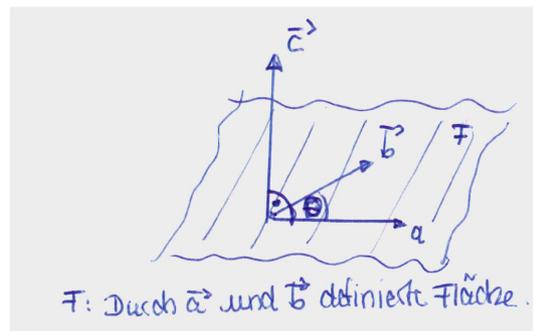


Abbildung 2.4: Der Vektor \vec{c} steht senkrecht auf der durch \vec{a} und \vec{b} definierten Fläche. θ ist der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} .

Für die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems finden wir

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z. \quad (2.12)$$

Und analog

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x. \quad (2.13)$$

Die Länge des Vektors \vec{c} ist gegeben durch

$$c = |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = ab \sin \theta, \quad (2.14)$$

wobei θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist.

2.1.2 Differentialrechnung

Differentiation

Wir betrachten eine reelle Funktion im eindimensionalen Raum als Funktion des Ortes x . Diese bildet die Ortskoordinate x auf einen Funktionswert $f(x)$ ab,

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R} . \quad (2.15)$$

Der Differentialquotient bzw. die Ableitung der Funktion $f(x)$ beschreibt die differentielle Änderung der Funktion in einem infinitesimal kleinen Intervall Δx , also

$$\text{Ableitung von } f \text{ nach } x : \frac{df(x)}{dx} = f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} . \quad (2.16)$$

Geometrisch bedeutet diese Größe die Steigung der Funktion $f(x)$ am Ort x , siehe Abb. 2.5. Die dazugehörige Gerade ist die lineare Näherung der Funktion in der näheren Umgebung von x .

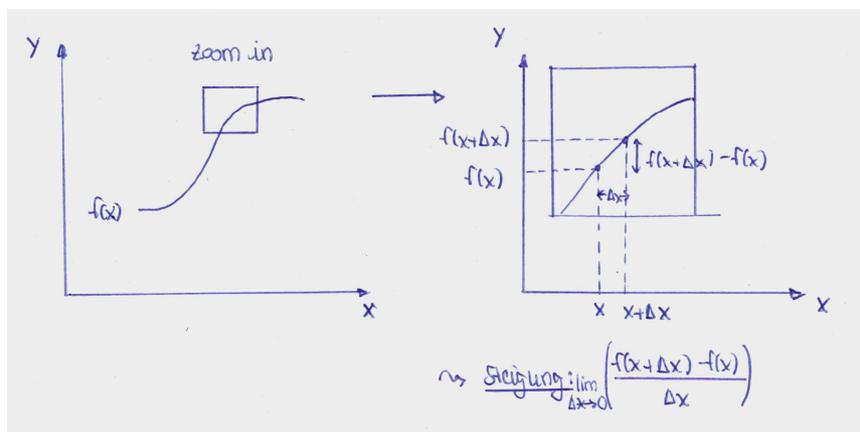


Abbildung 2.5: Die Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x , geometrisch veranschaulicht.

Wir berechnen mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung von $f(x) = 1/2x^2$ zu

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - \frac{1}{2}x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x + \frac{1}{2}\Delta x = x . \quad (2.17)$$

Im folgenden sind einige Ableitungsbeispiele gegeben ($k \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = x^k \rightarrow f'(x) = kx^{k-1} \quad (2.18)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow f'(x) = x \quad (2.19)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad (2.20)$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x \quad (2.21)$$

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x \quad (2.22)$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x . \quad (2.23)$$

Die Ableitung einer Funktion f nach der Zeit t wird im allgemeinen mit einem Punkt bezeichnet, also

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (2.24)$$

Es gelten folgende Regeln:

$$\text{Summenregel: } \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) \quad (2.25)$$

$$\text{Produktregel: } \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (2.26)$$

$$\text{Quotientenregel: } \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (2.27)$$

Die Summen- und Produktregel lassen sich leicht mit Hilfe des Differentialquotienten zeigen:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \quad (2.28)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x) \quad (2.29)$$

und

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \quad (2.30)$$

$$+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} \right)}_{=0}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad (2.31)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (2.32)$$

Wichtig ist noch die Kettenregel, die anwendbar ist für die Ableitung einer Funktion, die eine Funktion der Funktion der Variablen ist, nach der abgeleitet werden soll:

$$\text{Kettenregel: } \frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}. \quad (2.33)$$

Integration

Ausgangspunkt der Integration ist die Flächenberechnung dargestellt in Abb. 2.6. Für $dx \rightarrow 0$ konvergieren die Ober- und Untersumme gegeneinander und ergeben den Flächeninhalt zwischen x -Achse und der Funktion $f(x)$. Das Summenzeichen Σ wird zum Integral \int und die Fläche F ist gegeben durch

$$F = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.34)$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Integration die Umkehroperation der Differentiation ist. Demnach wird zu einer Funktion $f(x)$ die (Stamm-)Funktion $F(x)$ gesucht, so dass

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \quad (2.35)$$

Die Stammfunktion ist offenbar bis auf eine Konstante C fixiert, welche bei der Wahl von festen Integrationsgrenzen (z.B. von a bis b in Abb. 2.6) entfällt. Die Stammfunktion berechnet

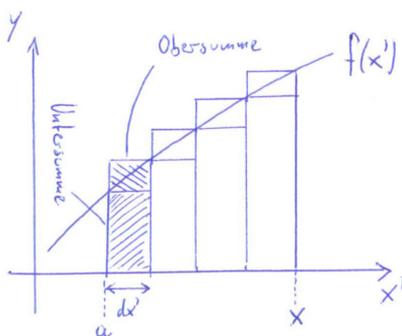


Abbildung 2.6: Flächenberechnung durch Ober- und Untersumme. (Die Notation hat sich geändert. Bitte in obiger Figur alle x' durch x ersetzen und x durch b ersetzen.)

sich gemäß

$$F(x) = \int^x f(x') dx'. \quad (2.36)$$

Beispiele für Stammfunktionen sind

$$f(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad F(x) = -\cos x \quad (2.37)$$

$$f(x) = e^{ax} \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{a} e^{ax}. \quad (2.38)$$

Es wird zwischen der bestimmten Integration mit und der unbestimmten Integration ohne feste Integrationsgrenzen unterschieden. Letzteres entspricht der Suche nach der Stammfunktion $F(x)$, ersteres hingegen

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a). \quad (2.39)$$

Im folgenden werden wichtige hilfreiche Rechenregeln für die Integration gegeben:

Partielle Integration: Sie lässt sich mit Hilfe der Produktregel der Differentiation leicht nachweisen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Wir betrachten das folgende Beispiel,

$$\begin{aligned} \int_a^b \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx &= \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{1}_{f'(x)} \underbrace{e^x}_{g(x)} dx \\ &= be^b - ae^a - e^x \Big|_a^b = e^b(b-1) - e^a(a-1). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Substitutionsregel: Es gilt

$$\int_{g_1}^{g_2} f(g) dg = \int_{x_1}^{x_2} f(g(x)) g'(x) dx, \quad (2.42)$$

mit $g_1 := g(x_1)$ und $g_2 := g(x_2)$. Wir betrachten als Beispiel die Berechnung des Integrals

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos x^2 dx. \quad (2.43)$$

Es wird die Variable $g = x^2$ ersetzt. Es ist $dg = g'(x)dx = 2x dx$. Die Ersetzung der Integrationsgrenzen ergibt $g_1 = x_1^2 = \pi$ und $g_2 = x_2^2 = 4\pi$. Somit haben wir

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos x^2 dx = \int_{\pi}^{4\pi} \cos g dg = \sin g \Big|_{\pi}^{4\pi} = \sin 4\pi - \sin \pi = 0 - 0 = 0. \quad (2.44)$$

Ein anderes Beispiel:

$$\int_a^b \frac{x dx}{x^2 + 1}. \quad (2.45)$$

Wir setzen $g = x^2 + 1$. Damit ist $dg = g'(x)dx = 2x dx$. Die Integrationsgrenzen werden $g_1 = 1 + a^2$ und $g_2 = 1 + b^2$, so dass wir bekommen²

$$\int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{1}{2} \frac{dg}{g} = \frac{1}{2} \ln g \Big|_{1+a^2}^{1+b^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}. \quad (2.46)$$

2.2 Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Wir betrachten in der Kinematik die Bewegung von Massepunkten mit einer zu vernachlässigenden räumlichen Ausdehnung. Ein Beispiel hierfür ist die Bewegung der Erde um die Sonne, bei der die Erde als Massepunkt ohne Ausdehnung betrachtet wird, in welchem die gesamte Masse der Erde konzentriert ist. Da wir die Erde als Massepunkt betrachten, wird jegliche innere Dynamik wie z.B. die Rotation der Erde um sich selbst vernachlässigt.

Bahnkurve: Die Position des Massepunktes wird vollständig durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (2.47)$$

beschrieben. Bewegt sich der Massepunkt in Raum und Zeit, so bildet die zeitliche Abfolge seiner Aufenthaltspunkte eine Bahnkurve. Diese wird auch als *Trajektorie* bezeichnet, siehe Abb. 2.7. Sie ist definiert durch

²Die Stammfunktion von $1/x$ ist $\ln x$. Ferner werden wir verwenden, dass $\ln c - \ln d = \ln(c/d)$ ist.

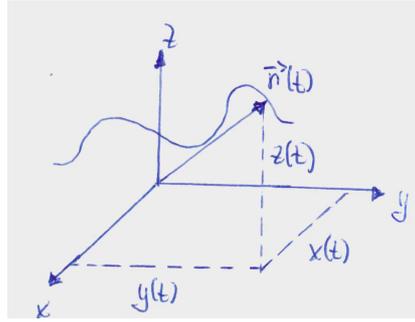


Abbildung 2.7: Die Trajektorie der Bewegung eines Massepunktes zum Zeitpunkt t .

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z. \quad (2.48)$$

Die hier eingeführte Zeit t ist ein Parameter, der den Bewegungsablauf charakterisiert. Beachten Sie, dass in Glg. (2.48) nur die Komponenten x, y, z der Trajektorie zeitabhängig, also zeitlich veränderlich, sind, die Einheitsvektoren aber zeitunabhängig sind.

Geschwindigkeit: Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ eines Massepunktes ist definiert als die differentielle zeitliche Änderung des Ortes des Massepunktes,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (2.49)$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ ist tangential zur Bahnkurve, siehe Abb. 2.8. In kartesischen

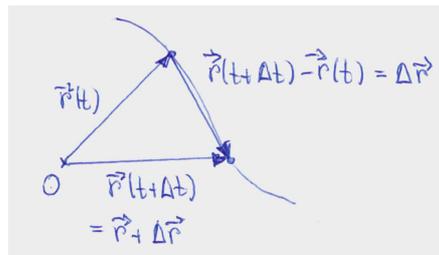


Abbildung 2.8: Der Ortsvektor zum Zeitpunkt t ist $\vec{r}(t)$ und zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist er $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, so dass $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$.

Koordinaten ist die Geschwindigkeit durch die individuellen Geschwindigkeiten der einzelnen Komponenten gegeben (da die Einheitsvektoren ja zeitlich konstant sind),

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z. \quad (2.50)$$

Beschleunigung: Die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ des Massepunktes ist definiert als die differentielle zeitliche Änderung der Geschwindigkeit des Massepunktes. Sie ergibt sich somit aus der zweiten Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \quad (2.51)$$

Beispiel: Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Wir betrachten die Bewegung eines Massepunktes mit konstanter Beschleunigung $\vec{a}(t) = \vec{a} = \text{const.}$ Damit ergibt sich seine Geschwindigkeit zu

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \int_0^t \vec{a}(t') dt' = \vec{a}t. \quad (2.52)$$

Damit ist

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}(0). \quad (2.53)$$

Und wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) - \vec{r}(0) &= \int_0^t \vec{v}(t') dt' = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}(0)t, \quad \text{also} \\ \vec{r}(t) &= \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}(0)t + \vec{r}(0). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Die Beschleunigung finde in negativer z -Richtung statt, also

$$\vec{a} = -a\vec{e}_z. \quad (2.55)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(0) = v_x\vec{e}_x + v_z\vec{e}_z. \quad (2.56)$$

Ferner sei der Ortsvektor zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\vec{r}(0) = 0. \quad (2.57)$$

Damit ergibt sich der Ortsvektor zu

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}at^2 + v_z t \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Gesucht ist die Bahnkurve z als Funktion der Position x , also $z = z(x)$. Wir ersetzen hierfür

$$t = \frac{x}{v_x}, \quad (2.59)$$

so dass

$$z = -\frac{1}{2}\frac{a}{v_x^2}x^2 + \frac{v_z}{v_x}x. \quad (2.60)$$

Es handelt sich um eine Parabel.

2.3 Koordinatensysteme

Wir haben bisher kartesische Koordinatensysteme betrachtet, in welchen die Koordinatenlinien Geraden sind, die durch feste - zeitlich konstante - Basisvektoren definiert sind. Es ist allerdings häufig hilfreich, die Bewegung eines Massepunktes in einem anderen Koordinatensystem zu beschreiben, in dem die mathematische Beschreibung der Bewegung angepasst ist. Damit wird die Beschreibung des Problems und auch seine Lösung einfacher. Beim Lösen von Aufgaben sollten Sie sich daher zunächst Gedanken darüber machen, welche Koordinaten Sie geschickterweise verwenden.

2.3.1 Natürliche Koordinaten

Natürliche Koordinaten bilden ein lokales Koordinatensystem, das an die Bahnkurve des Massepunktes angepasst ist. Man nennt dies auch ein begleitendes Dreibein, da sich die Orientierung des Koordinatensystems als Funktion der Bahnkurve ändert und immer relativ zu ihr orientiert ist.

Wir betrachten zunächst die Geschwindigkeit. Sie ist tangential zur Bahnkurve gerichtet. Der *Tangenteneinheitsvektor* $\vec{\tau}(t)$ ist damit durch die Richtung der Geschwindigkeit definiert. Da die Geschwindigkeit in (Betrag und) Richtung von der Zeit abhängt, hängt auch der Tangenteneinheitsvektor von der Zeit ab. Somit haben wir

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{\tau}(t) . \quad (2.61)$$

Der Tangenteneinheitsvektor hat die Länge 1, also

$$|\vec{\tau}(t)|^2 = 1 . \quad (2.62)$$

Wir führen nun die Bogenlänge der Bahnkurve, s , ein. Es ist die vom Massenpunkt zwischen den Zeiten t_0 und t zurückgelegte Strecke. Bei ihr handelt es sich um einen Skalar. Sie berechnet sich gemäß ($s(t_0) = 0$)

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t ds(t') = \int_{t_0}^t |d\vec{r}(t')| . \quad (2.63)$$

s ist eine monoton wachsende Funktion und kann eindeutig nach t aufgelöst werden, also

$$t = t(s) . \quad (2.64)$$

Wir verwenden nun s zur Parametrisierung der Bahnkurve,

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s) . \quad (2.65)$$

Da

$$ds = |d\vec{r}(t)| \quad \text{und also} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}(t)|}{dt} = |\vec{v}| \quad (2.66)$$

haben wir

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \stackrel{(2.49)}{=} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v} \stackrel{(2.61)}{=} \vec{\tau} . \quad (2.67)$$

Die Beschleunigung, ausgedrückt durch den Tangenteneinheitsvektor, ergibt sich zu

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \stackrel{(2.61)}{=} \frac{d}{dt} (v(t) \vec{\tau}(t)) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau}(t) + v(t) \frac{d\vec{\tau}(t)}{dt} . \quad (2.68)$$

Im letzten Schritt wurde die Produktregel angewandt. Um dieses Ergebnis weiter zu analysieren, betrachten wir $|\vec{\tau}(t)|^2 = \vec{\tau}(t) \vec{\tau}(t) = 1$. Daraus ergibt sich für die zeitliche Ableitung (die Ableitung einer Konstanten ist 0)

$$\frac{d1}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} [\vec{\tau}(t) \vec{\tau}(t)] = 2\vec{\tau}(t) \frac{d\vec{\tau}(t)}{dt} , \quad (2.69)$$

wobei im letzten Schritt die Kettenregel verwendet wurde. Gleichung (2.69) zeigt, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{r}(t)$ und $d\vec{r}(t)/dt$ verschwindet. Das bedeutet, dass die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen (siehe Glg. (2.9)),

$$\vec{r}(t) \perp \frac{d\vec{r}(t)}{dt}. \quad (2.70)$$

Merke: Die Ableitung eines Einheitsvektors nach einer Größe, von der er abhängt, steht immer senkrecht zum Vektor selbst.

Wir definieren die Richtung der zeitlichen Ableitung des Tangenteneinheitsvektors als den *Hauptnormaleneinheitsvektor* $\vec{n}(t)$, also

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \parallel \vec{n}. \quad (2.71)$$

Der Hauptnormaleneinheitsvektor ist ebenfalls auf 1 normiert, also

$$|\vec{n}(t)|^2 = 1. \quad (2.72)$$

Damit haben wir

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = c(t) \vec{n}(t). \quad (2.73)$$

Wir wollen untersuchen, was die Größe $c(t)$ angibt. Aus der Abb. 2.9 lesen wir ab, dass die Änderung des überstrichenen Winkelements $d\phi(t)$ im Grenzfall eines vernachlässigbar kleinen Zeitintervalls Δt gegeben ist durch

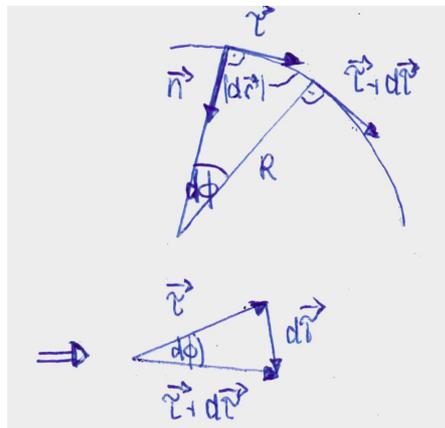


Abbildung 2.9: Das Winkelement $d\phi(t)$.

$$\tan(d\phi(t)) = \frac{|d\vec{r}(t)|}{R(t)} = \frac{|d\vec{r}(t)|}{|\vec{r}(t)|} = |d\vec{r}(t)|, \quad (2.74)$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass der Tangenteneinheitsvektor die Norm 1 hat. Nun ist aber der Tangens eines Winkels für kleine Winkel etwa gleich dem Winkel selbst (Taylorentwicklung!), also

$$\tan(d\phi(t)) \approx d\phi(t) \quad \text{für} \quad d\phi(t) \ll 1. \quad (2.75)$$

Somit haben wir

$$d\phi(t) = \frac{|d\vec{r}(t)|}{R(t)} = |d\vec{\tau}(t)|. \quad (2.76)$$

Bei $R(t)$ handelt es sich um den Krümmungsradius der Kurve. Er entspricht dem Radius des Kreises, der in näherer Umgebung des betrachteten Punktes die Bahnkurve annähert. Damit erhalten wir für die Länge $c(t)$ (beachte, der Hauptnormaleneinheitsvektor hat die Norm 1)

$$c(t) = \frac{|d\vec{r}(t)|}{dt} = \frac{|d\vec{r}(t)|}{R(t)dt} = \frac{|\vec{v}(t)|}{R(t)} = \frac{v(t)}{R(t)}. \quad (2.77)$$

Damit erhalten wir für die Beschleunigung mit Hilfe des Tangenteneinheitsvektors und des Hauptnormaleneinheitsvektors

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau}(t) + \frac{v(t)^2}{R(t)}\vec{n}(t) := \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}. \quad (2.78)$$

Der erste Term beschreibt die tangentielle Beschleunigung, und der zweite beschreibt die radiale Beschleunigung. Die Größe R , die den Krümmungsradius der Bahnkurve beschreibt, ist für eine geradlinige Bewegung unendlich. Die durch $\vec{\tau}(t)$ und $\vec{n}(t)$ aufgespannte Ebene wird als *Schmiegungeebene* der Bahnkurve bezeichnet. Der Beschleunigungsvektor liegt immer in der Schmiegungeebene.

Als dritter Vektor wird der *Binormaleneinheitsvektor* $\vec{b}(t)$ eingeführt. Er steht senkrecht auf der Schmiegungeebene und ist definiert durch

$$\vec{b}(t) = \vec{\tau}(t) \times \vec{n}(t). \quad (2.79)$$

Der Vektor ist ebenfalls auf 1 normiert, also $|\vec{b}(t)|^2 = 1$. Er beschreibt Bewegungen aus der Ebene heraus. In der Mechanik wird er i.a. nicht weiter benötigt.

Koordinatensysteme als solche sind nicht fixiert. So wird ein Punkt im Raum, wenn er relativ zu verschiedenen Bezugspunkten bestimmt wird, durch unterschiedliche Koordinaten beschrieben, vgl. Abb. 2.2. Dort gehen die Koordinatensysteme durch Translation auseinander hervor. Und so erhält man \vec{r}' im Bezugssystem mit Ursprung O' aus \vec{r} einfach durch den Translationsvektor \vec{b} , der die beiden Ursprünge miteinander verbindet,

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{b}. \quad (2.80)$$

Koordinatensysteme können aber auch gegeneinander rotiert werden. Bezugspunkte von Koordinatensystemen können sich auch als Funktion der Zeit ändern. Sie können eine von null verschiedene Relativgeschwindigkeit zueinander haben.³ Oft ist es hilfreich, Koordinaten von einem Koordinatensystem in ein anderes zu überführen. Vom mathematischen Gesichtspunkt aus werden hierfür die entsprechenden Vektoren, die die Koordinaten enthalten, mit passenden Matrizen multipliziert, die eindeutig die Punkte eines Koordinatensystems in ein anderes überführen. Im folgenden soll eine kleine Einführung in die Matrizen gegeben werden, bevor wir wieder zu den Koordinatensystemen zurückkehren.

³Ein Beispiel ist ein Koordinatensystem, das in einem fahrenden Zug fixiert ist, in Bezug zum Koordinatensystem, des Abfahrtsbahnhofs.

2.3.2 Matrizen

Definition: Eine $n \times m$ große Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Die Einträge a_{ij} der Matrix sind reell, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Einzelne Elemente der Matrix werden durch

$$(A)_{ij} = a_{ij}, \quad \text{mit } i = 1, \dots, n, \quad j = 1 \dots m, \quad (2.82)$$

bezeichnet.

Spezielle Matrizen:

- (i) Eine Matrix mit gleicher Zeilen- und Spaltenanzahl heißt *quadratische* Matrix.
- (ii) Eine Matrix mit nur einer Spalte, also $m = 1$, ist ein *Spaltenvektor*.
- (iii) Eine Matrix mit nur einer Zeile, also $n = 1$, ist ein *Zeilenvektor*.

Rechenregeln:

- (i) Bei der Multiplikation einer Matrix mit einer skalaren Größe $\lambda \in \mathbb{R}$ wird jedes einzelne Element der Matrix mit dieser skalaren Größe multipliziert, also

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad (2.83)$$

- (ii) Bei der Addition zweier Matrizen, die gleich groß sind, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, werden die jeweiligen Matrixelemente addiert, also

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}. \quad (2.84)$$

Matrizen unterschiedlicher Größe können nicht addiert werden.

- (iii) Die Multiplikation zweier Matrizen der Größe $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ergibt eine Matrix C der Größe $C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Um die Einträge $(A \cdot B)_{ij}$ zu berechnen, wird der i -te Zeilenvektor von A mit dem j -ten Spaltenvektor von B multipliziert. Man berechnet also

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} b_{lj}. \quad (2.85)$$

Man schreibt

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Bemerkungen:

- * Beim Matrixprodukt $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ lassen sich die Argumente nicht vertauschen, außer in dem speziellen Fall $k = n$.
- * Für das Produkt $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- * Für den Fall, dass $A \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ ein Zeilenvektor und $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ist, ist das Matrixprodukt $A \cdot B$ eine skalare Größe und $B \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine quadratische Matrix.
- * Das Produkt einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit einem Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ergibt einen Vektor der Länge n , $A \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Die Elemente dieses Vektors berechnen sich gemäß

$$(A \cdot \vec{b})_i = \sum_{l=1}^m a_{il} b_l. \quad (2.87)$$

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

(v) Die Einträge der transponierten Matrix bestimmen sich gemäß

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} \quad (2.90)$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

(vi) *Weitere spezielle Matrizen:*

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine *Diagonalmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$, also z. B. für $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

- Eine Diagonalmatrix, für die die Diagonalelemente 1 sind, heißt *Einheitsmatrix*, also z.B. für $n = 3$,

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

Das Produkt einer Matrix mit einer Einheitsmatrix ist wieder eine Matrix. Es gilt

$$\mathbb{1} \cdot A = A \cdot \mathbb{1} = A. \quad (2.94)$$

- Die Matrix B ist das Inverse der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, falls $B \cdot A = A \cdot B = \mathbb{1}$. Man schreibt

$$B = A^{-1}. \quad (2.95)$$

Es haben allerdings nicht alle Matrizen eine Inverse, sondern nur solche, für die $\det A \neq 0$. Matrizen mit verschwindender Determinante heißen *singulär*.

(vii) *Determinante einer Matrix:* Die Determinante einer Matrix der Größe $n \times n$ ist rekursiv definiert. Wir beschränken uns hier auf Matrizen der Größe $n = 2$ und $n = 3$. Somit haben wir

* $n = 2$: Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

berechnet sich gemäß

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \quad (2.97)$$

Es ist die Differenz des Produktes der Einträge der Diagonalen und des Produktes der Einträge der Gegendiagonalen.

* $n = 3$: Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

berechnet sich gemäß

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (2.99)$$

Sie berechnet sich folgendermaßen: Wählen Sie eine beliebige Zeile oder Spalte aus. Zum Beispiel die erste Zeile. Dann bildet sich die Determinante, indem sie das Element a_{11} mit der Determinante der 2×2 Submatrix multipliziert, die sich durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte der 3×3 Matrix ergibt. Berechnen Sie die Multiplikation von a_{12} mit der Determinante der 2×2 Submatrix, die sich durch Streichen der ersten Zeile und zweiten Spalte der 3×3 Matrix ergibt. Berechnen Sie die Multiplikation von a_{13} mit der Determinante der 2×2 Submatrix, die sich durch Streichen der ersten Zeile und dritten Spalte der 3×3 Matrix ergibt. Diese drei so berechneten Terme fügen Sie durch Addition oder Subtraktion zusammen. Hier muss der zweite berechnete Term subtrahiert, die beiden anderen addiert werden. Das Vorzeichen ergibt sich folgendermaßen: Betrachten Sie das Element a_{ij} , das Sie mit der Determinante multiplizieren. Das Vorzeichen ergibt sich aus $(-1)^{i+j}$. Also haben wir für a_{11} dann $(-1)^{1+1} = +1$, für a_{12} dann $(-1)^{1+2} = -1$ und für a_{13} dann $(-1)^{1+3} = +1$. Genausogut hätten Sie jede beliebige andere (als der ersten Zeile) Zeile oder Spalte wählen können. Sie nehmen dann hier jeweils die Einträge und multiplizieren Sie mit der jeweiligen Subdeterminante der 2×2 Matrix, die sich durch Streichen der entsprechenden Zeile und Spalte aus der 3×3 Matrix ergibt. Die Vorzeichen der zu summierenden Terme ermitteln Sie wie oben beschrieben. (Auf diese Weise können Sie übrigens die Determinante jeder beliebigen $n \times n$ Matrix berechnen, indem Sie die Berechnung sukzessive auf die Berechnung der entsprechenden Subdeterminanten zurückführen.)

Beispiel:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = -1(3 \cdot 8 - 5 \cdot 6) + 2(3 \cdot 7 - 4 \cdot 6) \\ &= -1 \cdot (-6) + 2 \cdot (-3) = 0 . \end{aligned} \quad (2.100)$$

Eigenschaften:

- * $\det \mathbb{1} = 1$
- * $\det(A^T) = \det(A)$ (A^T transponierte Matrix)
- * $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (A^{-1} inverse Matrix)
- * Für quadratische Matrizen A und B gleicher Größe gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- * Für eine Zahl c und eine $n \times n$ Matrix A gilt $\det(cA) = c^n \det(A)$.
- * Besteht eine Reihe oder Spalte aus Nullen, so ist die Determinante 0.
- * Falls $\det(A) = 0 \rightarrow$ mindestens eine Zeile (Spalte) ist Linearkombination der anderen Zeilen (Spalten).
- * Vertauscht man zwei Spalten (Zeilen), so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.
- * Addiert man das Vielfache einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile), so ändert sich die Determinante nicht.

2.3.3 Drehungen

Im Folgenden werden wir eine konkrete Anwendung von Matrizen diskutieren, und zwar im Zusammenhang mit dem Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen. Dies ist ein häufig angewandtes Mittel, um Probleme in einem angepassten Koordinatensystem möglichst einfach zu beschreiben. Wir betrachten hierfür die Drehung eines Koordinatensystems, in dem ein Massepunkt durch den Ortsvektor \vec{r}_P beschrieben wird. Seine Ortskoordinaten sollen in den zwei verschiedenen Koordinatensystemen ausgedrückt werden.

(I) 2-dimensionaler Fall:

Wir betrachten zur Vereinfachung zunächst den zweidimensionalen Fall und erweitern später auf den dreidimensionalen Fall. Zur Herleitung der Beziehungen siehe Abb. 2.10. Im ungedrehten Koordinatensystem wird die Position von P beschrieben durch

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

Die Koordinaten des Ortsvektors

$$\vec{r}'_P = \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

von P im gedrehten Koordinatensystem lassen sich durch die Koordinaten x_P und y_P ausdrücken. Aus der Abbildung lesen wir ab:

$$x'_P = x_P \cos \theta + y_P \sin \theta \quad (2.103)$$

$$y'_P = y_P \cos \theta - x_P \sin \theta . \quad (2.104)$$

Auflösen nach x_P und y_P liefert

$$x_P = x'_P \cos \theta - y'_P \sin \theta \quad (2.105)$$

$$y_P = y'_P \cos \theta + x'_P \sin \theta . \quad (2.106)$$

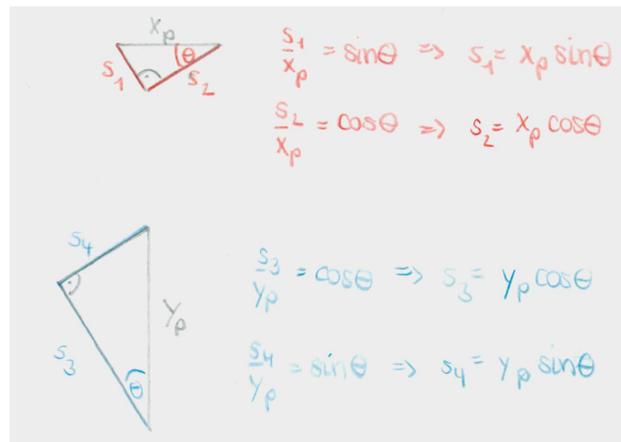
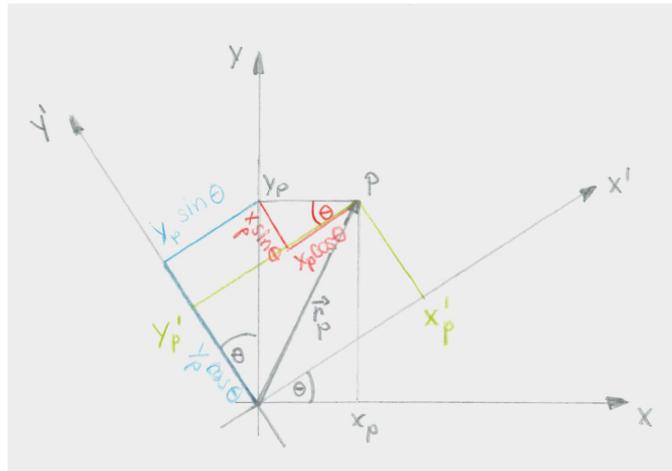


Abbildung 2.10: Die Drehung zweier Koordinatensysteme gegeneinander um den Winkel θ .

Dargestellt in den Einheitsvektoren des ungedrehten (gedrehten) Koordinatensystems haben wir (siehe Abb. 2.11)

$$\vec{r}_P = x_P \vec{e}_x + y_P \vec{e}_y = x'_P \underbrace{(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)}_{\vec{e}'_x} + y'_P \underbrace{(\cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x)}_{\vec{e}'_y} = x'_P \vec{e}'_x + y'_P \vec{e}'_y. \quad (2.107)$$

Kompakte Schreibweise: Die neuen Koordinaten können wir kompakt als Funktion der ursprünglichen Koordinaten ausdrücken. Aus den Gln. (2.103) und (2.104) lesen wir ab

$$\begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

Wir haben also

$$\vec{r}'_P = O \vec{r}_P, \quad \text{mit } O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

Wir wollen nun die Frage untersuchen, welche Eigenschaften die Matrix O haben muss, damit sie eine Drehung beschreibt:

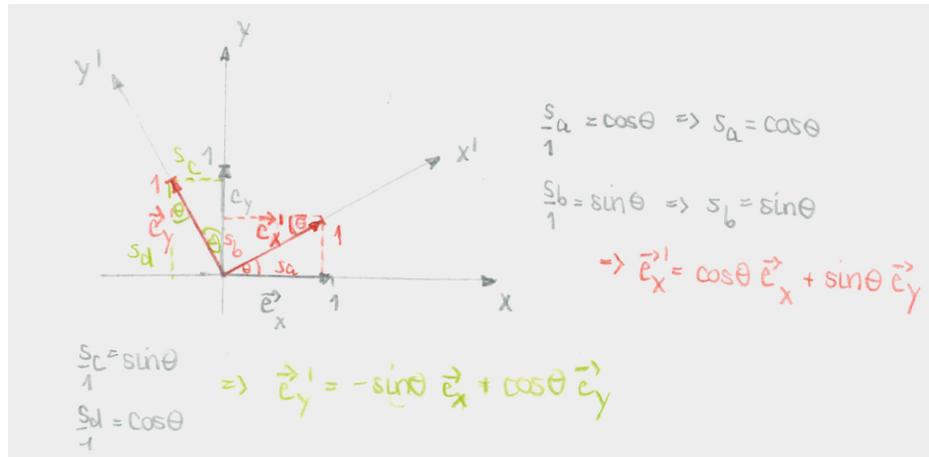


Abbildung 2.11: Die Einheitsvektoren der gedrehten Koordinatensysteme.

- Drehmatrizen müssen quadratisch sein.
- Die Matrixelemente sind reell.
- Die Determinante einer Drehmatrix ist 1, also $\det O = 1$. Das bedeutet, dass die Drehung eines Vektors weder eine Verlängerung noch Stauchung des Vektors verursacht. Es gilt $|\vec{r}'_P| = |\vec{r}_P|$. Offensichtlich wollen wir den Vektor nur drehen, aber nicht seine Länge verändern.
- Alle Zeilen und Spalten müssen die Länge eins haben.
- Alle Zeilen müssen orthogonal zueinander sein. Alle Spalten müssen orthogonal zueinander sein. Das Skalarprodukt der entsprechenden Vektoren verschwindet also.
- Für die transponierte Matrix

$$O^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

muss gelten

$$O^T O = \mathbf{1} . \quad (2.111)$$

Matrizen mit den Eigenschaften c)-f) nennt man *orthonormal*. Mit f) können wir leicht beweisen, dass

$$|\vec{x}'| = |O\vec{x}| = |\vec{x}| . \quad (2.112)$$

Denn⁴

$$|\vec{x}'|^2 = |O\vec{x}|^2 = (O\vec{x})^T (O\vec{x}) = \vec{x}^T \underbrace{O^T O}_{=\mathbf{1}} \vec{x} = |\vec{x}|^2 . \quad (2.113)$$

⁴Hier verwenden wir: (i) Das Produkt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} lässt sich schreiben als $\vec{a}^T \vec{b}$. (ii) $(A\vec{x})^T = \vec{x}^T A^T$. Ebenso gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. (A, B sind Matrizen.)

Bemerkung: Führen wir 2 Drehungen aus, zuerst um den Winkel θ und dann um den Winkel ϕ , so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{pmatrix} x''_P \\ y''_P \end{pmatrix}, \quad (2.114)$$

mit

$$\begin{aligned} x''_P &= x'_P \cos \phi + y'_P \sin \phi \\ &= (x_P \cos \theta + y_P \sin \theta) \cos \phi + (y_P \cos \theta - x_P \sin \theta) \sin \phi \\ &= x_P \underbrace{(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi)}_{=\cos(\theta+\phi)} + y_P \underbrace{(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)}_{=\sin(\theta+\phi)}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Analog ergibt sich

$$y''_P = y_P \cos(\theta + \phi) - x_P \sin(\theta + \phi). \quad (2.116)$$

Das heißt, wir haben insgesamt eine Drehung um den Winkel $(\theta + \phi)$.

AKTIVE DREHUNG

Bisher haben wir den Fall betrachtet, dass wir das Koordinatensystem drehen. Die Drehung, die zu der daraus hergeleiteten Drehmatrix gehört, heißt *passive Drehung*. Wenn wir das Koordinatensystem festhalten und den Vektor um den Winkel θ drehen, so handelt es sich um eine *aktive Drehung*. Wir nennen diese Drehmatrix von nun an O ! Wir haben also für die aktive Drehung

$$\begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}. \quad (2.117)$$

Gesucht sind die Einträge der Drehmatrix

$$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.118)$$

Wir kennen bereits die Drehung der Einheitsvektoren, die durch

$$\vec{e}'_x = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

$$\vec{e}'_y = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

gegeben ist. Damit haben wir

$$\vec{e}'_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{e}_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

$$\vec{e}'_y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{e}_y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

Wir erhalten also die Drehmatrix der aktiven Drehung,

$$\text{Drehmatrix: } \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dies ist von nun an die Definition der Drehmatrix, und wir bezeichnen Sie mit O ! Die Drehmatrix der passiven Drehung, die wir vorher hergeleitet haben, ist das Inverse hierzu, bzw. die transponierte Matrix, damit also ab jetzt $O^T = O^{-1}$.

(II) 3-dimensionaler Fall:

Die Drehung eines Koordinatensystems im dreidimensionalen Raum erhalten wir durch sukzessives Anwenden einer Drehung um jeweils eine Koordinatenachse. Die individuellen Drehmatrizen für die jeweilige Koordinate sind gegeben durch,

$$\text{Drehung um } x\text{-Achse um Winkel } \theta_x : \quad O_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

$$\text{Drehung um } y\text{-Achse um Winkel } \theta_y : \quad O_y = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

$$\text{Drehung um } z\text{-Achse um Winkel } \theta_z : \quad O_z = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

Damit lässt sich eine Rotation im 3-dimensionalen Raum ausdrücken als

$$\begin{aligned} O &= O_x(\theta_x)O_y(\theta_y)O_z(\theta_z) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & -\cos \theta_y \sin \theta_z & \sin \theta_y \\ \cos \theta_x \sin \theta_z + \sin \theta_x \sin \theta_y \cos \theta_z & \cos \theta_x \cos \theta_z - \sin \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_x \cos \theta_y \\ \sin \theta_x \sin \theta_z - \cos \theta_x \sin \theta_y \cos \theta_z & \sin \theta_x \cos \theta_z + \cos \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z & \cos \theta_x \cos \theta_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.126)$$

Achtung! Die Drehung in drei Dimensionen ist im Allgemeinen nicht vertauschbar. Die Reihenfolge der Anwendung der Drehmatrizen ist wichtig!

Euler Winkel: Wir geben hier auch noch der Vollständigkeit halber die Euler-Winkel an, durch die sich jede beliebige Drehung darstellen lässt. Die Eulerwinkel φ, θ, ψ sind folgendermaßen definiert (siehe Abb. 2.12):

1. Drehung um die z -Achse um den Winkel φ .
2. Drehung um die x -Achse um den Winkel θ .
3. Drehung um die z -Achse um den Winkel ψ .

Die Drehmatrix ist damit gegeben durch

$$O = O_z(\psi)O_x(\theta)O_z(\varphi). \quad (2.127)$$

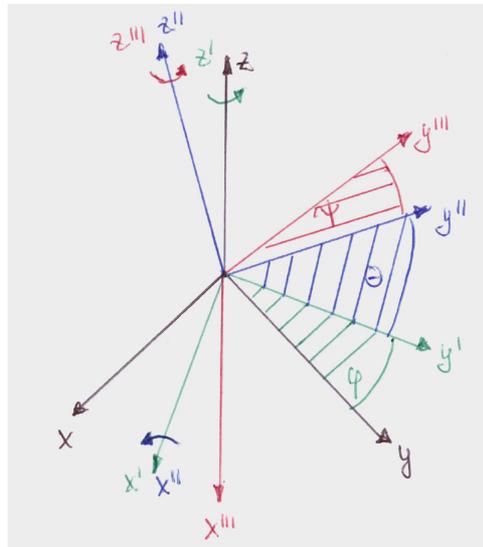


Abbildung 2.12: Die Definition der Euler Winkel.

2.3.4 Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten

Bisher haben wir Punkte im Raum durch kartesische Koordinaten beschrieben, indem wir die drei Werte für x , y und z angegeben haben. Das kartesische Koordinatensystem ist aber nicht immer unbedingt die geeignete Wahl, um ein bestimmtes Problem zu beschreiben und/oder lösen. Ein Beispiel sind Bewegungen auf Kreisbahnen. Ihre Beschreibung wird durch Koordinaten vereinfacht, die der Bewegung angepasst sind. In diesem Fall sind das die *Zylinderkoordinaten* im 3-dimensionalen Raum und die *Polarkoordinaten* im 2-dimensionalen Raum. Sie stellen die einfachsten Beispiele für krummlinige Koordinatensysteme dar. In krummlinigen Koordinatensystem ändern die Koordinatenlinien ihre Richtung, so dass die Einheitsvektoren ortsabhängig werden. Man spricht von orthogonalen krummlinigen Koordinaten, wenn die Koordinatenlinien senkrecht aufeinander stehen. Dies ist bei den Zylinderkoordinaten (Polarkoordinaten im 2-dimensionalen) und den Kugelkoordinaten der Fall.

Im Fall von Zylinderkoordinaten wird ein Punkt statt mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) durch die Zylinderkoordinaten ρ , ϕ und z beschrieben. Polarkoordinaten sind dann der vereinfachte Fall von Zylinderkoordinaten, in denen die dritte, die z -Koordinate, nicht auftritt. Damit werden also 2-dimensionale Probleme beschrieben, in denen die 3. Dimension keine Rolle spielt.

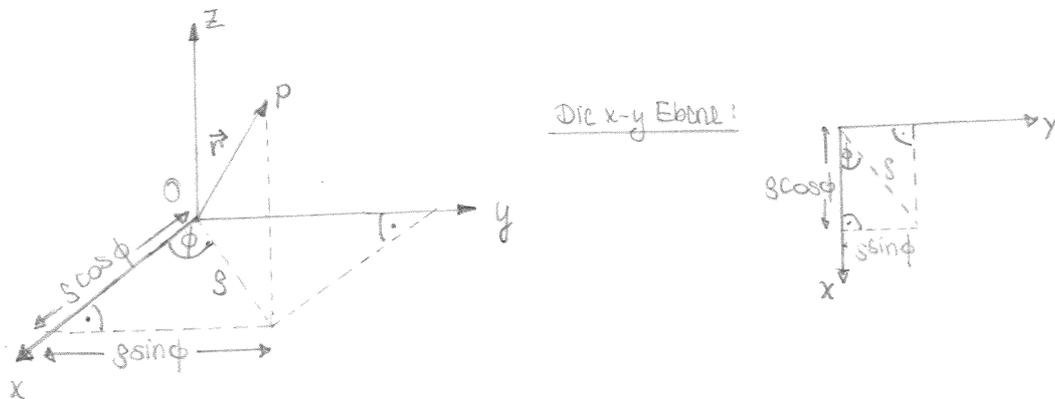


Abbildung 2.13: Die Zylinderkoordinaten.

Zur Definition der Zylinderkoordinaten siehe Abb. 2.13. Daraus lesen wir den Zusammenhang zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten ab:

$$x = \rho \cos \phi \quad (2.128)$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (2.129)$$

$$z = z, \quad (2.130)$$

mit $\rho \geq 0$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Damit ist jeder Punkt \vec{r} im Raum eindeutig gegeben durch

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \vec{e}_x + \rho \sin \phi \vec{e}_y + z \vec{e}_z. \quad (2.131)$$

Die Zylinderkoordinaten ausgedrückt durch die kartesischen Koordinaten lauten

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.132)$$

$$\phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\rho} & \text{wenn } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\rho} & \text{wenn } y < 0 \end{cases} \quad (2.133)$$

$$z = z. \quad (2.134)$$

Mathematischer Einschub - Partielle Ableitung: Wir betrachten eine Funktion f , die von mehreren Variablen x_i , $i = 1, \dots, n$, abhängt, also $f = f(x_i)$. Unter partieller Ableitung von f nach x_i versteht man die Ableitung von f nach der Variablen x_i . Die Notation hierfür ist ∂ . Falls f nach x_i partiell differenzierbar ist, so ergibt sich die partielle Ableitung nach x_i aus

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (2.135)$$

Die Ableitung nach x_i wird dadurch gebildet, dass alle $x_j \neq x_i$ konstant gehalten werden und nur nach x_i abgeleitet wird. Man findet auch folgende Notationen,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f = f_{x_i}. \quad (2.136)$$

Die partiellen Ableitungen sind wiederum Funktionen von x_i und können weiter differenziert werden. So erhält man höhere partielle Ableitungen, also z.B.,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right). \quad (2.137)$$

Die totale Ableitung einer Funktion von mehreren Variablen wird hingegen mit d bezeichnet, also df . Sie ist gegeben durch

$$df \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (2.138)$$

Wir betrachten als Beispiel die Funktion $f = f(x(t), y(t), z(t), t)$. Die Funktion f hängt sowohl explizit von der Zeit t ab als auch implizit über x, y, z . Die Ableitung der Funktion f nach der Zeit, df/dt , ergibt sich somit durch Anwendung der Kettenregel, da x, y, z selbst Funktionen der Zeit sind. Die Kettenregel muss hier aber mehrdimensional angewendet werden, da f eine Funktion von den Variablen x, y, z ist. Ferner muss die explizite Ableitung nach t gebildet werden. Somit erhalten wir

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.139)$$

Bei der partiellen Ableitung $\partial f/\partial t$ nach der Zeit wird nur die explizite Abhängigkeit der Funktion f von t berücksichtigt, und alle anderen Variablen werden konstant gehalten. Die totale Ableitung df/dt berücksichtigt auch die indirekte Abhängigkeit von t , die z.B. dadurch zustande kommt, dass längs der Bahnbewegung die Ortskoordinaten von der Zeit abhängen.

Die Länge eines Vektors in Zylinderkoordinaten ist gegeben durch

$$|\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (2.140)$$

Mit

$$dx = d\rho \cos \phi - \rho \sin \phi d\phi \quad (2.141)$$

$$dy = d\rho \sin \phi + \rho \cos \phi d\phi \quad (2.142)$$

$$dz = dz \quad (2.143)$$

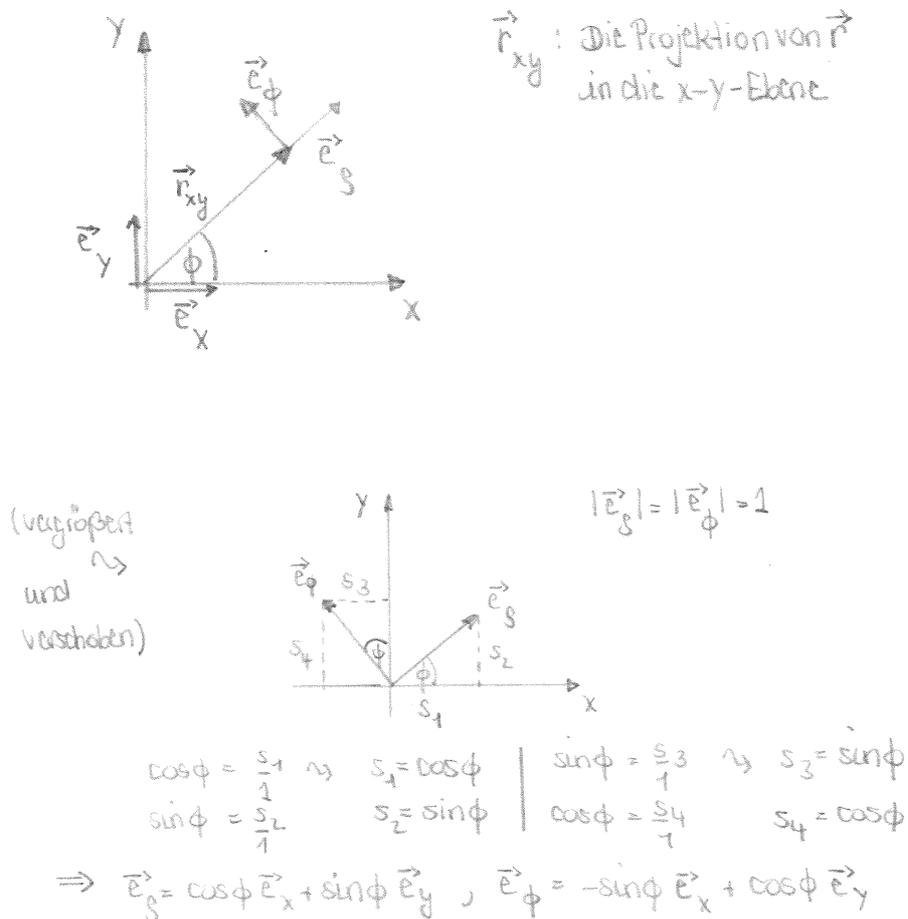
ist das Linienelement einer Bahnkurve gegeben durch

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy, dz) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (2.144)$$

Um die Basisvektoren zu bestimmen betrachten wir zunächst nur die x - y -Ebene, Abb. 2.14. Daraus lesen wir ab:

$$e_\rho = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \quad (2.145)$$

$$e_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \quad (2.146)$$

Abbildung 2.14: Bestimmung der Basisvektoren \vec{e}_ρ und \vec{e}_ϕ .

Dies sind die Basisvektoren des 2-dimensionalen Polarkoordinatensystems. Damit haben wir die Basisvektoren des 3-dimensionalen Zylinderkoordinatensystems

$$\vec{e}_\rho = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.147)$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.148)$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (2.149)$$

Sie sind offensichtlich alle orthogonal zueinander und auf 1 normiert und bilden also ein Orthonormalsystem. Der Vektor \vec{e}_z ist konstant, die Vektoren \vec{e}_ρ und \vec{e}_ϕ hängen aber von ϕ

ab. Damit bilden die sie ein lokales Koordinatensystem. Für Ortsvektoren gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z . \quad (2.150)$$

Allgemeine Vektoren \vec{k} werden dargestellt als

$$\vec{k} = k_\rho \vec{e}_\rho + k_\phi \vec{e}_\phi + k_z \vec{e}_z . \quad (2.151)$$

Wenn ein beliebiger Vektor \vec{k} in kartesischen Koordinaten gegeben ist, (k_x, k_y, k_z) , so kann er folgendermaßen in die Zylinderkoordinaten (k_ρ, k_ϕ, k_z) umgerechnet werden:

$$k_\rho = \cos \phi k_x + \sin \phi k_y \quad (2.152)$$

$$k_\phi = -\sin \phi k_x + \cos \phi k_y \quad (2.153)$$

$$k_z = k_z . \quad (2.154)$$

Dies kann auch in Matrixform geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} k_\rho \\ k_\phi \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} . \quad (2.155)$$

Wie bereits gesagt sind kartesische Koordinaten ortsunabhängig, während Zylinder- oder Polarkoordinaten ortsabhängig sind. Man benötigt zu ihrer Definition einen Raumpunkt, auf den man sich bezieht. Es kann hierfür im Prinzip jeder beliebige Bezugspunkt im Raum verwendet werden. Wählt man ihn aber unpassend, so wird die Beschreibung der Vektoren sehr kompliziert. Wir betrachten hierfür die Beispiele in Abb. 2.15. In (a) sieht man ein Vektorfeld⁵, das man besser in kartesischen Koordinaten beschreibt. Die Orientierung aller Vektoren ist hier gleich. Geschickterweise definiert man das kartesische Koordinatensystem so, dass z.B. die x -Achse genau in Richtung der Vektoren zeigt. Damit hat man dann keine y -Komponente und kann die Eigenschaften des Vektorfeldes sehr einfach beschreiben.

In (b) und (c) sieht man Vektorfelder, die man besser in Polarkoordinaten beschreibt. Wir haben einen ausgezeichneten Punkt (im Gegensatz zu (a)), relativ zu dem das Vektorfeld (b) ausschließlich eine Winkelkomponente und das Vektorfeld (c) ausschließlich eine Radialkomponente besitzt. Das Problem ist also symmetrisch zu diesem besonderen Bezugspunkt. (In (a) hingegen gibt es keinen besondern Bezugspunkt zur Definition möglicher Polarkoordinaten.) Physikalisch kann es sich bei (b) um das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters handeln und bei (c) um die elektrischen Feldlinien einer Punktladung.

Beispiel: Geschwindigkeit und Beschleunigung in Zylinderkoordinaten:

Der Ortsvektor ist gegeben durch

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z = \rho(\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y) + z \vec{e}_z . \quad (2.156)$$

Damit bekommen wir für die Geschwindigkeit (da $\phi = \phi(t)$ und $\rho = \rho(t)$)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho(\dot{\phi}(-\sin \phi) \vec{e}_x + \dot{\phi} \cos \phi \vec{e}_y) + \dot{z} \vec{e}_z \\ &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\phi} \rho \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z . \end{aligned} \quad (2.157)$$

⁵Ein Beispiel für ein Vektorfeld ist elektrische Feld.

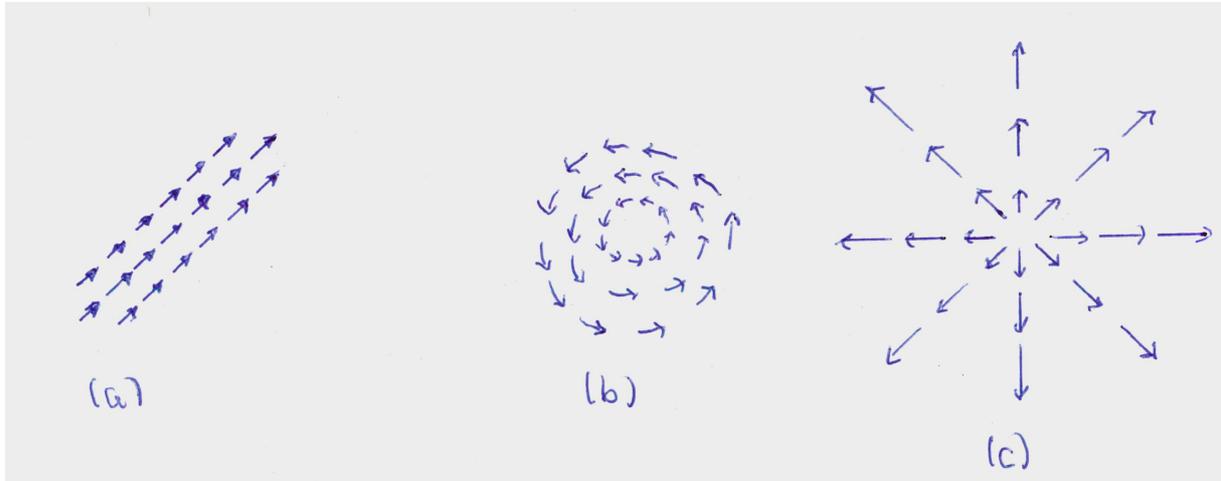


Abbildung 2.15: Verschiedene Vektorfelder.

Und für die Beschleunigung erhalten wir

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}(-\dot{\phi}\sin\phi\vec{e}_x + \dot{\phi}\cos\phi\vec{e}_y) + (\ddot{\phi}\rho + \dot{\phi}\dot{\rho})\vec{e}_\phi + \dot{\phi}^2\rho(-\cos\phi\vec{e}_x - \sin\phi\vec{e}_y) + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2\rho)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \ddot{\phi}\rho)\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z.\end{aligned}\quad (2.158)$$

2.3.5 Kugelkoordinaten

Bei Problemen mit spärlicher Symmetrie ist es geschickt, Kugelkoordinaten (r , θ und ϕ) zu verwenden. Der Winkel θ heißt *Polarwinkel* und gibt den Winkel zwischen der z -Achse und dem Vektor \vec{r} an. Der Winkel ϕ heißt *Azimuthalwinkel* und ist der Winkel zwischen der x -Achse und der Projektion von \vec{r} in die xy -Ebene, siehe Abb. 2.16. Die Angabe des Radius r und der beiden Winkel beschreibt jeden Punkt im Raum. Kugelkoordinaten sind ebenfalls ein ortsabhängiges Koordinatensystem. Aus Abb. 2.16 können wir auch den Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten ablesen. Die Projektion von \vec{r} in die xy -Ebene ergibt $|\vec{r}|\sin\theta = r\sin\theta$, und die Projektion auf die z -Achse liefert $r\cos\theta$. Damit haben wir

$$x = r\cos\phi\sin\theta \quad (2.159)$$

$$y = r\sin\phi\sin\theta \quad (2.160)$$

$$z = r\cos\theta, \quad (2.161)$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Und somit ist jeder Punkt im Raum eindeutig gegeben durch

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\phi\vec{e}_y + r\cos\theta\vec{e}_z. \quad (2.162)$$

Das Linienelement einer Bahnkurve berechnet sich mit

$$dx = dr\cos\phi\sin\theta - rd\phi\sin\phi\sin\theta + rd\theta\cos\phi\cos\theta \quad (2.163)$$

$$dy = dr\sin\phi\sin\theta + rd\phi\cos\phi\sin\theta + rd\theta\sin\phi\cos\theta \quad (2.164)$$

$$dz = dr\cos\theta - rd\theta\sin\theta \quad (2.165)$$

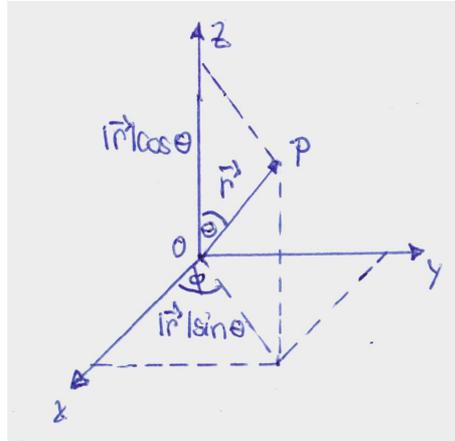


Abbildung 2.16: Kugelkoordinaten.

zu

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\phi^2 \sin^2 \theta + d\theta^2). \quad (2.166)$$

Die Basisvektoren erhalten wir folgendermaßen: Der Basisvektor, normiert auf 1, in r -Richtung ist gegeben durch

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.167)$$

Den Vektor in Richtung des Azimutalwinkels kennen wir bereits. Er liegt in der xy -Ebene und lautet

$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.168)$$

Der Einheitsvektor in der Richtung des Polarwinkels \vec{e}_θ steht senkrecht auf \vec{e}_ϕ und \vec{e}_r . Damit bestimmt er sich aus

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \quad (2.169)$$

zu

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \quad (2.170)$$

Der Ortsvektor eines Punktes mit Abstand r vom Koordinatenursprung ist gegeben durch

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad (2.171)$$

und allgemein werden Vektoren dargestellt als

$$\vec{k} = k_r \vec{e}_r + k_\theta \vec{e}_\theta + k_\phi \vec{e}_\phi . \quad (2.172)$$

Die Transformation zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} . \quad (2.173)$$

Die Anordnung der Einheitsvektoren zur Beschreibung eines beliebigen Vektors in Kugelkoordinaten ist in Abb. 2.17 dargestellt.

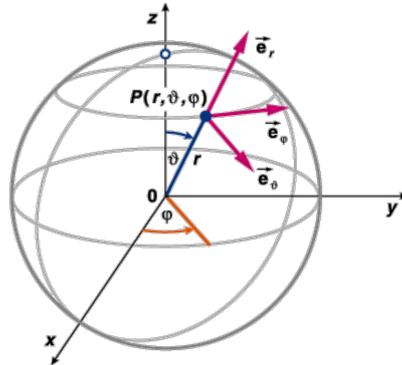


Abbildung 2.17: Anordnung der Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten.

Beispiel: Geschwindigkeit und Beschleunigung in Kugelkoordinaten.

Wir haben den Ortsvektor

$$\vec{r} = r \vec{e}_r . \quad (2.174)$$

Die Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r . \quad (2.175)$$

Wir bestimmen $\dot{\vec{e}}_r$ zu

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= (\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \vec{e}_x + (\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \vec{e}_y - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z \\ &= \dot{\theta} (\cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) + \dot{\phi} (-\sin \theta \sin \phi \vec{e}_x + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_y) \\ &= \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi . \end{aligned} \quad (2.176)$$

Damit haben wir also

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r (\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi) . \quad (2.177)$$

Um die Beschleunigung zu berechnen benötigen wir noch $\dot{\vec{e}}_\theta$ und $\dot{\vec{e}}_\phi$. Diese berechnen sich zu

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi \quad (2.178)$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi} (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) . \quad (2.179)$$

Damit ist (nach ein paar Vereinfachungen) – Nachrechnen!

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - \dot{\phi}^2 r \sin^2 \theta) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta} r - \dot{\phi}^2 r \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + \ddot{\phi} r \sin \theta) \vec{e}_\phi . \end{aligned} \quad (2.180)$$

2.4 Beispielaufgaben

2.4.1 Kreisbewegung

Gegeben sei ein Massepunkt, der sich auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius r und konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\phi}$ bewegt. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Diese Aufgabe lässt sich in Anbetracht der Bahnkurve am besten mit Polarkoordinaten lösen. Mit⁶

$$\phi = \omega t \quad (2.181)$$

ist die Bahnkurve gegeben durch (die z -Komponente ist 0)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.182)$$

Damit finden wir den Geschwindigkeitsvektor ($r = \text{const.}$)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -\omega r \sin \omega t \\ \omega r \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = r\omega \vec{e}_\phi. \quad (2.183)$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist

$$v(t) = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} = r\omega. \quad (2.184)$$

Die Geschwindigkeit der Kreisbewegung beträgt $v = r\omega$.

Die Geschwindigkeit zeigt in Richtung des Tangenteneinheitsvektors, also immer tangential zur Bahnkurve des entsprechenden Raumpunktes,

$$\vec{v} = v\vec{\tau}(t). \quad (2.185)$$

Die Beschleunigung \vec{a} ist gegeben durch

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r \cos \omega t \\ -\omega^2 r \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x(t) \\ -\omega^2 y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 r \vec{e}_\rho. \quad (2.186)$$

Damit ergibt sich der Betrag der sogenannten *Zentripetalbeschleunigung* zu

$$a(t) = |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t)} = r\omega^2. \quad (2.187)$$

Die Beschleunigung zeigt in Richtung des negativen Ortsvektors \vec{r} , also nach innen. Der Massepunkt wird auf seiner Kreisbahn in negativer radialer Richtung beschleunigt, so dass die Beschleunigung den Körper ins Zentrum der Kreisbahn streben lässt.⁷

Die Beschleunigung der Kreisbewegung beträgt $a = r\omega^2$.

⁶Wir setzen den Winkel ϕ zur Zeit $t = t_0$ gleich 0.

⁷Das lateinische Wort *petere* bedeutet streben.

Die Umlaufzeit T ist die Zeit, nach welcher der Winkelbereich $\Delta\phi = 2\pi$ überstrichen wurde. Die Drehzahl bzw. Frequenz ν ist durch $\nu = 1/T$ definiert. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung besteht also folgender Zusammenhang:

$$\text{Umlaufzeit: } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{und} \quad \text{Frequenz: } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.188)$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi\nu$ wird auch Kreisfrequenz genannt. In Polarkoordinaten ist die Bahnkurve gegeben durch

$$\rho = r = \text{const.}, \quad \phi(t) = \omega(t - t_0) + \phi_0. \quad (2.189)$$

2.4.2 Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Wir betrachten die Bewegung eines Massepunktes mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v}_0 . Gesucht ist die Bahnkurve. Seine Position zur Zeit $t = 0$ sei $\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0$.

Der Massepunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, also

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_0. \quad (2.190)$$

Die Bahnkurve erhalten wir durch Integration nach der Zeit, also

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{c}. \quad (2.191)$$

Bei c handelt es sich um eine Integrationskonstante. Diese wird aus der Anfangsbedingung bestimmt. Also

$$\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0 = \vec{c}. \quad (2.192)$$

Somit ist die Bahnkurve gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \quad (2.193)$$

2.4.3 Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Wir betrachten die Bewegung eines Massepunktes mit konstanter Beschleunigung \vec{a}_0 . Gesucht ist die Bahnkurve. Anfangsbedingungen: Position und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$: $\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0$ und $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0$.

Aus der Beschleunigung berechnet sich die Geschwindigkeit zu

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{a}_0 t + \vec{c}_1. \quad (2.194)$$

Daraus ergibt sich die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}_0}{2} t^2 + \vec{c}_1 t + \vec{c}_2. \quad (2.195)$$

Mit den Anfangsbedingungen haben wir

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}_0}{2} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \quad (2.196)$$

Anmerkung: Ein typischer Aufgabentyp mit dieser Problemstellung ist die Bestimmung der Bahnkurve bei vorgegebener Kraft, da die Beschleunigung eines Massepunktes direkt proportional zu der auf ihn wirkenden Kraft ist (siehe später im Skript).

2.4.4 Grundbegriffe

Wir wollen hier anhand einfacher Beispiele einige Grundbegriffe verschiedener Bewegungsformen einführen. Wir beginnen mit:

Die gleichförmig geradlinige Bewegung

Bei einer gleichförmig geradlinigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v} = \text{const.} \quad (2.197)$$

Sie ist keine Funktion der Zeit. Der Massepunkt wird nicht beschleunigt, das $\ddot{\vec{r}}(t) = 0$. Er wird nicht schneller, er bewegt sich geradlinig, und er ändert auch nicht seine Bewegungsrichtung. (Beachte: Bei einer Kreisbewegung liegt eine Beschleunigung in Richtung des Mittelpunkts der Kreisbewegung vor.) Mit der Anfangsbedingung

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \quad (2.198)$$

ist die Bahnkurve durch

$$\vec{r}(t) = \vec{v}(t - t_0) + \vec{r}_0 \quad (2.199)$$

gegeben.

Die gleichförmig beschleunigte Bewegung - Beispiel: Wurf im Schwerfeld der Erde

Hier ist die Beschleunigung konstant, also

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a} = \text{const.} \quad (2.200)$$

Mit den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t_0

$$\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0 \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t = 0) = \vec{v}_0 \quad (2.201)$$

erhalten wir

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t - t_0) + \vec{v}_0 \quad (2.202)$$

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}}{2}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0. \quad (2.203)$$

Wir betrachten einen Wurf im Schwerfeld der Erde und bestimmen die Wurfparabel. Die Beschleunigung sei in y -Richtung gerichtet, also

$$\vec{a} = a\vec{e}_y. \quad (2.204)$$

Im Schwerfeld der Erde (in negative y -Richtung) ist a durch die Erdbeschleunigung gegeben,

$$a = -g, \quad \text{mit} \quad g = 9.81 \frac{m}{s^2}. \quad (2.205)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit beim Abwurf sei

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y. \quad (2.206)$$

Der Wurf findet also in der xy -Ebene statt, siehe Abb. 2.18. Damit erhalten wir für die x - und y -Komponente der Bahnkurve

$$\begin{aligned}x - x_0 &= v_{0x}(t - t_0) \\y - y_0 &= \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0).\end{aligned}\quad (2.207)$$

Auflösen der ersten Gleichung nach $(t - t_0)$ und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$y - y_0 = \frac{a}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0).\quad (2.208)$$

Die Form dieser Bewegungsgleichung ist eine Parabel.

Spezialfälle:

(a) *Keine Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung:*

Für $y = y_0$ zur Zeit $t_0 = 0$ ergibt sich dann mit $a = -g$ für die y -Komponente der Bahnkurve

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0\quad (2.209)$$

und für die Geschwindigkeitskomponente $v_y = \dot{y}$

$$\dot{y} = -gt + v_{0y}.\quad (2.210)$$

Wir nehmen an, dass der Massepunkt zur Zeit $t_0 = 0$ in der Höhe $y_0 = h$ abgeworfen wird und zu Beginn keine Geschwindigkeit, also $v_{0y} = 0$ hat. Dann ergibt sich

$$y = h - \frac{g}{2}t^2 \quad \text{und} \quad \dot{y} = -gt.\quad (2.211)$$

Es handelt sich hier um den *freien Fall*.

Beim *senkrechten Wurf nach oben* ist $y_0 = 0$. Und somit haben wir

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t \quad \text{und} \quad \dot{y} = -gt + v_{0y}.\quad (2.212)$$

(b) *Schäger Wurf:*

Hier wird der Massepunkt mit einer Geschwindigkeit abgeworfen, deren Richtung einen Winkel γ mit der x -Achse bildet, siehe Abb. 2.18. Die Anfangsbedingungen seien also

$$v_{0x} = v_0 \cos \gamma, \quad v_{0y} = v_0 \sin \gamma \quad x_0 = y_0 = 0.\quad (2.213)$$

Einsetzen in Glg. (2.207) liefert mit $t_0 = 0$

$$x(t) = v_0 t \cos \gamma \quad \text{und} \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin \gamma.\quad (2.214)$$

Auflösen der ersten Gleichung nach t und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$y(t) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \gamma}x^2 + x \tan \gamma.\quad (2.215)$$

Der Massepunkt steigt solange nach oben, bis seine Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung 0 ist. Die bis dahin vergehende *Steigzeit* t_s berechnet sich mit

$$\dot{y}(t) = v_0 \sin \gamma - gt \quad \text{und} \quad \dot{y}(t = t_s) = 0\quad (2.216)$$

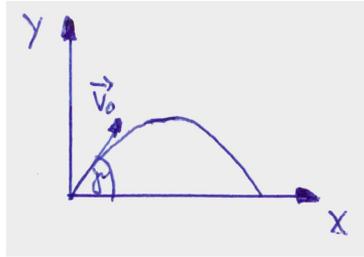


Abbildung 2.18: Der schräge Wurf.

zu

$$\dot{y}(t = t_s) = v_0 \sin \gamma - g t_s \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \gamma}{g} . \quad (2.217)$$

Hat der Massepunkt diesen Umkehrpunkt der Bewegung erreicht, so dreht er seine Bewegungsrichtung um und beginnt danach zu fallen.

Die gesamte *Wurfdauer* t_W ist die Zeit, die vergeht, bis der Massepunkt wieder am Ausgangspunkt, also $y = 0$, angekommen ist. Damit haben wir

$$y(t = t_W) = v_0 t_W \sin \gamma - \frac{g}{2} t_W^2 = 0 , \quad (2.218)$$

woraus wir berechnen

$$t_{W1} = 0 \quad \text{und} \quad t_{W2} = \frac{2v_0 \sin \gamma}{g} = 2t_s . \quad (2.219)$$

Die erste Lösung ist die triviale Lösung. Die Wurfdauer ist also $2t_s$.

Die *Wurfhöhe* ist die nach der Zeit t_s erreichte Höhe y , also

$$y(t_s) = -\frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \gamma}{g^2} + v_0 \sin \gamma \frac{v_0 \sin \gamma}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \gamma}{2g} . \quad (2.220)$$

Die maximal mögliche Wurfhöhe wird für senkrecht abwerfen, also $\gamma = \pi/2$ erreicht. Sie beträgt

$$y_{\max}(t_s) = \frac{v_0^2}{2g} . \quad (2.221)$$

Die *Wurfweite* ist die nach der Wurfdauer t_W erreichte Weite, also der x -Wert zur Zeit t_W ,

$$x(t_W) = v_0 \frac{2v_0}{g} \sin \gamma \cos \gamma = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\gamma . \quad (2.222)$$

Um den Winkel zu ermitteln, der die Wurfweite maximiert, muss das Extremum von $x(t_W)$ bezüglich γ ermittelt werden. Hierfür muss die Ableitung von $x(t_W)$ nach γ gleich null gesetzt werden und der zugehörige Winkel γ_{\max} bestimmt, der diese Gleichung erfüllt.⁸ Also

$$\frac{dx(t_W)}{d\gamma} = \frac{2v_0^2}{g} (\cos \gamma \cos \gamma - \sin \gamma \sin \gamma) = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma_{\max} = \frac{\pi}{4} . \quad (2.223)$$

⁸Mit der zweiten Ableitung muss dann noch ermittelt werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt. Ist die zweite Ableitung kleiner null, so ist es ein Maximum, andernfalls ein Minimum.

Die maximal mögliche Flugweite ergibt sich dann zu

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} . \quad (2.224)$$

Kapitel 3

Die Newtonschen Axiome

Bisher haben wir die *Kinematik*, also die Bewegung materieller Punkte, analysiert. Wir haben uns dabei aber nicht die Frage gestellt, was die Ursache für die Bewegung ist. Hiermit beschäftigt sich die *Dynamik*. Sie untersucht die *Ursachen für die Bewegung eines Körpers*.

Massepunkt: Jeder Körper besteht aus Materie und hat damit eine Masse und eine geometrische Ausdehnung, ein Volumen. Eine einfache Beschreibung ist möglich, wenn die geometrische Ausdehnung des Körpers klein ist im Vergleich zu den Dimensionen, Abmessungen und Abständen, in denen sich der Körper bewegt. In höchster Idealisierung ist die Masse des Körpers in einem materiellen Punkt vereinigt. Dieser hat keine räumliche Ausdehnung mehr. Die Modellvorstellung des materiellen Punktes oder *Massepunktes* schafft einfachste Verhältnisse, da ein Massepunkt nicht rotieren kann und sich nicht verformen kann.

Kraft: Sowohl ein Körper als auch ein Massepunkt sind Einwirkungen von außen ausgesetzt. Physikalisch spricht man von der Wechselwirkung zweier Systeme. Die *Kraft* ist die physikalische Größe, die die Einwirkung beschreibt, die den Bewegungszustand eines Körpers ändert. Dabei werden Körper unterschiedlicher Massen durch die gleiche Kraft unterschiedlich beschleunigt.

Im folgenden werden wir basierend auf den *Newtonschen Axiomen* die Bewegung materieller Körper unter dem Einfluß von Kräften untersuchen. Newton erfaßte die Wechselwirkungen zwischen beschleunigendem und beschleunigtem System begründet auf Erfahrung und durch kühne Extrapolation und formulierte die *drei Axiome* zur Mechanik. Sie definieren die Begriffe *Kraft* und *Masse*, geben ihre Verknüpfung an und legen ein Maßsystem fest. Die Newtonschen Axiome, die Newton im Jahr 1687 in seinem Buch “*Philosophiae Naturalis Principa Mathematica*” veröffentlichte, bilden die Grundsätze der Newtonschen Mechanik. Sie können allerdings nicht deduktiv abgeleitet werden, sondern sind das Ergebnis von im Alltag gesammelten Erfahrungen. Hierbei ist wichtig, dass alle von ihnen ableitbaren Aussagen und weiteren Gesetze in Übereinstimmung mit den Erfahrungen des täglichen Lebens bleiben. Die Einführung von Axiomen wird gerechtfertigt durch die Bestätigung von experimentell überprüfbareren Vorhersagen in der Realität.

Während die Newtonschen Axiome die *makroskopische Welt der klassischen Physik* exakt beschreiben, versagen sie jedoch in der mikroskopischen Welt der Atome (Quantenphysik) und bei Geschwindigkeiten, die nicht mehr klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c (Relativitätstheorie). Sie gelten nur unter gewissen Voraussetzungen. Diese sind:

- In der Newtonschen Mechanik ist die Zeit absolut. Offensichtlich ist der Begriff der Ruhe oder der Bewegung nicht absolut, da sie von der Wahl des Koordinatensystems

abhängig sind, so dass ein Körper in relativ zueinander bewegten Bezugssystemen in Ruhe oder in Bewegung sein kann. Ein einfaches Beispiel ist der Reisende in einem Zug. Absolut jedoch in allen Koordinatensystem ist in der Newtonschen Mechanik die Zeit. Sie ist in allen Koordinatensystemen gleich. Eine wichtige Konsequenz der Absolutheit der Zeit ist, dass sich Signale mit unendlich großer Geschwindigkeit im Raum übertragen lassen.

- In der Newtonschen Mechanik ist auch der Raum absolut. Der absolute Raum bezeichnet den vom Beobachter und den darin enthaltenen Objekten und darin stattfindenden physikalischen Vorgängen unabhängigen physikalischen Raum.
- Der absolute Raum zeichnet sich dadurch aus, dass die Masse eines Körpers konstant ist und insbesondere nicht von der Geschwindigkeit abhängig ist. Die Masse m eines abgeschlossenen Systems ist ferner nicht von den Prozessen in diesem System abhängig. Es gilt Massenerhaltung (ausgenommen die Raketengleichung).

Diese Voraussetzungen gelten jedoch nicht in der Relativitätstheorie. Diese postuliert die Endlichkeit der Signalgeschwindigkeit. Die größtmögliche Geschwindigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit. Abweichungen zwischen den Vorhersagen der Relativitätstheorie und der Newtonschen Mechanik treten bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit zutage. So sind z.B. die Experimente der Hochenergiephysik (Elementarteilchenphysik) ohne die Berücksichtigung relativistischer Effekte nicht erklärbar. Die Welt des Kleinsten erfordert auch die Anwendung der Quantenmechanik, die sich von der Newtonschen Mechanik unterscheidet, welche annimmt, dass sowohl Ort und Impuls unendlich genau bestimmbar sind. Die Verknüpfung von Relativitätstheorie und Quantenmechanik zur Beschreibung der Vorgänge in der Elementarteilchenphysik z.B. führt zur Quantenfeldtheorie.

3.1 Kraft und Masse

Kraft: Die auf einen Körper wirkende Kraft kann sowohl die Richtung als auch die Stärke seines Bewegungszustandes ändern. Sie ist somit eine vektorielle Größe. Wir betrachten einige Beispiele:

- (i) *Gravitationskraft:* Die Gravitationskraft beschreibt die Kraft, die ein Körper der Masse m_2 auf einen Körper der Masse m_1 ausübt. Sie ist gegeben durch

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \quad (3.1)$$

wobei \vec{r}_2 (\vec{r}_1) die Position von m_2 (m_1) beschreibt und G die Gravitationskonstante ist,

$$G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}. \quad (3.2)$$

Die auf beide Massen wirkenden Kräfte sind betragsmäßig gleich groß, haben aber ein unterschiedliches Vorzeichen, also

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.3)$$

Die Kräfte haben immer die Richtung zum jeweils anderen Körper. Das Gravitationsgesetz beschreibt somit immer eine anziehende Kraft. Die Gravitationskraft ist sehr schwach und wird erst bei großen Massen relevant.

- (ii) *Coulombkraft*: Sie beschreibt die Kraft zwischen zwei geladenen Körpern mit den Ladungen q_1 und q_2 und ist gegeben durch

$$\vec{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \quad (3.4)$$

wobei ϵ_0 die Permittivität im Vakuum ist,

$$\epsilon_0 = 8.85418781762 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}. \quad (3.5)$$

Das unterschiedliche Vorzeichen im Vergleich zur Gravitationskraft kommt daher, dass sich zwei Körper mit gleichen Ladungen abstoßen. Die Ladung kann im Gegensatz zur Masse auch negativ sein. Bei Körpern mit unterschiedlichem Vorzeichen ihrer Ladung kommt es zur Anziehung der Körper. Die Coulombkraft kann somit anziehend und abstoßend sein.

- (iii) *Lorentzkraft*: Dies ist die Kraft, die auf eine bewegte Ladung in einem elektrischen und magnetischen Feld ausgeübt wird. Sie ist durch

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.6)$$

gegeben, wobei q die Ladung und \vec{v} die Geschwindigkeit des Teilchens sind, \vec{E} das elektrische Feld und \vec{B} die magnetische Induktion bezeichnet. Die Kraft wirkt in Richtung von \vec{E} und senkrecht zu \vec{v} und \vec{B} .

- (iv) *Federkraft*: Die Federkraft wirkt zwischen zwei Körpern, die durch eine Feder verbunden sind. Gemäß dem Hookeschen Gesetz ist sie proportional zur Auslenkung. Mit dem Proportionalitätsfaktor, der Federkonstante k , ist sie also

$$\vec{F}_{12} = -k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (3.7)$$

- (v) *Reibungskraft*: Die Reibungskraft wirkt zwischen sich berührenden Körpern und entgegen der Bewegung der Körper. Sie verringert die Geschwindigkeit eines Körpers und lautet

$$\vec{F} = -f(v)\vec{v}, \quad (3.8)$$

wobei f eine Funktion der Geschwindigkeit v des Körpers ist. Bei der Stoke'schen Reibung ist $f(v)$ eine Konstante, bei der Newton'schen Reibung ist $f(v)$ proportional zur Geschwindigkeit.

Diese Kräfte und ihre Ursachen werden im Detail in den jeweiligen Bereichen der Physik besprochen, in denen sie eine Rolle spielen. Hier interessiert uns die Frage, wie sie die Bewegung eines Körpers beeinflussen, wenn sie auf ihn wirken. Es wird unterschieden zwischen **inneren** und **äußeren** Kräften. Innere Kräfte werden von den Teilchen eines Systems gegenseitig aufeinander ausgeübt. Äußere Kräfte haben den Ursprung außerhalb des Systems. Ein System wird als *abgeschlossen* bezeichnet, wenn keine äußeren Kräfte vorliegen.

Äußere Kräfte rufen ein **Kraftfeld** hervor. Es wird dabei jedem Raumpunkt \vec{r} eine Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ zugeordnet. So ruft eine elektrische Ladung beispielsweise ein elektrisches Feld hervor oder ein schwerer Körper eine Gravitationsfeld.¹

Masse: Trägheit ist der Widerstand eines Körpers gegen eine Bewegungsänderung. Das Maß für die Trägheit eines Körpers ist die träge Masse. Die physikalische Größe Masse hat außer der Eigenschaft Trägheit auch die Eigenschaft Schwere. Sowohl die auf einen Körper wirkenden als auch die von ihm verursachten Gravitationskräfte sind proportional zu seiner Masse. Diese doppelte Rolle der Masse (neben seiner trägen Masse) ist der Inhalt des *Äquivalenzprinzips*. Es drückt aus, dass die schwere und die träge Masse eines Körpers zwei äquivalente Größen sind. Experimentell lässt sich kein Unterschied nachweisen. Im Gegensatz zur Kraft ist die Masse eine Eigenschaft des Körpers und eine skalare Größe. Sie ist unabhängig vom Ort, an dem sich ein Körper befindet, und in der klassischen Mechanik auch unabhängig vom Bewegungszustand des Körpers.

3.2 Lex Prima - Das Trägheitsgesetz

In der Formulierung von Newton lautet das erste Axiom:

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Geradlinig heißt, dass seine Bewegung auf einer Gerade stattfindet. Gleichförmig heißt, dass die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit stattfindet. Diese Aussage macht aber nur dann Sinn, wenn es ein eindeutiges Bezugssystem gibt, in dem die Bewegung des Massepunktes beschrieben wird. Dies ist ein ruhendes System in dem von Newton postulierten absoluten Raum. Zwar kann experimentell nicht überprüft werden, ob ein Bezugssystem im absoluten Raum ruht oder nicht. Entscheidend ist aber, dass das Postulat sagt, dass ein solches Bezugssystem existiert. Dieses Bezugssystem wird *Inertialsystem* genannt. Eine gute Näherung für ein Inertialsystem ist beispielsweise ein Bezugssystem mit seinem Koordinatenursprung in der Sonne und Achsen, die nach bestimmten Fixsternen ausgerichtet sind. Man nennt Bezugssysteme, die sich gleichförmig geradlinig zu einem Inertialsystem bewegen, ebenfalls Inertialsysteme. Da die Erde relativ zum Fixsternhimmel rotiert, stellt sie kein Inertialsystem dar. Ist die Erdrotation im Vergleich zum Zeitablauf eines Experiments vernachlässigbar langsam, dann ist ein mit der Erde verbundenes Bezugssystem in sehr guter Näherung ein Inertialsystem. Somit ist ein Laborkoordinatensystem für die meisten Probleme ausreichend. In Anbetracht dieser Überlegungen lautet die moderne Formulierung des

¹Neben Vektorfeldern \vec{V} , die einem Vektor eine Vektorgröße zuordnen, $\vec{V} : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gibt es Skalarfelder S . Diese ordnen einer Vektorgröße einen Skalar zu, $S : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Beispiel ist die Temperaturverteilung in einem Raum.

ersten Newtonschen Axioms:

Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Massepunkt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt. Solche Systeme heißen Inertialsysteme.

3.3 Lex Secunda - Aktionsprinzip

Aus dem ersten Gesetz können wir schlussfolgern, dass ein bewegter Massepunkt der Einwirkung anderer Massepunkte ausgesetzt ist, dass diese also auf ihn eine Kraft ausüben. Im Rahmen der Mechanik interessiert uns die Wirkung einer Kraft, aber nicht ihre Ursache.² In der Formulierung Newtons lautet das zweite Newtonsche Axiom:

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, in der die Kraft wirkt.

Newtons mathematische Formulierung umfasste bereits den Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} . \quad (3.9)$$

Modern formuliert lautet also Newtons zweites Gesetz:

Die Änderung des Bewegungszustands (Impuls) ist proportional zur Kraft und zeigt in deren Richtung.

Wir haben also

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} . \quad (3.10)$$

Ist die Masse konstant, so ergibt sich das Newtonsche Grundgesetz

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}(t) . \quad (3.11)$$

Ist die Masse nicht konstant, so muss Glg. (3.10) angewandt werden. Ein Beispiel ist die Berechnung der Flugbahn einer Rakete, deren Masse sich verringert, während der Treibstoff verbrannt wird. Das Gesetz Glg. (3.11) gilt nicht in der relativistischen Mechanik, da hier die Masse nicht mehr konstant und eine Funktion der Geschwindigkeit ist, d.h.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (3.12)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und m_0 die Ruhemasse des Massepunktes/Körpers ist.

Wie bereits oben erwähnt bezeichnet die träge Masse den Widerstand des Massepunktes gegen die Änderung seines Bewegungszustandes. Ihr Wert kann dynamisch in einer Vergleichsmessung mit einem Massepunkt bekannter Masse bestimmt werden. Es wird die Beschleunigung gemessen, wenn dieselbe Kraft auf die beiden Massepunkte wirkt. Das Massenverhältnis ergibt sich zu

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 \quad \rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\ddot{\vec{r}}_2|}{|\ddot{\vec{r}}_1|} . \quad (3.13)$$

²Die Ursache der Kräfte wird in anderen Gebieten der Physik behandelt, etwa der Elektrodynamik, der Atom- und Elementarteilchenphysik, der Gravitationsphysik. Diese Themengebiete werden in den folgenden Semestern behandelt.

Die Masse kann auch aus der Bewegung eines Massepunktes im Schwerfeld der Erde bestimmt werden. Es ist

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad (3.14)$$

wobei \vec{g} die Erdbeschleunigung bezeichnet. Man beobachtet im Experiment, dass jeder Körper unabhängig von seiner stofflichen Zusammensetzung gleich schnell fällt. Es gilt im Schwerfeld der Erde für die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$, dass $\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$.

Schließlich kann die Masse durch eine Waage bestimmt werden, mit deren Hilfe zwei unterschiedliche Massepunkte in einen Gleichgewichtszustand gebracht werden. Bei dieser statischen Messung spielt die Trägheit des Massepunktes keine Rolle, da er sich in Ruhe befindet. Es wird hier also die schwere Masse bestimmt.

Die Kombination von statischen und dynamischen Messungen ergibt, dass zwei verschiedene Körper, die am selben Punkt im Raum das gleiche Gewicht besitzen, auch die gleiche träge Masse haben. Es gilt, dass schwere und träge Masse identisch sind. Diese keineswegs triviale Feststellung wurde in allen bisherigen Experimenten immer wieder bestätigt.

3.4 Lex Tertia - das Wechselwirkungsprinzip, actio = reactio

Schauen wir uns die Wirkung einer Kraft an, so zeigt die Erfahrung, dass von einem Massepunkt, der eine Kraft erfährt, zeitgleich auch immer eine Kraftwirkung ausgeht. Die Kraftwirkung ist also immer wechselseitig. Diese Erkenntnis wird im dritten Newtonschen Axiom formuliert:

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper 1 auf einen anderen Körper 2 eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft von Körper 2 auf Körper 1 (reactio).

Wenn wir mit \vec{F}_{12} die Kraft von Körper 2 auf Körper 1 bezeichnen und mit der Kraft \vec{F}_{21} die von Körper 1 auf Körper 2, so gilt also

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.15)$$

Dieses Axiom, das auch unter den Namen Wechselwirkungsprinzip, Gegenwirkungsprinzip oder Reaktionsprinzip bekannt ist, ist insbesondere für die Diskussion von Systemen aus mehreren Massepunkten wichtig.

3.5 Superpositionsprinzip

In Newtons Werk wird angenommen, dass das Prinzip der ungestörten Überlagerung, auch Unabhängigkeitsprinzip oder Superpositionsprinzip genannt, gilt. Dieses Prinzip besagt:

Wirken mehrere Kräfte auf einen Massepunkt, so kann ihre Wirkung durch vektorielle Superposition beschrieben werden.

Die Kräfte ändern sich hierbei nicht durch die Anwesenheit anderer Kräfte. Es gilt also, dass die resultierende Kraft \vec{F} gegeben ist durch

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.16)$$

Dieses Prinzip ist auch als das vierte Newtonsche Gesetz bekannt.

3.6 Mathematischer Einschub - Differentialgleichungen

Die Anwendung des 2. Newtonschen Axioms führt auf Bewegungsgleichungen. Hierbei handelt es sich um sogenannte Differentialgleichungen, abgekürzt DGL, zweiter Ordnung. Betrachten wir das folgende Beispiel: Uns interessiert die Bewegung eines Körpers der Masse m , auf den eine Federkraft mit Federkonstante k wirkt und der reibungsfrei auf einer Oberfläche gleiten soll. Die Federkraft auf den Körper ist proportional zu seiner Auslenkung x , die zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich null sei. Also

$$F = -kx(t) . \quad (3.17)$$

Das zweite Newtonsche Axiom besagt, dass

$$F = m\ddot{x}(t) . \quad (3.18)$$

Damit erhalten wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) . \quad (3.19)$$

Ihre Lösung $x(t)$ beschreibt die Bewegung des Körpers.

Unter einer Differentialgleichung versteht man eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion, die von einer oder mehreren Variablen abhängen kann, in der auch die Ableitungen der Funktion vorkommen. Sie sind ein wichtiges mathematisches Werkzeug, da viele Naturgesetze mit Hilfe von Differentialgleichungen formuliert werden können. Es gibt verschiedene Arten von Differentialgleichungen. Unter **gewöhnlichen Differentialgleichungen** versteht man solche, bei denen die gesuchte Funktion nur von einer Variablen abhängt.³ Sie hat die allgemeine Form

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 . \quad (3.20)$$

Diese Darstellung heißt *implizit*. Ist sie nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst, so heißt sie *explizit*. Sie sieht dann folgendermaßen aus

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) . \quad (3.21)$$

Die Ordnung der höchsten in einer DGL auftretenden Ableitung heißt die *Ordnung der DGL*. Eine explizite DGL zweiter Ordnung ist z.B.

$$y''(x) = -5y(x) + 10 \quad (3.22)$$

oder auch

$$\ddot{x}(t) = 8x(t) - 7\dot{x}(t) + t^2 . \quad (3.23)$$

³Hängt die Funktion von mehreren Variablen ab und treten in der Gleichung partielle Ableitungen nach mehr als einer Variablen auf, so heißt sie partielle DGL. Wir werden diese hier nicht weiter behandeln.

In der theoretischen Mechanik treten üblicherweise DGLs zweiter Ordnung auf.

Eine **lineare Differentialgleichung** ist eine DGL, in der keine Produkte von Ableitungen auftreten und auch keine Potenzen der Funktion. Man kann sie schreiben als

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}(x) + b(x) = 0 . \quad (3.24)$$

Bei einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten sind die Konstanten keine Funktion der Variablen, also hier $a_i(x) = \text{const}$. Eine lineare DGL heißt *homogen*, wenn außerdem $b(x) = 0$. Ein Beispiel für eine *homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten* ist der freie harmonische Oszillator, den wir später in der VL noch behandeln werden. Der *Lösungsansatz* für diese Art der DGL ist der Exponentialansatz

$$y(x) = e^{\lambda x} . \quad (3.25)$$

Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(x) = 0 \quad (3.26)$$

liefert

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) e^{\lambda x} = 0 . \quad (3.27)$$

Man erhält nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn der Term in der Klammer null wird. Die Aufgabe reduziert sich also auf die Suche nach den Nullstellen des Polynoms (*charakteristisches Polynom* genannt) n -ten Grades,⁴

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 . \quad (3.28)$$

Man erhält n Lösungen λ_i ($i = 1, \dots, n$). Die allgemeine Lösung der DGL ergibt sich dann zu

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} . \quad (3.29)$$

Die unbekanntenen Koeffizienten c_i werden aus den Anfangsbedingungen der Differentialgleichung bestimmt. Man benötigt also zur Lösung einer DGL n -ter Ordnung n Anfangswerte.

Aufgaben zu Differentialgleichungen werden auf dem Übungsblatt gegeben.

3.7 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Durch die Newtonschen Axiome wird die Bewegung von Körpern nur als Bewegung relativ zu einem Bezugssystem definiert. Wird das Bezugssystem starr verschoben, so bleibt die Art der Bewegung gleichwertig. Dies kann bei bewegten Bezugssystemen anders sein. So erfährt ein Massepunkt, der sich in einem Bezugssystem geradlinig und gleichförmig bewegt, in einem rotierenden System eine Beschleunigung. Die Newtonschen Axiome sind in einem solchen Bezugssystem nicht mehr anwendbar. Die Newtonschen Axiome sind nur dann sinnvoll, wenn sie sich auf eine Klasse von Bezugssystemen bezieht, die man als Inertialsysteme bezeichnet. Wir fassen zusammen:

⁴Diese Nullstellen sind häufig komplexwertig.

1. Nicht alle Koordinatensysteme sind Inertialsysteme. So sind etwa rotierende Systeme keine Inertialsysteme.
2. Es gibt mindestens ein Inertialsystem, z.B. bezogen auf die Fixsterne. Daraus folgt, dass es Koordinatensysteme gibt, in denen die Newtonschen Axiome gelten.

Um zu klären, wie groß die Gesamtheit aller Inertialsysteme ist, muss untersucht werden, welche Koordinatentransformation ein Inertialsystem Σ in ein anderes Inertialsystem Σ' überführt. Die Forderung muss sein, dass bei der Transformation keine Kraft auf den Massepunkt ausgeübt werden darf. Mit den Ortsvektoren \vec{r} und \vec{r}' in Σ und Σ' , muss also gelten

$$m\ddot{\vec{r}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad m\ddot{\vec{r}}' = 0 . \quad (3.30)$$

Damit scheidet die Rotation als mögliche Transformation aus. Denn die damit einhergehende Richtungsänderung der Geschwindigkeit würde automatisch eine Beschleunigung notwendig machen. Mögliche Transformationen, um ein Inertialsystem in ein anderes zu überführen, sind durch die Translation in Raum und Zeit, die Transformation auf ein Bezugssystem mit gleichförmiger Relativgeschwindigkeit \vec{v} und/oder die Verdrehung um einen festen Winkel gegeben. Das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik bzw. das *Galileische Relativitätsprinzip* besagt:

Bezugssysteme, die relativ zu einem Inertialsystem eine unbeschleunigte Translationsbewegung ausführen, sind ebenfalls Inertialsysteme und für die Beschreibung mechanischer Vorgänge vollkommen gleichwertig.

Oder anders gesagt

Alle Inertialsysteme sind gleichwertig. Die Naturgesetze haben für alle Beobachtenden dieselbe Form.

Die Transformation der Inertialsysteme wird als Galilei-Transformation bezeichnet. Die Galilei-Transformation besteht aus den folgenden Einzeltransformationen, die miteinander kombiniert werden können:

- ◇ Die Verschiebung/Translation der Zeit. Dabei geht t in Σ in t' in Σ' über. Also

$$t \rightarrow t' = t + b , \quad b = \text{const.} \quad (3.31)$$

Wir benötigen zur Beschreibung dieser Translation einen Parameter (b).

- ◇ Die Translation im Raum beschrieben durch

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a} , \quad \vec{a} = \text{konst. Vektor} . \quad (3.32)$$

Zur Beschreibung benötigen wir 3 Parameter, die 3 Koordinaten des Vektors \vec{a} .

- ◇ Die Drehung mit einer orthogonalen Drehmatrix A , beschrieben durch

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = A\vec{r} . \quad (3.33)$$

Zur Beschreibung benötigen wir 3 Parameter (die Matrix ist orthogonal!).

- ◇ Die Transformation auf ein Bezugssystem mit gleichförmig konstanter Relativgeschwindigkeit \vec{v} . Sie wird beschrieben durch

$$\vec{r}' \rightarrow \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t . \quad (3.34)$$

Zur Beschreibung benötigen wir 3 Parameter, die 3 Koordinaten des Vektors \vec{v} .

Die Galileitransformation wird also durch insgesamt 10 Parameter, einen für die Zeit und 9 für die Raumdimensionen, beschrieben. Man nennt Galilei-Transformationen, für welche $\det A = +1$ (eigentlich) und t nach $+t + b$ (orthochron)⁵ transformiert wird *eigentlich orthochron*.

Es gibt unendlich viele Inertialsysteme, die sich z.B. mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegen. Die Grundgleichungen der Mechanik sind unter der Galilei-Transformation invariant. Aber Achtung, die Galilei-Transformation gilt nicht mehr im Rahmen der Relativitätstheorie. Sie wird dort durch die Lorentz-Transformation ersetzt.

⁵und nicht nach $-t + b$

Kapitel 4

Beschleunigte Bezugssysteme Scheinkräfte

Wir haben gelernt, dass die Newtonschen Axiome für Inertialsysteme gelten. Die Frage stellt sich, ob die Newtonschen Axiome so modifiziert werden können, dass sie auch für nicht-Inertialsysteme, also z.B. für beschleunigte Bezugssysteme gelten. Wir werden im Folgenden diese Frage beantworten und finden, dass dies möglich ist, indem sogenannte Scheinkräfte eingeführt werden. Mit deren Einführung gilt dann wieder, dass $\vec{F} = m\vec{a}$ ist. Scheinkräfte sind Kräfte, die vom Bezugssystem abhängen, in dem man einen physikalischen Vorgang beobachtet oder beschreibt. Sie verschwinden, wenn man in ein Inertialsystem übergeht. Beispiele sind die *Corioliskraft* und die *Zentrifugalkraft* in rotierenden Systemen.

Um die Frage zu beantworten, untersuchen wir im Folgenden die Bewegung in einem Bezugssystem Σ' , das sich nicht mehr geradlinig und gleichförmig relativ zu einem anderen Bezugssystem Σ bewegen soll. Dieses andere Bezugssystem Σ soll ein Inertialsystem sein, so dass also

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \quad (4.1)$$

gilt. Hingegen kann Σ' beispielsweise rotieren.

In den zwei verschiedenen Bezugssystemen wird die Bewegung eines Massepunktes unterschiedlich beschrieben. Der Ort des Massepunktes in Σ sei gegeben durch $\vec{r}(t)$, der Ort des Massepunktes in Σ' sei durch $\vec{r}'(t)$ gegeben. Ferner sei der Vektor \vec{r}_0 der Vektor vom Ursprung des Koordinatensystems Σ zum Koordinatensystem Σ' , siehe Abb. 4.1. Es gilt

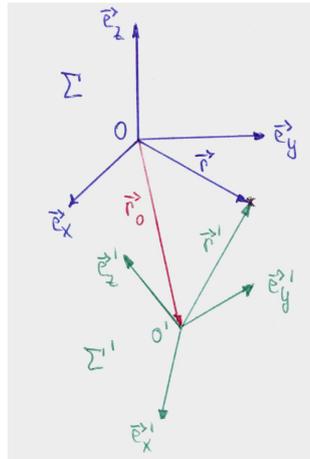
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) , \quad (4.2)$$

mit

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{e}'_x(t) + y'(t)\vec{e}'_y(t) + z'(t)\vec{e}'_z(t) . \quad (4.3)$$

Es ist zu bemerken, dass die Einheitsvektoren im gestrichenen Koordinatensystem von der Zeit abhängen. Damit ist es möglich, die Rotation zu berücksichtigen. Die Geschwindigkeit des Massepunktes von einem Beobachter im ungestrichenen System aus berechnet sich dann zu

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{x}'\vec{e}'_x + \dot{y}'\vec{e}'_y + \dot{z}'\vec{e}'_z + x'\dot{\vec{e}}'_x + y'\dot{\vec{e}}'_y + z'\dot{\vec{e}}'_z . \quad (4.4)$$

Abbildung 4.1: Die beiden Bezugssysteme Σ und Σ' .

Der Massepunkt hat im gestrichenen Koordinatensystem, in dem sich die Achsenrichtung für den Beobachter nicht ändert und die Einheitsvektoren damit fest sind, die Geschwindigkeit

$$\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt} = \dot{x}'\vec{e}'_x + \dot{y}'\vec{e}'_y + \dot{z}'\vec{e}'_z. \quad (4.5)$$

Die gestrichene Ableitung soll hier beschreiben, dass sich die Ableitung auf eine gestrichene Größe bezieht, auf die Änderung einer gestrichenen Größe gemessen vom gestrichenen System aus. Es handelt sich hier also um die Geschwindigkeit gemessen im gestrichenen Koordinatensystem. Man bezeichnet

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{\vec{r}}_0 \quad (4.6)$$

als Translationsgeschwindigkeit. Man nennt

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (4.7)$$

die Absolutgeschwindigkeit. Man bezeichnet

$$\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt} \quad (4.8)$$

als die Relativgeschwindigkeit im beschleunigten Bezugssystem.

Wir wollen nun die zeitliche Änderung der Basisvektoren beschreiben. Dies kann durch die Rotation des Systems um eine Achse durch seinen Ursprung geschehen. Wir betrachten hierfür Fig. 4.2. Daraus lesen wir ab

$$|d\vec{a}| = |\vec{a}| \sin \theta d\phi \quad \rightsquigarrow \quad \frac{|d\vec{a}|}{dt} = |\vec{a}| \sin \theta \dot{\phi} = |\vec{a}| \omega \sin \theta. \quad (4.9)$$

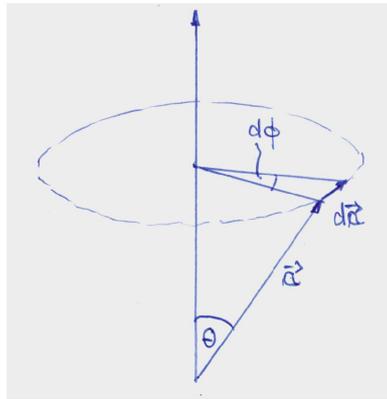


Abbildung 4.2: Rotation.

Dabei bezeichnet ω den Betrag der Winkelgeschwindigkeit, $\omega = d\phi/dt$. Die Drehung kann allgemein mit Hilfe des Vektors $\vec{\omega}$ der momentanen Winkelgeschwindigkeit, der in Richtung der Drehachse zeigt, beschrieben werden durch

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{a} . \quad (4.10)$$

Diese Gleichung gilt für alle Vektoren, und insbesondere auch für die Einheitsvektoren, also z.B.

$$\frac{d\vec{e}'_x}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}'_x . \quad (4.11)$$

Somit haben wir für die letzten drei Terme der Absolutgeschwindigkeit

$$x'\dot{\vec{e}}'_x + y'\dot{\vec{e}}'_y + z'\dot{\vec{e}}'_z = \vec{\omega} \times \vec{r}' . \quad (4.12)$$

Für die Absolutgeschwindigkeit ergibt sich also

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_0 + \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' . \quad (4.13)$$

Bei verschwindender Relativgeschwindigkeit $d'\vec{r}'/dt$ erhalten wir die sogenannte Führungsgeschwindigkeit,

$$\vec{v}_f(t) = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' . \quad (4.14)$$

Da wir $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}'$ haben, ist die zeitliche Ableitung des gestrichelten Vektors gemäß Glg. (4.13) gegeben durch

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' . \quad (4.15)$$

Diese Herleitung für den Ortsvektor ist allgemein gültig, so dass man daraus für beliebige Vektoren eine Vorschrift ableiten kann, wie man in einem Inertialsystem einen beliebigen Vektor ableitet, der in einem rotierenden Bezugssystem dargestellt wird. Diese lautet

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \vec{\omega} \times . \quad (4.16)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung beschreibt die Komponenten des Vektors im gestrichenen Koordinatensystem, der zweite Term beschreibt eine Rotation. Also haben wir für einen beliebigen Vektor $\vec{k} = k'_x(t)\vec{e}'_x + k'_y(t)\vec{e}'_y + k'_z(t)\vec{e}'_z$ im Koordinatensystem Σ' dann

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d'\vec{k}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{k}. \quad (4.17)$$

Und insbesondere für den Fall der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, also wenn $\vec{k} = \vec{\omega}$, erhalten wir

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}, \quad (4.18)$$

da

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}. \quad (4.19)$$

Wir finden also, dass die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit in beiden Koordinatensystemen gleich ist.

Im folgenden soll die Bewegungsgleichung berechnet werden. Im Inertialsystem haben wir laut dem 2. Newtonschen Gesetz

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (4.20)$$

Wir benötigen also (siehe Glg. (4.13))

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \frac{d}{dt} \left(\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right). \quad (4.21)$$

Wir werten zunächst den letzten Term aus. Also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}' &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}' - \dot{\vec{r}}_0) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) \\ &= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Den ersten Term der rechten Seite können wir gemäß Glg. (4.16) umschreiben zu

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (4.23)$$

Der zweite Term der rechten Seite lässt sich schreiben als

$$\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (4.24)$$

Der letzte Term ist gemäß Glgen. (4.15) und (4.8)

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \quad (4.25)$$

Somit finden wir also insgesamt für die Beschleunigung $d\dot{\vec{r}}'/dt$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\vec{r}}'}{dt} &= \frac{d\dot{\vec{r}}_0}{dt} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \ddot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\vec{a}'}_* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\vec{r}'}_{**}) + 2\vec{\omega} \times \underbrace{\vec{v}'}_{***} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Hierbei haben wir mit * die Beschleunigung, mit ** den Ort(svektor) und mit *** die Geschwindigkeit im gestrichenen d.h. bewegten Koordinatensystem. Auflösen der Glg. (4.26) nach \vec{a}' und, nach Multiplikation der Gesamtgleichung mit m , Verwendung von $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ liefert die Bewegungsgleichung im Nicht-Inertialsystem:

$$m\vec{a}' = \underbrace{\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0}_{\vec{F}_{\text{trans}}} - \underbrace{m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] }_{\vec{F}_{\text{Zent}}} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\vec{F}_{\text{Cor}}} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\vec{F}_{\text{az}}} . \quad (4.27)$$

Wir finden also, dass das Newtonsche Gesetz im beschleunigten Bezugssystem Σ' nicht mehr gilt. Denn neben der von außen eingepägten Kraft \vec{F} wirken vier weitere Kräfte auf den Massepunkt in beschleunigten Bezugssystemen. Diese Kräfte heißen Scheinkräfte oder auch Trägheitskräfte. Die im Nicht-Inertialsystem zusätzlich auftretenden Kräfte sind notwendig, um die gleichförmige Bewegung eines kräftefreien Massepunktes im Inertialsystem zu garantieren. Die Gleichung (4.27) kann als Verallgemeinerung des Grundgesetzes der Mechanik verstanden werden und in beliebigen Bezugssystemen angewandt werden.

Während die eingepägte Kraft \vec{F} physikalische Realität ist und die an einem Massepunkt angreifende Kraft beschreibt, die durch die Wechselwirkung mit anderen physikalischen Objekten hervorgerufen wird, und die unabhängig von der Wahl des Bezugssystems ist, hängen Scheinkräfte von der Bewegung des Bezugssystems ab. Sie können gemessen werden, und ihre Berücksichtigung ist wichtig, da sie im beschleunigten System wie die echten Kräfte im Inertialsystem wirken.

4.1 Die Scheinkräfte

4.1.1 Die Translationskraft

Die Translationskraft

$$\vec{F}_{\text{trans}} = -m \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} . \quad (4.28)$$

Sie verursacht eine beschleunigte geradlinige Bewegung.

4.1.2 Die Zentrifugalkraft

Die Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{\text{Zent}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') . \quad (4.29)$$

Die Zentrifugalkraft, auch Fliehkraft (lat. centrum=Mitte, fugere=fliehen) genannt, zeigt radial nach außen, im Gegensatz zur Zentripetalkraft, die zum Zentrum nach innen zeigt. Wir spüren diese Trägheitskraft z.B., wenn wir im Kettenkarussell in die Sitze nach außen gedrängt werden. Bei der Zentrifugalkraft handelt es sich um den Widerstand, den der Körper nach dem Trägheitsprinzip der Änderung seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzt, wenn er einer gekrümmten Bahn folgt. Die Zentripetalkraft hingegen, die der Zentrifugalkraft stets entgegengesetzt gleich groß ist, verursacht diese Änderung der Bewegungsrichtung.

4.1.3 Die Corioliskraft

Die Corioliskraft

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' . \quad (4.30)$$

Die Corioliskraft ist nur dann ungleich null, wenn eine Bewegung im beschleunigten Bezugssystem stattfindet und diese nicht parallel zu $\vec{\omega}$ ist. Sie ist maximal, wenn die Winkelgeschwindigkeit und die Bahngeschwindigkeit senkrecht aufeinander stehen. Wir betrachten zwei Spezialfälle in Fig. 4.3 (a) und (b). (Der Vektor $\vec{\omega}$ zeigt aus der Bildebene hinaus nach oben.)

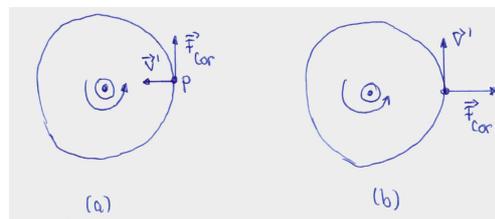


Abbildung 4.3: Die Corioliskraft.

Figur 4.3 (a) zeigt die radiale Bewegung auf einem Karussell, bei der sich die Person P mit \vec{v}' in Richtung Zentrum bewegt. Die Corioliskraft wirkt in diesem Fall tangential zur Bewegungsrichtung. P muss \vec{F}_{Cor} entgegenwirken.

Figur 4.3 (b) zeigt die tangentielle Bewegung von P auf einem Karussell. In diesem Fall zeigt \vec{F}_{Cor} nach außen.

4.1.4 Die Azimutalkraft

Die Azimutalkraft

$$\vec{F}_{\text{az}} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' . \quad (4.31)$$

Die Azimutalkraft tritt auf, falls die Änderung der Winkelgeschwindigkeit nicht null ist, falls also die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant ist.

Kapitel 5

Erhaltungssätze

Mit den Newtonschen Axiomen sind wir nun in der Lage, verschiedene Probleme der Mechanik zu lösen. Eine mögliche Aufgabe kann z.B. darin bestehen, mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms, die Bahnkurve eines Massepunktes zu berechnen, bei gegebener äußerer Kraft \vec{F} . Die Kraft ist i.A. eine Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit. Es gilt also, folgende DGL zu lösen,

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) . \quad (5.1)$$

Da es sich um 3 DGLs (für jede Raumkomponente eine) zweiter Ordnung handelt, benötigen wir $3 \times 2 = 6$ Anfangsbedingungen. Im allgemeinen werden als Anfangswerte der Ort und die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 verwendet, also

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \quad \text{und} \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) . \quad (5.2)$$

Mit diesen Anfangswerten und der Angabe der Kraft ist die mechanische Bewegung vollständig bestimmt. Wenn sie einmal bekannt ist, können damit alle dynamischen Größen des Massepunktes zu jedem beliebigen Zeitpunkt in der Zukunft vorausgesagt werden. Die Lösung der Bewegungsgleichungen kann sich jedoch als recht kompliziert erweisen. Das physikalische Problem und dessen Lösung kann jedoch wesentlich vereinfacht werden, wenn man (falls möglich) Erhaltungssätze verwendet. Man sagt, dass eine physikalische Größe G erhalten ist, falls sie nicht von der Zeit abhängt, also

$$\frac{dG}{dt} = 0 . \quad (5.3)$$

Man nennt G das *Integral der Bewegung*. Bevor die Erhaltungssätze diskutiert werden, kommt aber zunächst wieder ein kleiner mathematischer Einschub.

5.1 Mathematischer Einschub: Vektoralgebra

5.1.1 Gradient

Wir betrachten eine *skalare* Funktion ϕ , die von allen drei Raumkomponenten abhängt, also $\phi = \phi(x, y, z)$. Der *Gradient* der skalaren Funktion ist gegeben durch

$$\text{grad}\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{F}(x, y, z) . \quad (5.4)$$

Der Gradient ist ein Vektor. Er zeigt in Richtung der maximalen Änderung der skalaren Größe, und sein Betrag gibt die dazu gehörige Stärke der Änderung an. Wir können uns z.B. die Höhenkarte einer Landschaft als Funktion von $h(x, y)$ vorstellen. Diese Funktion gibt für jeden Punkt (x, y) die Höhe an diesem Ort an. Der Gradient an der Stelle (x, y) ist dann ein Vektor in der xy -Ebene, der in Richtung des steilsten Anstiegs von h an dieser Stelle zeigt. Seine Länge ist ein Maß für die Steilheit bzw. Steigung. Der Gradient kann auch mit Hilfe des *Nabla-Operators* ∇ (manchmal auch $\vec{\nabla}$ geschrieben) angegeben werden. Bei dem Nabla-Operator handelt es sich um einen vektoriellen Differentialoperator, der auf skalare oder vektorielle Funktionen angewandt wird. Er ist gegeben durch

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Die Anwendung des Nabla-Operators auf eine skalare Größe führt auf einen Vektor. Wir haben also

$$\nabla\phi(x, y, z) = \text{grad}\phi(x, y, z). \quad (5.6)$$

Die infinitesimale Änderung $d\phi$ der skalaren Funktion in einer bestimmten Richtung, gegeben durch den infinitesimal kleinen Vektor mit einer bestimmten Richtung, $d\vec{r}$, berechnet sich zu

$$d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \text{grad}\phi \cdot d\vec{r}. \quad (5.7)$$

5.1.2 Divergenz

Wendet man den Nabla-Operator mit einem Skalarprodukt auf eine Vektorfunktion

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

an, so erhält man die *Divergenz* der Vektorfunktion:

$$\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = \text{div}\vec{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = g(x, y, z). \quad (5.9)$$

Man erhält als Resultat eine skalare Funktion. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalarfeld, das an jedem Punkt angibt, wie sehr die Vektoren in einer kleinen Umgebung des Punktes auseinanderstreben. Wenn man das Vektorfeld als Strömungsfeld einer Größe interpretiert, so beschreibt die Divergenz den Fluss der durch $\vec{f}(x, y, z)$ beschriebenen Größe durch eine bestimmte Fläche. Ist die Divergenz an einem bestimmten Raumpunkt positiv, so befindet sich dort eine Quelle. Ist sie an einem bestimmten Raumpunkt negativ, so befindet sich dort eine Senke. Verschwindet die Divergenz, so ist das Vektorfeld an diesem Raumpunkt quellfrei.

5.1.3 Rotation

Die Anwendung des Nabla-Operators auf eine Vektorfunktion $\vec{F}(x, y, z)$ mit einem Kreuzprodukt liefert die *Rotation* der Vektorfunktion:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F}(x, y, z) &= \text{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

wobei im letzten Schritt der Übersichtlichkeit halber (x, y, z) weggelassen wurde. Die Rotation einer Vektorfunktion ist wieder eine Vektorfunktion. Der Betrag entspricht der maximalen Rotation an diesem Punkt, und die Richtung steht senkrecht auf der Ebene der Rotation. Die Rotation ist ein Maß für die Verwirbelung. Die Rotation findet z.B. Verwendung im *Satz von Stokes*. Dieser besagt:

Satz von Stokes: Sei $\vec{F}(\vec{r})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet Ω . Sei $\Sigma \subset \Omega$ eine Fläche mit Rand $R(\Sigma)$ (siehe Abb. 5.1), so gilt

$$\int \int_{\Sigma} d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F}(\vec{r})) = \oint_{R(\Sigma)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}). \quad (5.11)$$

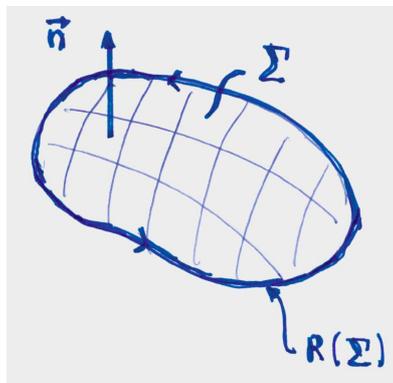


Abbildung 5.1: Die Oberfläche Σ und ihr Rand $R(\Sigma)$.

Damit wird also ein Flächenintegral in ein Linienintegral überführt, was eine wesentliche Vereinfachung des Rechenaufwandes darstellt. Bemerkungen: (i) $d\vec{A}$ zeigt in Richtung des Normalenvektors \vec{n} der Fläche. (ii) \vec{r} ist eine Parametrisierung des Randes der Fläche. (iii) Es gibt noch weitere Integralsätze wie etwa den Satz von Gauß, die wir aber zunächst nicht benötigen. Sie werden diese Sätze im weiteren Verlauf des Studiums kennenlernen.

5.1.4 Jacobi-Determinante

Die *Jacobi-Determinante* (auch *Funktionaldeterminante*) tritt auf, wenn Sie in einem mehrdimensionalen Integral eine Variablentransformation machen. Für eine differenzierbare Funk-

tion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Funktionaldeterminante definiert als

$$\det(Df(x)) = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i) \right)_{i,j=1,\dots,n} . \quad (5.12)$$

Z.B. soll eine Funktion, die von den kartesischen Koordinaten abhängt, $F = F(\vec{r})$, über ein Volumen Ω integriert werden. Oft erweist es sich als günstiger, über Kugelkoordinaten zu integrieren. Hierfür benötigen wir eine Koordinatenstransformation. Diese sei durch Φ gegeben. Damit haben wir ($dV = dx dy dz$)

$$\int_{\Omega} F(\vec{r}) dV = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} F(\Phi(r, \theta, \varphi)) \cdot |\det D\Phi(r, \theta, \varphi)| dr d\theta d\varphi . \quad (5.13)$$

Es ist zu beachten, dass der Betrag der Determinanten verwendet werden muss.

Wir betrachten als Beispiel den Übergang von den kartesischen zu den den Polarkoordinaten (im Fall eines Flächenintegrals beispielsweise). Die Umrechnungsformeln (die also der obigen Koordinatentransformation Φ entsprechen) lauten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die Funktionaldeterminante lautet also

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r . \quad (5.15)$$

Damit ergibt sich für das Flächenelement $dA = dx dy$

$$dA = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| dr d\varphi = r dr d\varphi . \quad (5.16)$$

5.2 Impulserhaltung

Die Impulserhaltung folgt aus dem zweiten Newtonschen Axiom,

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad \text{mit} \quad \vec{p}(t) = m(t) \dot{\vec{r}}(t) . \quad (5.17)$$

Wenn keine Kraft wirkt, also $\vec{F} = 0$, dann folgt die *Impulserhaltung*:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{p}(t) = \text{const.} \quad (5.18)$$

Hierbei handelt es sich um ein erstes Integral der Bewegungsgleichung. Es bedeutet, wie uns bereits bekannt ist, dass ein kräftefreier Massepunkt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt oder aber komplett in Ruhe ist.

5.3 Energieerhaltung

Zunächst soll die *Arbeit* definiert werden. Eine an einem Massepunkt angreifende Kraft, die den Massepunkt von Punkt P_1 nach P_2 bewegt, verrichtet eine Arbeit. Die infinitesimale Arbeit einer infinitesimalen Verschiebung beträgt

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \phi = F_s ds . \quad (5.19)$$

Bei $ds = |d\vec{r}|$ handelt es sich um das Linienelement, und ϕ ist der Winkel zwischen dem Weg und der Kraft, F_s ist die Kraftkomponente entlang der Richtung des Weges. Die gesamte Arbeit für die Verschiebung des Massepunktes von P_1 nach P_2 beträgt

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} . \quad (5.20)$$

Dabei ist C der Weg, entlang dessen der Massepunkt verschoben wird. Die Arbeit ist im Allgemeinen eine Funktion der Kraft, der Punkte P_1 und P_2 und des gewählten Weges.

Die *Leistung* ist definiert als die Arbeit, die pro Zeiteinheit verrichtet wird,

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} . \quad (5.21)$$

Im Folgenden wird die Energieerhaltung hergeleitet:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \dot{\vec{r}} \quad (5.22)$$

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} . \quad (5.23)$$

Bei dem Term in der Klammer handelt es sich um die *kinetische Energie* bzw. die Bewegungsenergie, die wir mit T bezeichnen:

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{m}{2} v^2 . \quad (5.24)$$

Die Gleichung (5.23) sagt also aus, dass die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Massepunktes gleich der Leistung der einwirkenden Kraft am Massepunkt ist, wobei es sich bei der Kraft um die Gesamtkraft handelt. Also

$$\frac{dT}{dt} = P . \quad (5.25)$$

Bei verschwindender Leistung muss die kinetische Energie somit konstant sein. Also

$$P = 0 \quad \rightarrow \quad T = \text{const.} \quad (5.26)$$

Wir haben hiermit ein weiteres erstes Bewegungsintegral, welches die Erhaltung der kinetischen Energie ausdrückt. Integration der differentiellen Gleichung liefert

$$\int_1^2 dT = \int_1^2 P dt = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = W . \quad (5.27)$$

Damit entspricht also die Änderung der kinetischen Energie des Massepunktes zwischen zwei Punkten auf der Bahnkurve gerade genau der geleisteten Arbeit der Kraft am Massepunkt.

Das Kraftfeld kann unterschiedliche Eigenschaften haben. Man unterscheidet allgemein zwischen *konservativen* und nicht-konservativen Kraftfeldern. Nicht-konservative Kraftfelder werden auch *dissipative* Kraftfelder genannt. Im folgenden werden die Eigenschaften der Kraftfelder diskutiert.

5.4 Konservative Kraftfelder

Allgemein gilt, dass wenn man eine Funktion V finden kann, so dass

$$\frac{dV(\vec{r})}{dt} = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} \quad (5.28)$$

gilt, dann nennt man \vec{F} eine *konservative* Kraft. Die Funktion V wird als das *Potential* oder die *potentielle Energie* bezeichnet. Im allgemeinen besteht ein Kraftfeld allerdings aus einem konservativen und einem dissipativen Anteil,

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{cons.}} + \vec{F}_{\text{diss.}} \quad (5.29)$$

Damit haben wir

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{dV(\vec{r})}{dt} + \vec{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\vec{r}} \Rightarrow \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dt}[T + V(\vec{r})] = \vec{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (5.31)$$

Bei der letzten Gleichung handelt es sich um eine *Energiebilanz*. Auf der linken Seite finden wir die gesamte mechanische Energie, die sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammensetzt. Die Energiebilanz besagt, dass die zeitliche Änderung der mechanischen Energie der Leistung der dissipativen Kräfte entspricht. *Verschwanden* die *dissipativen Kräfte*, $\vec{F}_{\text{diss.}} = \vec{0}$, so ist die Energie E eine *Erhaltungsgröße*. Also

$$E = T + V(\vec{r}) = \text{const.} \quad (5.32)$$

bzw.

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + V(\vec{r}) = E = \text{const.} \quad (5.33)$$

Dabei bezeichnet E die *Gesamtenergie* des Massepunktes. Sie besteht aus potentieller und kinetischer Energie.

Im folgenden wird diskutiert, unter welchen Voraussetzungen ein Kraftfeld konservativ ist. Ausgangspunkt ist die Forderung

$$\frac{dV(\vec{r})}{dt} = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} \quad (5.34)$$

(i) Mit

$$\frac{dV(\vec{r})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \text{grad}V \cdot \dot{\vec{r}} \quad (5.35)$$

ergibt sich für Glg. (5.34)

$$(\text{grad}V + \vec{F}) \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \quad (5.36)$$

Die Glg. (5.34) kann also erfüllt werden, wenn das Skalarprodukt insgesamt verschwindet oder wenn

$$\vec{F} = -\text{grad}V \quad (5.37)$$

gilt. Das ist der eigentlich interessante Fall für uns. *Ein Kraftfeld ist also konservativ, wenn es sich als der negative Gradient einer skalaren Funktion ausdrücken lässt.* Das verlangt also, dass das Kraftfeld unabhängig von der Zeit und der Geschwindigkeit ist. Es gilt

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (5.38)$$

Eine Kraft wird konservativ genannt, wenn man sie durch den Gradienten eines skalaren Potentials darstellen kann. Das Potential ist hierbei nur bis auf eine Konstante bestimmt. Die Wahl des Vorzeichens ist Konvention.

(ii) Nun besagt ein Elementarsatz der Vektoralgebra, dass die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi(\vec{r}) = 0. \quad (5.39)$$

Das gilt natürlich auch für das Potential. Damit haben wir für ein konservatives Kraftfeld

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} V(\vec{r}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (5.40)$$

Ein konservatives Kraftfeld muss also wirbelfrei sein. Umgekehrt gilt dies aber nicht. Nicht jedes wirbelfreie Kraftfeld ist konservativ. So können auch dissipative Kraftfelder wirbelfrei sein.

(iii) Schauen wir die integrale Formulierung an und betrachten dazu als erstes die geleistete Arbeit längs eines geschlossenen Weges. Hierfür haben wir für eine konservative Kraft

$$\begin{aligned} W &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint \operatorname{grad} V(\vec{r}) d\vec{r} = - \oint dV(\vec{r}) = -V_{\text{Ende}} + V_{\text{Anfang}} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Wir finden also, dass konservative Kräfte auf geschlossenen Wegen keine Arbeit leisten. Die Arbeit hängt dabei nicht vom Weg ab.

Dies kann mathematisch abstrakter unter Anwendung des Stokeschen Satzes formuliert werden. Wir wissen, dass für eine konservative Kraft $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = 0$ gilt. Damit haben wir (Stokescher Satz!)

$$\int \int \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (5.42)$$

da sich die Forderung nach einer lokal verschwindenden Rotation auch auf die globale Eigenschaft überträgt. Die Argumentation gilt aber nur in dieser Richtung: Wenn die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet, so verschwindet das geschlossene Kurvenintegral über das Vektorfeld (in diesem Fall beschreibt dies eine verschwindende geleistete Arbeit, $W = 0$). Umgekehrt gilt die Schlussfolgerung allerdings nicht. Falls $W = 0$ gilt, so folgt daraus nicht automatisch, dass $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = 0$.

(iv) Wir haben

$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.43)$$

Wir betrachten zwei verschiedene Wege S_1 und S_2 von Punkt 1 nach Punkt 2. Damit haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1,S_1}^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{2,-S_2}^1 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &\Leftrightarrow \int_{1,S_1}^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{2,-S_2}^1 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{1,S_2}^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Wir finden also

$$\int_{1,S_1}^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{1,S_2}^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (5.45)$$

Die Arbeit einer konservativen Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ entlang eines beliebigen Weges S hängt also nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab und nicht von dessen Verlauf.

Bei der Berechnung des Potentials muss also zuerst einmal aus der Überprüfung der Forderung $\text{rot}\vec{F}(\vec{r}) = 0$ sicher gestellt werden, dass überhaupt ein Potential existiert. Falls dem so ist, kann anschließend das Potential über

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dV = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (5.46)$$

berechnet werden. In der Rechnung taucht $V(\vec{r}_0)$ an einem Referenzpunkt \vec{r}_0 auf, der geeignet festgelegt werden muss. Wie oben bereits gesagt, ist das Potential selbst nur bis auf eine Konstante bestimmt. Man kann also einen beliebigen Wert addieren oder subtrahieren, ohne die resultierende Kraft zu verändern. Nur diese Kraft ist es, die zu einer Bewegung des Massepunktes führt, so dass das Referenzpotential geeignet gewählt werden kann. Ferner ist das obige Integral wegunabhängig. Man kann sich also auch einen geeigneten Integrationsweg suchen, um die Rechnung möglichst einfach zu halten. Das Potential entspricht dabei der Arbeit, die gegen die Kraft verrichtet werden muss, um den Massepunkt von \vec{r}_0 nach \vec{r} zu bringen.

Aufgrund der Unbestimmtheit des Potentials kann dieses in dem beliebig gewählten Referenzpunkt zu null gesetzt werden. Also

$$V(\vec{r}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (5.47)$$

Häufig wird der Referenzpunkt im Unendlichen gewählt, wo das Potential als auf null abgeklungen angenommen wird.

Unter *Äquipotentialflächen* versteht man Flächen, für die gilt

$$V = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad dV = 0 \text{ auf der Äquipotentialfläche.} \quad (5.48)$$

Auf dieser Fläche gibt es also keine Änderung des Potentials. Es gilt aber auch

$$dV = \text{grad}V \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} \perp \text{grad}V \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} \perp \vec{F}. \quad (5.49)$$

Dabei ist $d\vec{r}$ ein Linienelement in der Fläche. Wir finden also, dass die Kraft senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht. Das heißt, dass an einem Massepunkt, der sich auf einer

Äquipotentialfläche bewegt, keine Arbeit verrichtet wird.

Den stärksten Anstieg des Potentials hingegen finden wir bei Bewegung in Richtung des Gradienten des Potentials, da

$$d\vec{r} \parallel \vec{F} \Rightarrow dV_{\max} = |\text{grad}V| |d\vec{r}| . \quad (5.50)$$

Die Kraft steht also immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen und zeigt in Richtung des größten Potentialgefälles.

5.5 Drehimpulserhaltung

Ausgangspunkt ist wiederum das 2. Newtonsche Axiom. Wir multiplizieren von links vektoriell mit \vec{r} ,

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \quad |\vec{r} \times \\ m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} &= \vec{r} \times \vec{F} . \end{aligned} \quad (5.51)$$

Auf der linken Seite haben wir

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} . \quad (5.52)$$

Damit erhalten wir für Glg. (5.51)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (5.53)$$

Hier haben wir den *Drehimpuls* eingeführt, der definiert ist durch

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p} . \quad (5.54)$$

Wir haben ferner das *Drehmoment* eingeführt, das definiert ist durch

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} . \quad (5.55)$$

Die Glg. (5.53) für die Drehimpulserhaltung besagt also, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich dem einwirkenden Gesamtdrehmoment ist. Ist das Gesamtdrehmoment 0, so ist der Drehimpuls erhalten. Insbesondere gilt, dass falls \vec{F} eine *Zentralkraft* ist, also in Richtung des Ortsvektors wirkt, $\vec{F} \sim \vec{r}$ (also $\vec{M} = 0$), dann \vec{L} erhalten ist.

In dieser Gleichung kann der Drehimpuls in Analogie zum Impuls und das Drehmoment in Analogie zur Kraft gesehen werden. Den Begriff *Drehmoment* kann man sich leicht klar machen. Man denke beispielsweise an eine Kraft, die auf einen Massepunkt wirkt, der relativ zum Koordinatenursprung starr (z.B. durch eine Stange) fixiert ist, siehe Abb. 5.2. Greift die Kraft in radialer Richtung an dem Massepunkt an, so wird der Punkt nicht in Rotation versetzt, und das Drehmoment verschwindet. Greift die Kraft senkrecht zur Richtung der Verbindungsstange an, so wird der Massepunkt in Rotation versetzt, das Drehmoment ist

$$\vec{M} = R \cdot F \vec{e}_z \quad (5.56)$$

Die Ebene, in der er rotiert, steht senkrecht zur Richtung des Kreuzproduktes aus Ort und Kraft. Die hierdurch geänderte dynamische Größe ist der Drehimpuls. Der Drehimpuls ist maximal, wenn der Ortsvektor senkrecht auf dem Impuls steht.

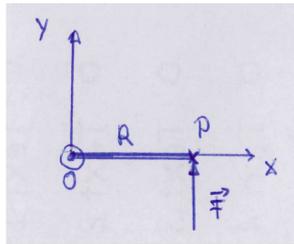


Abbildung 5.2: Eine Kraft greift an einem starr mit dem Ursprung verbundenen Massepunkt an.

Kapitel 6

Der harmonische Oszillator

Der harmonische Oszillator ist das Paradebeispiel, das in der klassischen Mechanik ausführlich diskutiert wird. Er tritt auf im Zusammenhang mit einer rücktreibenden Kraft, die proportional zur Auslenkung ist. Man kann sich beispielsweise einen Massepunkt vorstellen, der durch eine Feder fest mit einem Fixpunkt verbunden ist. Wird der Massepunkt unter Anwendung einer Kraft aus seiner Ruhelage bewegt, so sorgt die Rückstellkraft der Feder dafür, dass der Massepunkt bestrebt ist, in seine Ruhelage zurück zu kehren. Vernachlässigt man Dissipation, also z.B. Luftreibung, so ist die sich dann ergebende Bewegung eine harmonische Oszillation um seine Ruhelage. Die Beschreibung dieser Bewegung ist eines der Grundprobleme der theoretischen Mechanik. Das liegt daran, dass der harmonische Oszillator in der Natur, oft nach Idealisierung, in vielen Formen auftritt. So werden auch in vielen anderen Teilgebieten der Physik dynamische Größen durch identische Gleichungen beschrieben. Etwa der Strom in einem elektrischen Schwingkreis, der aus Kondensator und Spule besteht. In der Quantenmechanik spielt der quantenmechanische Oszillator dann eine wichtige Rolle. Ferner ist der harmonische Oszillator exakt lösbar. Die für den harmonischen Oszillator wichtige Eigenschaft ist also die einer linearen Rückstellkraft bei einer hinreichend kleinen Auslenkung. Das zu der konservativen Kraft gehörige Potential ist dann also quadratisch in der Auslenkung. Beispiele für den harmonischen Oszillator sind (siehe Fig. 6.1):

- (i) Die eingangs erwähnte schwingende Feder. Die Rückstellkraft (wir betrachten den ein-dimensionalen Fall, Fig. 6.1(a)) ist

$$F = -kx , \tag{6.1}$$

wobei k die Federkonstante bezeichnet. Das zugehörige Potential ist

$$V = \frac{1}{2}kx^2 . \tag{6.2}$$

Mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms ergibt sich eine DGL 2. Ordnung,

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m} . \tag{6.3}$$

- (ii) Das Fadenpendel, siehe Fig. 6.1(b). Die Rückstellkraft ist

$$F = -mg \sin \varphi \tag{6.4}$$

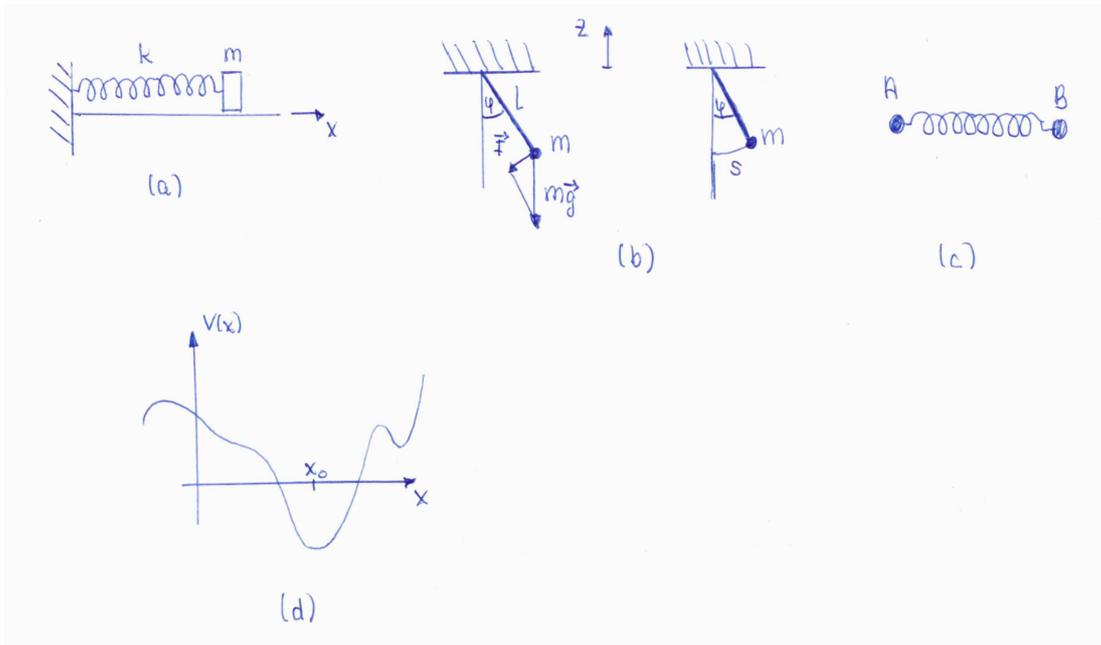


Abbildung 6.1: Beispiele für den harmonischen Oszillator: (a) Schwingende Feder, (b) Fadenpendel, (c) Schwingung von Molekülen, (d) Bewegung in einem Potential $V(x)$.

Mit

$$s = l\varphi \quad (6.5)$$

und dem 2. Newtonschen Axiom

$$m\ddot{s} = F \quad (6.6)$$

ergibt sich

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \approx -mg\varphi, \quad (6.7)$$

wobei im letzten Schritt die Kleinwinkelnäherung $\sin \varphi \approx \varphi$ verwendet wurde. Damit haben wir die DGL 2. Ordnung

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (6.8)$$

(iii) Ein weiteres Beispiel ist die Schwingung von Molekülen, siehe Abb. 6.1(c).

(iv) Die Bewegung eines Massepunktes im Potential $V(x)$, siehe Abb. 6.1(d). Wir betrachten kleine Auslenkungen um die Ruhelage x_0 (Minimum des Potentials) und entwickeln das Potential $V(x)$ um den Ruhepunkt x_0 . Damit haben wir

$$V(x) = \underbrace{V(x_0)}_{= \text{konst.}} + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}V''(x_0)}_{(*)}(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3) \quad (6.9)$$

Die erste Ableitung ist 0 bei $x = x_0$, da wir uns hier in einem Minimum des Potentials befinden. Damit haben wir für die Kraft

$$(*) F = -\frac{dV}{dx} = V''(x_0)(x_0 - x). \quad (6.10)$$

Wir haben also für hinreichend kleine Auslenkungen eine Kraft, die linear in der Auslenkung ist, und somit einen harmonischen Oszillator.

Da im Folgenden komplexe Zahlen benutzt werden, um die Lösung des harmonischen Oszillators zu bestimmen, gibt es zunächst einen Einschub zu den komplexen Zahlen.

6.1 Mathematischer Einschub: Komplexe Zahlen

Die imaginäre Einheit i ist definiert als

$$i = \sqrt{-1} \quad \rightsquigarrow \quad i^2 = -1. \quad (6.11)$$

Somit ist also die Lösung der Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \quad (6.12)$$

gegeben durch

$$x_{1,2} = \pm i. \quad (6.13)$$

Eine *komplexe Zahl* $z \in \mathbb{C}$ besitzt einen *Realteil* und einen *Imaginärteil*:

$$z = a + ib, \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \quad (6.14)$$

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad (\text{auch} = \mathcal{R}(z)) \quad \text{Realteil} \quad (6.15)$$

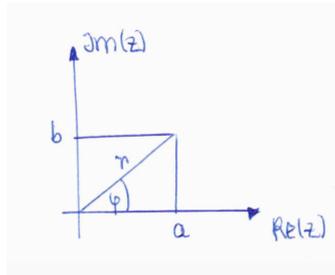
$$b = \operatorname{Im}(z) \quad (\text{auch} = \mathcal{I}(z)) \quad \text{Imaginärteil} \quad (6.16)$$

Der zu z (oder auch zu einer Gleichung) *komplex konjugierte* Ausdruck, z^* , ergibt sich durch die Ersetzung $i \rightarrow -i$,

$$z^* = a - ib. \quad (6.17)$$

Wir können die komplex konjugierte Zahl graphisch in der Ebene aufgespannt durch Real- und Imaginärteil darstellen, siehe Fig. 6.2. Daraus lesen wir ab

$$z = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (6.18)$$

Abbildung 6.2: Die komplexe Zahl z .

Die komplexe Zahl kann also mit Hilfe des *Betrags* r und *der Phase/des Phasenwinkels/des Arguments* φ dargestellt werden,

$$\text{Betrag: } r^2 = |z|^2 = a^2 + b^2 \quad (6.19)$$

$$\text{Phase: } \varphi = \arg(z) = \arctan \frac{b}{a} \quad (6.20)$$

Es gelten folgende Rechenregeln für zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$:

$$\begin{aligned} (i) \text{ Addition: } & z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \\ (ii) \text{ Multiplikation: } & z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ (iii) \text{ Division: } & \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Wir betrachten die Funktion

$$f(y) = \cos y + i \sin y, \quad \text{mit } y \in \mathbb{R}. \quad (6.22)$$

Für die Ableitung erhalten wir

$$\frac{df}{dy} = -\sin y + i \cos y = i f(y). \quad (6.23)$$

Das Gleiche finden wir für die Exponentialfunktion e^{iy} ,

$$\frac{d}{dy} e^{iy} = i e^{iy}. \quad (6.24)$$

Daher können wir schreiben

$$f(y) = e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (6.25)$$

Man nennt dies die *Euler'sche Formel*. Daraus ergibt sich, dass jede komplexe Zahl geschrieben werden kann als

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (6.26)$$

Die allgemeine Potenz einer komplexen Zahl ist

$$z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}. \quad (6.27)$$

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi). \quad (6.28)$$

Dies ist der *Satz von Moivre*. Wir geben abschließend noch den Logarithmus einer komplexen Zahl an

$$w = \ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.29)$$

Man beachte, dass der Logarithmus nicht eindeutig ist.

6.2 Freier harmonischer Oszillator

Wir betrachten den freien harmonischen Oszillator, der also nicht durch eine externe Kraft getrieben wird, und wo sich der Massepunkt nur aufgrund der Rückstellkraft bewegt, die linear in der Auslenkung ist. Wir betrachten den eindimensionalen Fall mit Auslenkung in die x -Richtung. Das 2. Newtonsche Axiom führt dann auf

$$m\ddot{x} = -kx \quad (6.30)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.31)$$

Man nennt ω_0 *Resonanz-* oder *Eigenfrequenz*. Für diese DGL 2. Ordnung finden wir mit dem Lösungsansatz

$$x = e^{\lambda t} \quad (6.32)$$

dann

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0. \quad (6.33)$$

Die allgemeine Lösung des freien harmonischen Oszillators lautet damit

$$x(t) = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (6.34)$$

wobei die Koeffizienten a_1 und a_2 aus den Anfangsbedingungen folgen.

6.3 Harmonischer Oszillator mit Reibung

Wir berücksichtigen nun zusätzlich noch Reibung in Form von Stokescher Reibung. Die Reibungskraft wirkt der Bewegungsrichtung entgegen und ist proportional zur Geschwindigkeit (Stokesche Reibung), so dass die Kraft insgesamt gegeben ist durch

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x - q\dot{x}\vec{e}_x. \quad (6.35)$$

Somit haben wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \rho = \frac{q}{m} > 0. \quad (6.36)$$

Mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (6.37)$$

erhalten wir

$$\lambda^2 + \rho\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (6.38)$$

und finden

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (6.39)$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.40)$$

wobei a_1 und a_2 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Wir untersuchen die Lösung genauer und machen eine Fallunterscheidung bezüglich des Arguments der Wurzel.

6.3.1 Schwache Dämpfung - Schwingfall

Die Dämpfung ist klein gegenüber der Frequenz ω_0 , also

$$\omega_0 > \frac{\rho}{2}. \quad (6.41)$$

Die Wurzel ist damit negativ, und wir erhalten eine komplexe Lösung,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\rho}{2} \pm i\Omega, \quad \text{mit } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2}. \quad (6.42)$$

Wir wählen die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = v. \quad (6.43)$$

Einsetzen der ersten Bedingung in die allgemeine Lösung Glg. (6.40) liefert

$$0 = a_1 + a_2. \quad (6.44)$$

Die Ableitung der allgemeinen Lösung ist

$$\dot{x}(t) = a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{\rho}{2}t} (a_1 \lambda_1 e^{i\Omega t} + a_2 \lambda_2 e^{-i\Omega t}). \quad (6.45)$$

Einsetzen der zweiten Anfangsbedingung in diese Gleichung liefert

$$v = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2. \quad (6.46)$$

Dies liefert

$$a_1 = -a_2 = \frac{-v}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{-iv}{2\Omega} \quad (6.47)$$

Somit erhalten wir (siehe Abb. 6.3 für eine graphische Darstellung)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-iv}{2\Omega} e^{-\frac{\rho}{2}t} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) \rightsquigarrow \\ x(t) &= \frac{v}{\Omega} e^{-\frac{\rho}{2}t} \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Man nennt

$$\tau = \frac{2}{\rho} \quad (6.49)$$

die *Relaxationszeit*. Nach dieser Zeit ist die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ abgefallen. Man definiert als *Dämpfungsverhältnis* das Verhältnis zweier aufeinander folgender maximaler Auslenkungen auf gleicher Seite

$$D = \frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\frac{\rho}{2}T}, \quad (6.50)$$

mit der Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (6.51)$$

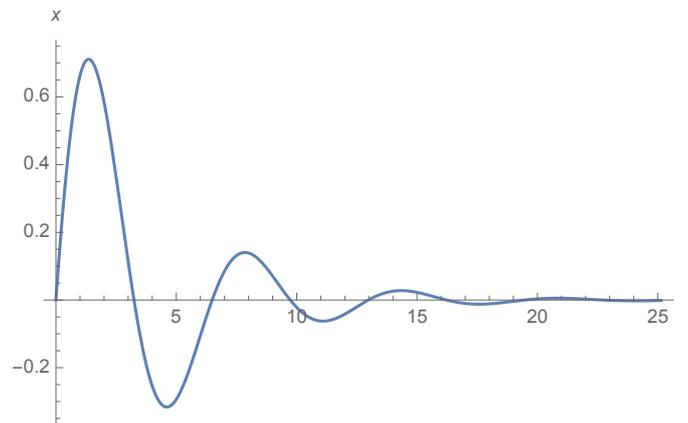


Abbildung 6.3: Der harmonische Oszillator mit schwacher Dämpfung - Schwingfall.

6.3.2 Starke Dämpfung - Kriechfall

Die Dämpfung ist groß gegenüber der Frequenz ω_0 , also

$$\frac{\rho}{2} > \omega_0. \quad (6.52)$$

In diesem Fall ist das Argument in der Wurzel positiv, und wir erhalten die zwei reellen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\rho}{2} \pm \Omega', \quad \text{mit } \Omega' = \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (6.53)$$

Beide Lösungen sind negativ, und wir haben aufgrund der starken Reibung eine exponentiell abfallende Lösung. Mit den beiden Anfangsbedingungen Glg. (6.43) haben wir

$$a_1 = -a_2 = \frac{v}{2\Omega'} \quad (6.54)$$

und somit die Lösung

$$x(t) = \frac{v}{2\Omega'} e^{-\frac{\rho}{2}t} (e^{\Omega't} - e^{-\Omega't}) . \quad (6.55)$$

Verwendung von

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (6.56)$$

liefert (siehe Abb. 6.4 für eine graphische Darstellung)

$$x(t) = \frac{v}{\Omega'} e^{-\frac{\rho}{2}t} \sinh(\Omega't) . \quad (6.57)$$

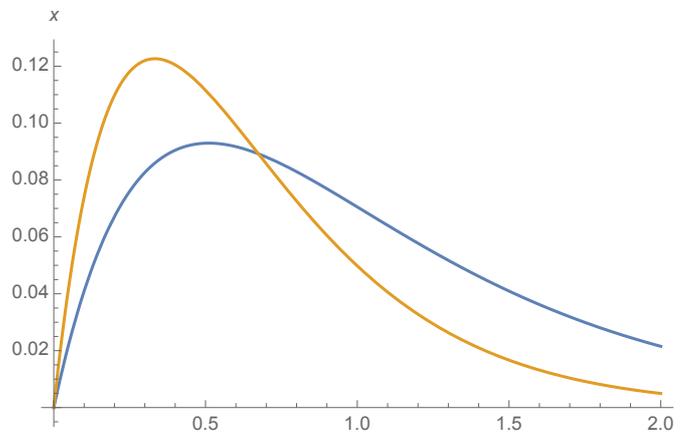


Abbildung 6.4: Der harmonische Oszillator mit starker Dämpfung: Kriechfall (blau). Der harmonische Oszillator: aperiodischer Grenzfall (orange).

6.3.3 Mittlere Dämpfung - Aperiodischer Grenzfall

Für den Fall

$$\frac{\rho}{2} = \omega_0 \quad (6.58)$$

ist die Wurzel null, so dass wir zwei identische Lösungen haben,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\rho}{2} \quad (6.59)$$

Für diese doppelte Nullstelle ist neben $e^{-\frac{\rho}{2}t}$ auch $te^{-\frac{\rho}{2}t}$ eine Lösung, wie man leicht durch Einsetzen verifizieren kann. Damit lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\frac{\rho}{2}t} (a_1 + a_2 t) . \quad (6.60)$$

Mit den beiden Anfangsbedingungen Glg. (6.43) haben wir

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 = v , \quad (6.61)$$

so dass die Lösung lautet

$$x(t) = vt e^{-\frac{\rho}{2}t} . \quad (6.62)$$

Auch bei dieser Bewegung handelt es sich nicht um eine Schwingung (siehe Abb. 6.4. Die Bewegung ist aperiodisch. Im Vergleich zum allgemeinen Kriechfall kommt der Oszillator hier am schnellsten zur Ruhe. Dies kann man beim Bau spezieller Geräte ausnutzen. Wir können die Lösung auch aus der vorigen Lösung im Kriechfall, Glg. (6.57), ableiten, da¹

$$\lim_{\frac{\rho^2}{4} \rightarrow \omega_0^2} \frac{\sinh(\sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \omega_0^2} t)}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \omega_0^2}} = t . \quad (6.63)$$

6.4 Erzwungene Schwingungen

Wir betrachten nun den Fall, dass wir zusätzlich eine äußere zeitabhängige Kraft $F(t)$ haben. Diese soll in x -Richtung wirken. Wir haben dann die allgemeine Kraft

$$\vec{F}(x, t) = -kx\vec{e}_x - q\dot{x}\vec{e}_x + F(t)\vec{e}_x . \quad (6.64)$$

Anwendung des 2. Newtonschen Axioms liefert (vgl. mit Glg. (6.36))

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) , \quad \text{mit } f(t) = \frac{F(t)}{m} . \quad (6.65)$$

6.5 Harmonische Anregung

Wir untersuchen zunächst den Fall, in dem die äußere Kraft eine zeitharmonische Kraft ist, die wir schreiben als

$$F(t) = F \cos(\Omega t + \theta) . \quad (6.66)$$

Sie ist charakterisiert durch ihre Amplitude F , die Kreisfrequenz Ω und eine Phasenverschiebung θ . Die beiden letzteren bestimmen das Verhalten des Systems. Insbesondere ist die Differenz zwischen der Eigenfrequenz ω_0 und der Anregungsfrequenz Ω wichtig, wie wir sehen werden. Dieses Modell des getriebenen harmonischen Oszillators wird immer wieder, auch außerhalb der Mechanik, vorkommen. Ein Beispiel ist die Polarisation in dielektrischen Medien.

Um die Lösung der DGL Glg. (6.64) zu finden, formen wir sie zunächst um in

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \bar{f} \cos(\Omega t + \theta) , \quad \text{wobei } \bar{f} = \frac{F}{m} . \quad (6.67)$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen DGL ($F(t) = 0$) $x_{\text{hom}}(t)$ und einer partikulären Lösung $x_s(t)$, also

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_s(t) . \quad (6.68)$$

¹Wir verwenden hier die Regel von de l'Hospital, wonach $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ für Grenzfälle des Typs $0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Der Grenzfall für sehr große Zeiten lässt sich leicht überlegen. Für $t \rightarrow \infty$ wissen wir bereits, dass

$$x_{\text{hom}}(t \rightarrow \infty) = 0 . \quad (6.69)$$

Für sehr große Zeiten ist die Lösung also durch die partikuläre Lösung gegeben,

$$x(t \rightarrow \infty) = x_s(t) . \quad (6.70)$$

Wir wollen uns überlegen, wie die Bewegung des Massepunktes im stationären Fall aussieht: Nach dem Einschwingvorgang (von dem wir hier absehen), der abhängig von der Dämpfung schnell oder langsam vor sich geht, wird der Massepunkt mit einer periodischen Kraft angetrieben. Der von der periodischen Kraft angetriebene Massepunkt wird ebenfalls eine periodische Bewegung ausführen. Wie genau diese aussieht, hängt von den freien Parametern des Systems ab. Der Massepunkt wird allerdings nicht immer exakt der Anregung folgen können, sondern hat möglicherweise eine leicht veränderte Phasenlage. Ausgehend von dieser Überlegung wählen wir als Ansatz

$$x_s(t) = A \cos(\Omega t + \alpha) . \quad (6.71)$$

Im folgenden werden die Amplitude A und die relative Phase α bestimmt, wobei letztlich nur die Phasendifferenz zwischen Kraft und Auslenkung interessant ist. Es zeigt sich, dass das Problem einfacher gelöst werden kann, wenn die komplexe Notation verwendet wird, also

$$x_s(t) = a e^{i\Omega t} , \quad \text{mit} \quad a = A e^{i\alpha} . \quad (6.72)$$

Wichtig ist aber zu beachten, dass physikalisch beobachtbare Größen immer reell sind. Es wird also komplex gerechnet aber am Ende nur der Realteil betrachtet, um auf die physikalisch beobachtbaren Größen zu schließen. Für die Kraft muss der gleiche komplexe Ansatz gewählt werden, also

$$\bar{f} \cos(\Omega t + \theta) \rightarrow \tilde{f} e^{i\Omega t} , \quad \text{mit} \quad \tilde{f} = \bar{f} e^{i\theta} . \quad (6.73)$$

Mit diesem Ansatz lässt sich die Zeitableitung leicht bilden und in die DGL einsetzen. Man erhält

$$(-\Omega^2 + i\rho\Omega + \omega_0^2) a = \tilde{f} . \quad (6.74)$$

Daraus ergibt sich die komplexe Amplitude

$$a = \frac{\tilde{f}}{-\Omega^2 + i\rho\Omega + \omega_0^2} \rightsquigarrow \quad (6.75)$$

$$A e^{i\alpha} = \frac{\bar{f} e^{i\theta}}{-\Omega^2 + i\rho\Omega + \omega_0^2} . \quad (6.76)$$

Dies liefert

$$A = \frac{\bar{f}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\rho\Omega)^2}} \quad (6.77)$$

$$\tan(\theta - \alpha) \equiv \tan \delta = \frac{\rho\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} . \quad (6.78)$$

Daraus lesen wir ab, dass die Amplitude A und die Phasendifferenz $\theta - \alpha$ von der Wahl der treibenden Frequenz Ω relativ zur Eigenfrequenz ω_0 des Oszillators abhängen.

Bemerkungen

- * Die Amplitude der Schwingung ist maximal in Resonanznähe. Wenn sich ω_0^2 und Ω^2 gerade genau kompensieren, ist der Nenner näherungsweise am kleinsten. Er ist exakt am kleinsten bei der Frequenz $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/2}$.
- * Figur 6.5 zeigt die Amplitude als Funktion der Antriebsfrequenz Ω normiert auf ω_0 für verschiedene Dämpfungsparameter. Bei der eigentlichen Resonanzfrequenz $\Omega = \Omega_r$ beträgt die maximale Oszillationsamplitude

$$A_{\max} = \frac{\bar{f}}{\rho\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4}} = \frac{F}{\rho m\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4}}. \quad (6.79)$$

Eine charakteristische Größe ist die *Linienbreite*. Sie ist definiert als die Differenz der beiden Frequenzen, bei der die Amplitude gerade auf die Hälfte des Maximalwertes abgeklungen ist. Die Linienbreite der Resonanz ist proportional zur Dämpfung.

- * Der harmonische Oszillator schwingt in Phase mit der Anregung für Frequenzen sehr viel kleiner als die Resonanzfrequenz ($\Omega \ll \Omega_r$). Er kann der Anregung folgen. Bei der Eigenfrequenz ω_0 beträgt die Phasenverschiebung genau $\pi/2$. Das ist ein generisches Verhalten aller harmonischen Oszillatoren. Sind die Frequenzen sehr viel größer als die Resonanzfrequenz ($\Omega \gg \Omega_r$), so schwingt der harmonische Oszillator außer Phase mit der Anregung, die Phasendifferenz beträgt π .

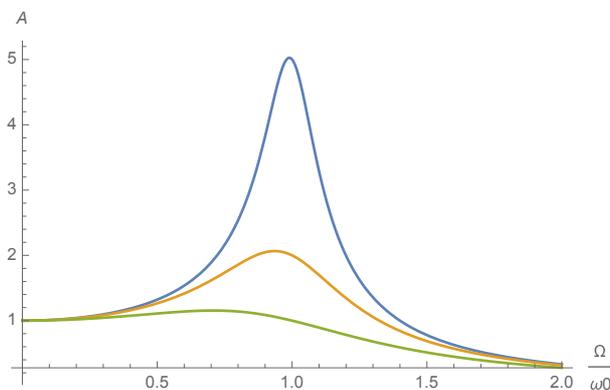


Abbildung 6.5: Die Amplitude A als Funktion der Antriebsfrequenz Ω normiert auf ω_0 , Ω/ω_0 , für verschiedene Dämpfungsparameter: $\rho = 0.2\omega_0$ (blau), $0.5\omega_0$ (orange), ω_0 (grün).

6.6 Beliebige Anregung

Im folgenden soll der harmonische Oszillator für eine externe Kraft mit beliebiger zeitlicher Abhängigkeit behandelt werden und für die Lösung dieses Problems zwei Möglichkeiten besprochen werden.

6.6.1 Lösung durch Fourierzerlegung

Wir zerlegen die Kraft in eine *Fourierreihe* gemäß

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} . \quad (6.80)$$

Auf diese Weise kann die Reaktion/Antwort des Systems auf eine Kraft mit periodischer Zeitabhängigkeit beschrieben werden als die Antwort auf eine Summe von Kräften, die jeweils zeitharmonisch sind. Der harmonische Oszillator bei einer externen zeitharmonischen Kraft wurde im vorigen Abschnitt berechnet. Da das Superpositionsprinzip gilt, kann die Reaktion des Systems auf jede der zeitharmonischen Kräfte einfach addiert werden, um so die Lösung für den harmonischen Oszillator in Antwort auf eine periodisch zeithabhängige Kraft zu erhalten. Der Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich, also hier von der Kraft als Funktion der Zeit zur Kraft als Funktion der Frequenz, in Glg. (6.80) wird *Fouriertransformation* genannt.

Mit Hilfe der Fouriertransformation kann eine beliebige Funktion in ein Spektrum harmonischer Schwingungen zerlegt werden. Man geht dabei von der Fourierreihenentwicklung einer periodischen Funktion $f(t)$ mit der Periode T aus. Die Funktion $f(t)$ heißt periodisch, wenn es eine reelle Zahl $T \neq 0$ gibt, so dass für alle t gilt

$$f(t + T) = f(t) . \quad (6.81)$$

Die Fourierentwicklung der periodischen Funktion $f(t)$ lässt sich schreiben als ($n \in \mathbb{N}$)

$$f(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) + B_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \right] . \quad (6.82)$$

Figur 6.6 zeigt die Fourierreihenentwicklung eines Rechteckimpulses. Man erkennt daran, dass man eine Rechteckschwingung durch unendliche viele Harmonische² darstellen kann. Sie enthält jeweils die ungeraden harmonischen Oberschwingungen, wobei die Amplitude mit steigender Frequenz abnimmt.

Die Fourierreihenentwicklung kann auch mit Hilfe der Exponentialfunktion beschrieben werden:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (6.83)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega_n t} , \quad (6.84)$$

mit ($n \in \mathbb{N}$)

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T} . \quad (6.85)$$

Durch den Grenzübergang zu einer unendlich ausgedehnten Periode, $T \rightarrow \infty$, kann dieser Formalismus auf beliebige nichtperiodische Funktionen erweitert werden. In diesem Fall

²Eine Harmonische ist eine harmonische Schwingung, deren Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches einer Grundfrequenz ist. Harmonische oberhalb der Grundfrequenz werden Oberschwingungen (in der Musik Obertöne) genannt.

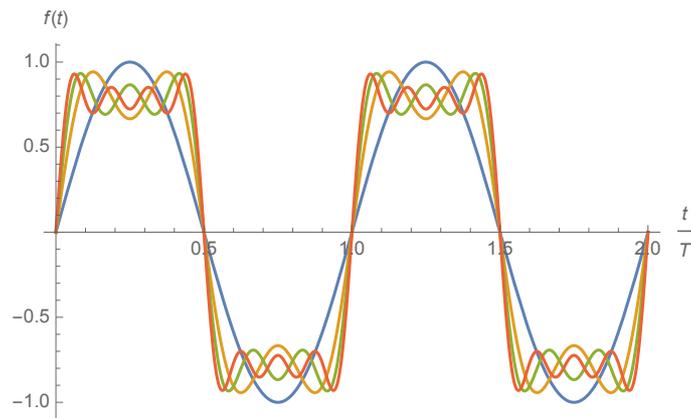


Abbildung 6.6: Die Fourierreihe des Rechteckimpulses mit Periode T und Höhe h , gegeben durch $f(t) = 4h/\pi \sum_{k=1}^{\infty} (\sin((2k - 1)\omega t)/(2k - 1))$, normiert auf $4h/\pi$ und entwickelt bis zu verschiedenen Ordnungen: $k = 1, 2, 3, 4$ (blau, orange, grün, rot).

sind die harmonischen Schwingungen, mit denen die Funktion beschrieben wird, nicht mehr diskret, sondern gehen in ein kontinuierliches Spektrum über, dem *Fourierspektrum*. Wir erhalten

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \tag{6.86}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} . \tag{6.87}$$

Dabei ist $\tilde{f}(\omega)$ die Fouriertransformierte von $f(t)$. Zu beachten ist, dass die Wahl des Vorfaktors der Fouriertransformierten bis zu einem gewissen Grad frei ist. Man findet auch eine asymmetrische Aufteilung in zwei Vorfaktoren 1 und $1/(2\pi)$. Wichtig ist lediglich, dass man nach Hin- und Rücktransformation (also Realraum \rightarrow Fourierraum \rightarrow Realraum) wieder bei der ursprünglichen Funktion ankommt, d.h. $\tilde{\tilde{f}} = f$.

6.6.2 Mathematischer Einschub: Die δ -Distribution

Die δ -Distribution ist definiert durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' . \tag{6.88}$$

Sie ist somit ein Funktional, das eine Funktion auf eine Zahl abbildet. Die δ -Distribution hat folgende Eigenschaften:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & x \neq x' \\ \infty & x = x' \end{cases} \tag{6.89}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx' = 1 \tag{6.90}$$

$$\delta(x) = \delta(-x) . \tag{6.91}$$

6.6.3 Lösung bei beliebiger Anregung

Mit der Darstellung der Kraft durch eine Fouriertransformation erhalten wir also folgende Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(\Omega) e^{i\Omega t} . \quad (6.92)$$

Analog wird die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL durch einen Fourieransatz dargestellt,

$$x_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{B}(\Omega) e^{i\Omega t} . \quad (6.93)$$

Damit lassen sich dann die Amplituden $\tilde{B}(\Omega)$ berechnen gemäß,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} (-\Omega^2 + i\rho\Omega + \omega_0^2) \tilde{B}(\Omega) e^{i\Omega t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(\Omega) e^{i\Omega t} \Rightarrow \\ \tilde{B}(\Omega) &= \frac{\tilde{f}(\Omega)}{-\Omega^2 + i\rho\Omega + \omega_0^2} . \end{aligned} \quad (6.94)$$

Wir haben also eine beliebige zeitabhängige Funktion in harmonische Oszillationen zerlegt (Integral über das Spektrum). Da wir ein lineares System haben, in dem Superposition gilt, kann die Antwort dieses Systems auf jede dieser zeitharmonischen Oszillationen berechnet werden. Die Gesamtantwort des Systems ist dann die Überlagerung dieser jeweiligen Lösungen.

Eine alternative Zerlegung zu der in harmonische Oszillationen ist durch die Betrachtung einer Sequenz von impulsförmigen Anregungen gegeben. Jeder Impuls entspricht einem Kraftstoß, der in einem unendlich kleinen Zeitintervall eine Kraft ausübt. Diese entspricht integral betrachtet der Kraft zu einer bestimmten Zeit t . Die Antwort des Systems auf diesen Kraftstoß kann berechnet werden. Die Gesamtantwort des Systems auf eine zeitlich beliebig abhängige Kraft erhält man dann wieder aus der Summe der Antworten auf alle individuellen Kraftstöße. Man nennt die Antwort des Systems auf diese impulsförmige, δ -förmige Anregung die *Greensche* oder auch *Green* Funktion. Auch die Greenfunktion wird häufig in der Physik verwendet und im Laufe des Studiums in verschiedenen Zusammenhängen wieder auftauchen. Die Green Funktion beschreibt die Antwort eines physikalischen Systems auf eine punktförmige bzw. zeitlich instantane Anregung.³ Man nennt sie daher auch Antwortfunktion.

Im folgenden wird die Green Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators als Antwort auf einen Kraftstoß bestimmt, der zunächst mit Hilfe einer Funktion beschrieben wird, welche die δ -Distribution approximiert. Der einfachste Fall ist eine Kastenfunktion $\delta_\epsilon(t)$,

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } |t| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.95)$$

³Ein einfaches Bild für den physikalischen Gehalt der Green Funktion ist durch den Wurf eines Steines in einen See gegeben. Durch den Steinwurf werden im See punktförmig in Raum und Zeit Wasserwellen angeregt. Das als Funktion von Raum und Zeit entstehende Muster ist gerade die Green Funktion der Gleichung, die die Ausbreitung der Wasserwellen beschreibt.

Für $\epsilon \rightarrow 0$ geht diese Funktion gegen eine δ -Distribution,

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) . \quad (6.96)$$

Für eine Kraft mit Einheitsamplitude und einem Stoß zum Zeitpunkt $t = t'$ lautet damit die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t - t') . \quad (6.97)$$

Für die Lösung der Gleichung nehmen wir folgende Anfangsbedingungen an,

$$x(\lim_{y \rightarrow 0} (t' - y)) \equiv x(t'_-) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t'_-) = 0 , \quad (6.98)$$

wobei t'_- die Zeit unmittelbar vor dem Stoß markiert. Der Massepunkt soll dann in Ruhe sein und sich am Gleichgewichtspunkt befinden. Er wird dann durch den Impuls bei $t = t'$ angestoßen. Die Lösung der Gleichung ist die gesuchte Green Funktion

$$G(t; t') = x(t) . \quad (6.99)$$

Sie ist eine Funktion der Zeit und hängt parametrisch vom Zeitpunkt des Stoßes ab. Die Green Funktion muss für alle Zeiten vor dem eigentlichen Stoß verschwinden, also

$$G(t; t') = 0 \quad \text{für } t < t' . \quad (6.100)$$

Dies ist eine Folge der Kausalität. Denn der Massepunkt kann sich nicht bewegen, bevor er angestoßen wird. Die Ursache kommt vor der Wirkung. Ferner gilt Translationsinvarianz, hier für die Zeit. Die Green Funktion hängt nicht von der absoluten Zeit ab, sondern nur von der Zeitdifferenz zwischen t und t' . Während Kausalität für alle Green Funktionen gilt, muss die Translationsinvarianz nicht immer gelten. Da die Green Funktion eine physikalische Größe, die Auslenkung, beschreibt, welche reellwertig ist, muss auch die Green Funktion selbst eine reellwertige Funktion sein. Es gilt allgemein

$$D_t G(t - t') = \delta(t - t') , \quad (6.101)$$

wobei D_t einen beliebigen linearen Differentialoperator in der Zeit bezeichnet. Er ist der derjenigen DGL, die gelöst werden soll. Also hier:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t - t') = \delta(t - t') . \quad (6.102)$$

Für $t > t'$ gilt jedoch

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t - t') = 0 . \quad (6.103)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung wurde bereits bestimmt. Es handelt sich um die Lösung des freien gedämpften harmonischen Oszillators im Schwingfall (wir nehmen $\rho^2/4 < \omega_0^2$ an), die lautet

$$G(t - t') = e^{-\frac{\rho}{2}(t-t')} [a_1 \cos(\Omega(t - t')) + a_2 \sin(\Omega(t - t'))] , \quad (6.104)$$

mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4}$. Zur Bestimmung der Anfangsbedingungen a_1 und a_2 wird die Bewegungsgleichung über ein infinitesimales Zeitintervall um den Zeitpunkt $t = t'$ integriert,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t-t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t-t') \quad (6.105)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dt} G(t-t') \right]_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} = 1 \quad (6.106)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(\epsilon) = 1. \quad (6.107)$$

Beim Übergang von Glg. (6.106) nach Glg. (6.107) haben wir ausgenutzt, dass $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(-\epsilon) = 0$ (also vor dem Stoß) ist. Beim Übergang von Glg. (6.105) nach Glg. (6.106) haben wir ausgenutzt, dass aus der Stetigkeit und Beschränktheit von $G(t)$ für $t \rightarrow t'$ folgt

$$\text{Term proportional } \rho \quad : \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [G(t-t')]_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (G(\epsilon) - G(-\epsilon)) \stackrel{\text{stetig}}{=} 0 \quad (6.108)$$

$$\rightsquigarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(-\epsilon) \stackrel{\text{vor dem Stoß}}{=} 0 \quad (6.109)$$

und (MWS der IR = Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$$\text{Term proportional } \omega_0^2 : \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} G(t-t') dt \stackrel{\text{MWS der IR}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\epsilon \cdot G(0)] \stackrel{\text{beschränkt}}{=} 0. \quad (6.110)$$

Wir haben somit folgende Gleichungen, um die Koeffizienten a_1 und a_2 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\epsilon) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(\epsilon) = 1. \quad (6.111)$$

Damit finden wir

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{1}{\Omega}. \quad (6.112)$$

Somit lautet die gesamte Green Funktion

$$G(t-t') = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{\rho}{2}(t-t')} \sin[\Omega(t-t')] & \text{für } t > t' \\ 0 & \text{für } t < t' \end{cases} \quad (6.113)$$

Die Auslenkung des Massepunktes aufgrund einer beliebigen zeitlich abhängigen Kraft ist dann gegeben durch

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t') dt'. \quad (6.114)$$

Dieses $x(t)$ löst

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (6.115)$$

denn

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega_0^2 x = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + \rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t-t')}_{\delta(t-t')} f(t') = f(t). \quad (6.116)$$

Es sei noch angemerkt: Die Antwort, gegeben durch die Green Funktion, ist nicht instantan sondern zeitlich verzögert, *retardiert*.

Kapitel 7

Zweiteilchensysteme (mit Zentralkraft)

Im Folgenden wollen wir uns mit Zweiteilchensystemen mit Zentralkraft beschäftigen. Unter einer Zentralkraft versteht man eine Kraft, die in jedem Punkt des Raumes nach einem festen Zentrum hin oder von diesem weg gerichtet ist. Viele Zentralkräfte sind konservative Gradientenfelder zu einem kugelsymmetrischen Zentralpotential¹. Beispiele für konservative Zentralkräfte sind die Gravitationskraft² oder die Coulombkraft.

Konkret ist unser Ziel, das Zweikörperproblem zu lösen. In der Physik versteht man darunter die Berechnung der Bewegung zweier Körper, die ohne zusätzliche äußere Einflüsse nur miteinander wechselwirken. Typische Beispiele sind zwei astronomische Objekte wie Doppelsterne oder Planet und Sonne oder Planet und Mond usw., die durch das gegenseitige Schwerfeld aneinander gebunden sind und sich umeinander bewegen, oder aber auch zwei geladene Teilchen, die sich im gegenseitigen elektrostatischen Feld anziehen oder abstoßen. Die Kraft ist in diesen Beispielen umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Körper. Im ersteren Fall handelt es sich um die Gravitationskraft, im letzteren um die Coulombkraft. In der Astronomie wird das Zweikörperproblem auch als das *Keplerproblem* bezeichnet. Es war Johannes Kepler, der mit den drei nach ihm benannten Gesetzen als erster die genaue Form der Bewegung für gebundene Zweikörpersysteme angeben konnte. Die Herleitung der Keplerschen Gesetze ist eine Standardaufgabe der klassischen Mechanik, welche zuerst von Isaac Newton gelöst wurde.

Diese Bewegungen zeigen sich auch dann, wenn zusätzliche äußere Kräfte wirken, diese sich aber für jeden der beiden Körper gerade aufheben.

7.1 Schwerpunkt- und Relativkoordinaten

Wir betrachten also zwei Körper der Massen m_1 und m_2 an den Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , siehe Fig. 7.1. Wir nehmen an, dass die Gesamtmasse des jeweiligen Körpers punktförmig in einem Massepunkt vereinigt ist. Körper 2 übt auf Körper 1 die Kraft \vec{F}_{21} aus. Die Kraft

¹Ein Zentralpotential ist ein Potential, das nur vom Abstand r zum Kraftzentrum abhängt

²Es hängt vom Bezugssystem ab, ob das stimmt. So ist die Gravitation z.B. nur im Schwerpunktsystem eine Zentralkraft.

wirkt in Richtung der Verbindungslinie

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (7.1)$$

der beiden Körper. Da actio=reactio gilt, übt Körper 1 auf Körper 2 die gleiche Kraft aber mit umgekehrten Vorzeichen aus. Also

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \sim \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (7.2)$$

Wir haben die folgenden Bewegungsgleichungen für die beiden Massepunkte,

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} \quad (7.3)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}. \quad (7.4)$$

Das System hat insgesamt 6 Freiheitsgrade (z.B. die drei Raumkoordinaten der beiden Massepunkte). Die Erhaltungsgrößen des Systems sind der Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad (7.5)$$

der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \quad (7.6)$$

und die Gesamtenergie E . Denn

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} \vec{p}_1 + \frac{d}{dt} \vec{p}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0. \quad (7.7)$$

Und

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \vec{L}_1 + \frac{d}{dt} \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} = 0, \quad (7.8)$$

da $\vec{F}_{21} \sim \vec{r}/|\vec{r}|$. Die Energieerhaltung können wir herleiten, indem wir die beiden Bewegungsgleichungen (7.3) und (7.4) jeweils mit $\dot{\vec{r}}_1$ bzw. $\dot{\vec{r}}_2$ multiplizieren und aufaddieren. Mit $\vec{F}_{21} \equiv \vec{F}_1$ und $\vec{F}_{12} \equiv \vec{F}_2$ ergibt dies

$$\sum_{i=1}^2 m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i. \quad (7.9)$$

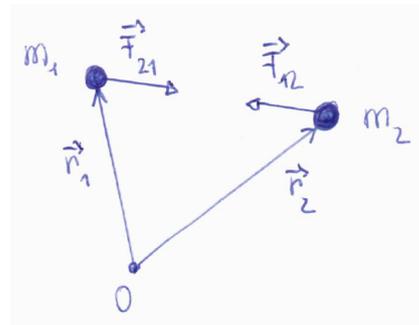


Abbildung 7.1: Das Zweikörperproblem.

Auf der linken Seite steht die zeitliche Ableitung der gesamten kinetischen Energie T ,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{r}_i^2. \quad (7.10)$$

Zur Behandlung der rechten Seite gehen wir bei unserem Problem von konservativen Kräften aus. Für diese gilt

$$\text{rot} \vec{F}_i = 0. \quad (7.11)$$

Damit lässt sich ein konservatives Potential definieren, so dass³

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}). \quad (7.12)$$

Somit ergibt sich für die rechte Seite

$$-\sum_{i=1}^2 (\vec{\nabla}_i V) \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{dV}{dt}. \quad (7.13)$$

Insgesamt erhalten wir für die Gesamtenergie $E = T + V$ damit

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (T + V(\vec{r})) = 0 \quad (7.14)$$

und also Energieerhaltung.

Zur weiteren Behandlung des Problems führen wir die *Relativ-* und *Schwerpunktkoordinaten* \vec{r} und \vec{R} ein. Durch den Übergang von \vec{r}_1, \vec{r}_2 zu den Relativ- und Schwerpunktkoordinaten \vec{r} und \vec{R} kann das Zweikörperproblem auf ein äquivalentes Einkörperproblem zurückgeführt werden. Die Relativkoordinate \vec{r} ist definiert durch (siehe auch oben)

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (7.15)$$

Die Definition der Schwerpunktkoordinate \vec{R} ist

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (7.16)$$

Damit haben wir

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (7.17)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad (7.18)$$

wobei

$$M = m_1 + m_2 \quad (7.19)$$

die *Gesamtmasse* des Systems bezeichnet. Die beiden gekoppelten Bewegungsgleichungen (7.3) und (7.4) können dadurch in zwei entkoppelte Bewegungsgleichungen für \vec{r} und \vec{R} überführt werden. Aus Glg. (7.16) leiten wir ab

$$M \ddot{\vec{R}} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{P} \quad (7.20)$$

³Es hängt nur von der Relativkoordinate \vec{r} ab.

und also

$$M\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{P}} = 0. \quad (7.21)$$

Der Massenschwerpunkt führt also eine geradlinig gleichförmige Bewegung aus. Die zweite Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate finden wir folgendermaßen:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{21}. \quad (7.22)$$

Wir führen die *reduzierte Masse* μ ein⁴

$$\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (7.23)$$

und erhalten damit

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} \equiv \vec{F}(\vec{r}). \quad (7.24)$$

Diese Gleichung besagt, dass sich die Relativkoordinate $\vec{r}(t)$ so verhält, als ob sich ein Körper der Masse μ im Zentralfeld $\vec{F} = \vec{F}_{21}$ bewegt. Wir haben damit ein *effektives* Ein-Teilchen-Problem.

Wir zerlegen nun den Gesamtdrehimpuls \vec{L} in einen Relativ- und in einen Schwerpunktanteil \vec{L}_r und \vec{L}_s :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2 \\ &= \left(\vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \times m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right) + \left(\vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \times m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right) \\ &= (m_1 + m_2) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M^2}}_{=\mu} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{L}_s + \vec{L}_r, \end{aligned} \quad (7.25)$$

mit

$$\vec{L}_s = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \quad (7.26)$$

und

$$\vec{L}_r = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \quad (7.27)$$

Der Relativ- und Schwerpunktdrehimpuls sind jeweils getrennt erhalten. Ebenso können wir die Energie in einen Relativ- und einen Schwerpunktanteil E_r und E_s zerlegen:

$$E = E_s + E_r, \quad (7.28)$$

mit

$$E_s = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \quad (7.29)$$

und

$$E_r = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}). \quad (7.30)$$

Die Relativ- und Schwerpunktenergie sind jeweils getrennt erhalten.

⁴Die reduzierte Masse ist immer kleiner als die kleinere der beiden Massen und nähert sich ihr an, wenn die größere Masse gegen unendlich strebt.

7.2 Bahnkurven

Ab jetzt betrachten wir nur noch die Relativbewegung und lassen den Index r an den entsprechenden Grössen weg. Aus der Drehimpulserhaltung folgt, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet. Denn (wir nennen ab jetzt \vec{L}_r der Einfachheit halber \vec{L})

$$\vec{L} \cdot \vec{r} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{r} = 0, \quad (7.31)$$

wobei wir ab jetzt die reduzierte Masse μ mit m bezeichnen, also

$$\mu \equiv m. \quad (7.32)$$

Dies ist die Ebenengleichung (siehe Fig. 7.2 für die Normalform einer Ebenengleichung) durch den Nullpunkt. O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Bewegung in der x - y -Ebene verläuft. Die Einführung der Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi \quad (7.33)$$

liefert mit

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \quad \text{und} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (7.34)$$

für den Drehimpuls (nur die L_z -Komponente ist ungleich null für die Bewegung in der x - y -Ebene)

$$L_z = (\vec{L})_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y) = mr^2\dot{\varphi}. \quad (7.35)$$

Und für die Energie haben wir

$$\begin{aligned} E_r \equiv E &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r). \end{aligned} \quad (7.36)$$

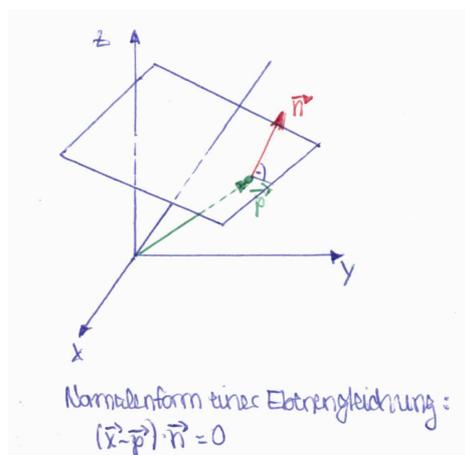


Abbildung 7.2: Die Normalform der Ebenengleichung.

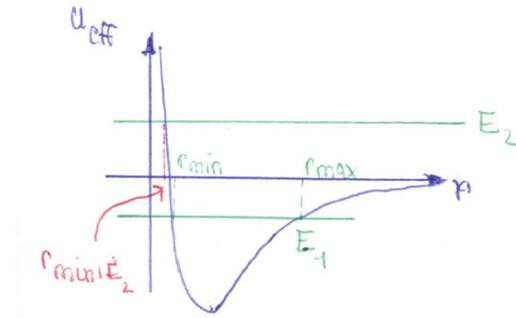


Abbildung 7.3: Das effektive Potential.

Bei dem ersten Term auf der rechten Seite handelt es sich um die kinetische Energie für eine Bewegung in radialer Richtung, der zweite Term ist die Rotationsenergie und der dritte die potentielle Energie. Die beiden letzteren Terme sind lediglich eine Funktion der Radialkoordinate r , so dass sie zu einem effektiven Potential $U_{\text{eff}}(r)$ zusammengefasst werden können (wir nennen der Einfachheit halber L_z ab jetzt L), also

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \quad (7.37)$$

Wir haben also somit die Bewegungsgleichung unter Ausnutzung der Erhaltungssätze auf eine DGL 1. Ordnung reduziert für eine Bewegung im eindimensionalen Raum, nämlich der Radialkoordinate r als Funktion der Zeit, d.h. $r = r(t)$. Die DGL lautet

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E. \quad (7.38)$$

Daraus folgt

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{eff}}(r)]}. \quad (7.39)$$

Eine physikalische Bewegung ist nur in den Gebieten möglich, in denen das effektive Potential $U_{\text{eff}} < E$. Nur dann ist das Ergebnis reellwertig. Wir betrachten im Folgenden die Bewegung eines Planeten der Masse⁵ m um die Sonne mit Masse M . Der typische Verlauf von U_{eff} für die potentielle Energie des Planeten im Gravitationspotential der Sonne,

$$V(r) = -\frac{mMG}{r}, \quad (7.40)$$

ist in Fig. 7.3 dargestellt. Es können hier zwei typische Fälle unterschieden werden:

- (1) Für Energien E_1 , die kleiner sind als das effektive Potential im Unendlichen⁶, ist die Bewegung immer nur innerhalb eines bestimmten Raumbereichs

$$r_{\min} < r < r_{\max} \quad (7.41)$$

⁵Für die Bewegung des Planeten um die Sonne mit $M \gg m$ ist die reduzierte Masse des Zweikörperproblems ungefähr gleich der Planetenmasse m .

⁶Diese sind hier negative Energien, da der Maximalwert von U_{eff} (im Unendlichen) hier zu 0 gesetzt wurde.

erlaubt. Der Massepunkt führt eine periodische Bewegung zwischen diesen beiden Raumpunkten durch. Für

$$U_{\text{eff}} = E \quad \rightsquigarrow \quad \dot{r} = 0 . \quad (7.42)$$

D.h. hier besitzt der Massepunkt die minimal mögliche Energie und führt eine Kreisbewegung aus. Für ein Potential, das proportional zu $1/r$ oder r^2 ist, ist die Bahnkurve eine Ellipse, siehe unten.

- (2) Für Energien E_2 , die größer sind als das Potential im Unendlichen, findet die Bewegung im Raumgebiet

$$r > r_{\min, E_2} \quad (7.43)$$

statt. Ein Massepunkt, der aus dem Unendlichen kommt, kehrt bei $r = r_{\min, E_2}$ seine Bewegung um und bewegt sich zurück ins Unendliche. Für $E = U_{\text{eff}}(\infty)$ ist die Bahnkurve eine Parabel, für $E > U_{\text{eff}}(\infty)$ ist sie eine Hyperbel (siehe unten).

Aus $E = \text{const.}$ ergibt sich für Eq. (7.38)

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}})}} . \quad (7.44)$$

Daraus kann $t(r)$ und damit dann $r(t)$ berechnet werden. Da dies kompliziert ist, wird statt dessen eine neue Variable

$$s = \frac{1}{r} \quad (7.45)$$

eingeführt. Daraus soll s als Funktion von φ bestimmt werden:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{mr^2}{L} . \quad (7.46)$$

Und damit also

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi} . \quad (7.47)$$

Mit

$$V\left(\frac{1}{s}\right) = \bar{V}(s) = -mMGs \quad (7.48)$$

erhalten wir für Glg. (7.36)

$$\frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] + \bar{V}(s) = E . \quad (7.49)$$

Nochmaliges Differenzieren nach φ liefert

$$\frac{L^2}{2m} \left[2 \frac{ds}{d\varphi} \frac{d^2s}{d\varphi^2} + 2s \frac{ds}{d\varphi} \right] + \frac{d\bar{V}}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = 0 . \quad (7.50)$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s = -\frac{m}{L^2} \frac{d\bar{V}}{ds} = Gm^2 \frac{M}{L^2}. \quad (7.51)$$

Hierbei handelt es sich um eine inhomogene DGL 2. Ordnung. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL lautet

$$s_h(\varphi) = a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi. \quad (7.52)$$

Die spezielle Lösung ist gegeben durch

$$s_s(\varphi) = Gm^2 \frac{M}{L^2}. \quad (7.53)$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung

$$s(\varphi) = s_h(\varphi) + s_s(\varphi) = a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi + Gm^2 \frac{M}{L^2}. \quad (7.54)$$

Die Koeffizienten a_1 und a_2 der homogenen Lösung werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Es wird gefordert, dass der sonnennächste Punkt (also, da r minimal, folglich s maximal) bei $\varphi = 0$ liegt. Das heißt, dass

$$\left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \quad (7.55)$$

$$\left. \frac{d^2 s}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} < 0 \quad (7.56)$$

sein müssen. Aus Glg. (7.55) folgt

$$\left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = (a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi)|_{\varphi=0} = a_1 = 0. \quad (7.57)$$

Aus Glg. (7.56) folgt

$$\left. \frac{d^2 s}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = (-a_1 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi)|_{\varphi=0} = -a_2 < 0 \rightsquigarrow a_2 > 0. \quad (7.58)$$

Somit erhalten wir für die Bahnkurve

$$s = \frac{1}{r} = a_2 \cos \varphi + Gm^2 \frac{M}{L^2}. \quad (7.59)$$

Mit den Definitionen der Konstanten

$$k = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{\epsilon}{k} \geq 0 \quad (7.60)$$

ergibt dies

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \epsilon \cos \varphi). \quad (7.61)$$

Dies ist die Gleichung eines *Kegelschnitts* in Polarkoordinaten. Der Parameter $\epsilon > 0$ (da $a_2 > 0$) bestimmt die genaue Form dieser Bahnkurve. Wir haben

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon < 1 &: \text{ Ellipse} \\ \epsilon = 1 &: \text{ Parabel} \\ \epsilon > 1 &: \text{ Hyperbel} \end{aligned} \quad (7.62)$$

Für $\epsilon = 0$ ergibt sich die Bewegung auf einer Kreisbahn.

7.3 Mathematischer Einschub: Ellipse und Hyperbel

Die Gleichungen der Ellipse, Fig. 7.4, und der Hyperbel, Fig. 7.5, mitsamt ihrer Exzentrizitäten sind gegeben durch:

	Ellipse	Hyperbel	
Exzentrizität:	$\epsilon = \frac{e}{a} < 1$	$\epsilon = \frac{e}{a} > 1$	(7.63)
Bahnkurve:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei Brennpunkten (F_1, F_2) konstant (gleich $2a$) ist. Zur Polarkoordinaten-Darstellung gelangen wir, indem wir zunächst den Ursprung in einen der Brennpunkte $F_2 = (e, 0)$ schieben. Damit haben wir ($x = \hat{x} + e, y = \hat{y}$, wobei \hat{x}, \hat{y} die Koordinaten im neuen Koordinatensystem sind)

$$\frac{(\hat{x} + e)^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1. \quad (7.64)$$

Nun gehen wir zu den Polarkoordinaten über,

$$\hat{x} = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad \hat{y} = r \sin \varphi, \quad (7.65)$$

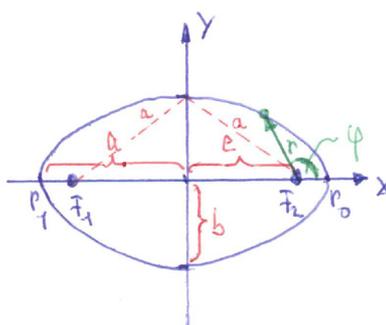


Abbildung 7.4: Die Ellipse.

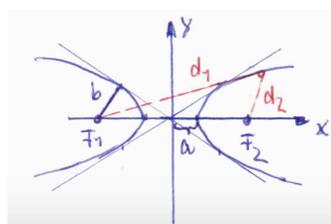


Abbildung 7.5: Die Hyperbel.

und erhalten

$$\frac{(r \cos \varphi + e)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \varphi)^2}{b^2} = 1. \quad (7.66)$$

Dies ergibt eine quadratische Gleichung für r mit den beiden Lösungen

$$r = \frac{b^2(\pm a - e \cos \varphi)}{(a - e \cos \varphi)(a + e \cos \varphi)}. \quad (7.67)$$

Für positives r wählen wir das positive Vorzeichen und erhalten

$$r = \frac{b^2}{a + e \cos \varphi} = \frac{b^2/a}{1 + \frac{e}{a} \cos \varphi}. \quad (7.68)$$

Wir setzen

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{e}{a} \quad (\text{die Exzentrizität (s.o.)}) \quad (7.69)$$

und gelangen zur Polardarstellung

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \quad (7.70)$$

Aus dem Vergleich mit Glg. (7.61) lesen wir ab, dass

$$p = k = \frac{L^2}{Gm^2M}. \quad (7.71)$$

Wir wollen nun die Bahnkurve weiter diskutieren. Der Satz von Pythagoras liefert

$$b^2 = a^2 - e^2. \quad (7.72)$$

Aus Fig. 7.5 lesen wir für den ‘‘sonnennächsten’’ und ‘‘sonnenfernten’’ Punkt (die Sonne steht im Fixpunkt F_2 der Ellipse) ab:

$$r_0 = r(\varphi = 0) = a - e = \frac{k}{1 + \epsilon} \quad (7.73)$$

$$r_1 = r(\varphi = \pi) = a + e = \frac{k}{1 - \epsilon}. \quad (7.74)$$

Damit haben wir

$$a - e = \frac{ka}{a + e} \quad (7.75)$$

und also

$$\frac{b^2}{a} = k = \frac{L^2}{Gm^2M}. \quad (7.76)$$

Der Drehimpuls L beeinflusst also beide Halbachsen. Den Einfluss der Energie gewinnen wir, indem wir Glg. (7.49) für den sonnennächsten Punkt auswerten. Dort gilt (siehe die Anfangsbedingungen):

$$0 = \dot{r}_0 = \dot{r}(\varphi = 0) \stackrel{\text{Glg. (7.47)}}{=} -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0}. \quad (7.77)$$

Damit erhalten wir für die Gesamtenergie Glg. (7.49)

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{L^2}{2mr_0^2} - G\frac{mM}{r_0} = GmM \left(\frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0} \right) \\
 &= GmM \frac{a^2 - e^2 - 2a(a - e)}{2a(a - e)^2} \\
 \Rightarrow E &= -\frac{GmM}{2a} \Rightarrow a = -\frac{GmM}{2E}.
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

Die Energie bestimmt also die große Halbachse a der Ellipse. Die Energie ist negativ, $E < 0$, da es sich um eine gebundene Bewegung handelt. Für die kleine Halbachse finden wir damit

$$b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}. \tag{7.79}$$

Aus der Konstanz des Drehimpulses L folgt eine wichtige Aussage. Wir betrachten die Fläche dF , die der Ortsvektor in der Bahnebene in der Zeit dt überstreicht. Dies ist die Hälfte des von $\vec{r}(t)$ und $\vec{r}(t + dt)$ aufgespannten Parallelogramms (siehe Fig. 7.6):

$$\begin{aligned}
 dF &= \frac{1}{2} |(\vec{r}(t) \times \vec{r}(t + dt))| = \frac{1}{2} \left| \left(\vec{r}(t) \times (\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)dt) \right) \right| \\
 &= \frac{1}{2} dt \left| \left(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) \right) \right|.
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Somit finden wir

$$\frac{dF}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m}. \tag{7.81}$$

Daraus folgt der *Flächensatz*:

Bei Drehimpulserhaltung überstreicht der Radiusvektor (Fahrstrahl) des Massepunktes in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Wir betrachten die Gesamtfläche der Ellipse und finden mit der Umlaufzeit T und Verwendung des Flächensatzes

$$F = \pi ab = T \frac{dF}{dt} = T \frac{L}{2m}. \tag{7.82}$$

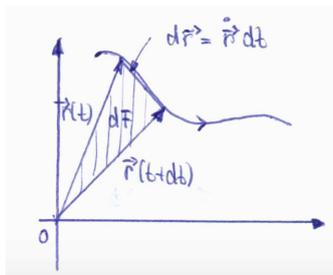


Abbildung 7.6: Skizze zur Herleitung des Flächensatzes.

Damit haben wir

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 b^2 4m^2}{L^2 a} = \frac{4m^2 \pi^2 k}{L^2} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.} \quad (7.83)$$

Wir können unsere Erkenntnisse somit in den 3 Kepler'schen Gesetzen zusammenfassen.

7.4 Die Kepler Gesetze

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen der Ellipsen.

Anhang A

Die Fouriertransformation

Mit Hilfe der Fouriertransformation kann eine beliebige periodische Funktion in ein Spektrum harmonischer Schwingungen zerlegt werden. Man geht dabei von der Fourierreihenentwicklung einer periodischen Funktion $f(t)$ mit der Periode T aus. Die Funktion $f(t)$ heißt periodisch, wenn es eine reelle Zahl $T \neq 0$ gibt, so dass für alle t gilt

$$f(t + T) = f(t) . \quad (\text{A.1})$$

Die Fourierentwicklung der periodischen Funktion $f(t)$ lässt sich schreiben als ($n \in \mathbb{N}$)

$$f(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) + B_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \right] . \quad (\text{A.2})$$

Die *Fourierkoeffizienten* A_n und B_n werden aus der Projektion der Funktion $f(t)$ auf die entsprechende harmonische Schwingung berechnet, also

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (\text{A.3})$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) . \quad (\text{A.4})$$

Figur A.1 zeigt die Fourierreihenentwicklung eines Rechteckimpulses. Man erkennt daran, dass man eine Rechteckschwingung durch unendliche viele Harmonische¹ darstellen kann. Sie enthält jeweils die ungeraden harmonischen Oberschwingungen, wobei die Amplitude mit steigender Frequenz abnimmt.

Die Fourierreihenentwicklung kann auch mit Hilfe der Exponentialfunktion beschrieben werden:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (\text{A.5})$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega_n t} , \quad (\text{A.6})$$

¹Eine Harmonische ist eine harmonische Schwingung, deren Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches einer Grundfrequenz ist. Harmonische oberhalb der Grundfrequenz werden Oberschwingungen (in der Musik Obertöne) genannt.

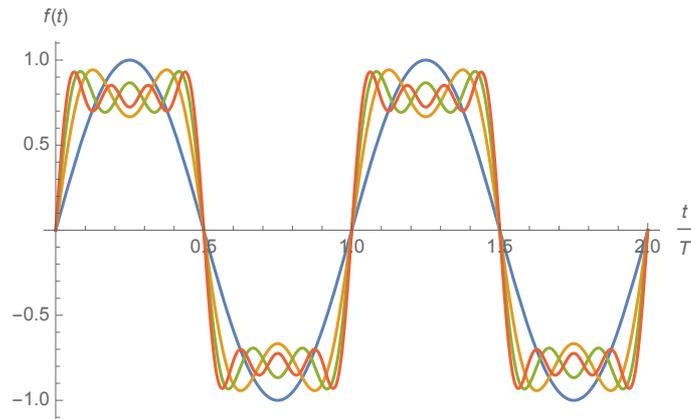


Abbildung A.1: Die Fourierreihe des Rechteckimpulses mit Periode T und Höhe h , gegeben durch $f(t) = 4h/\pi \sum_{k=1}^{\infty} (\sin((2k-1)\omega t)/(2k-1))$, normiert auf $4h/\pi$ und entwickelt bis zu verschiedenen Ordnungen: $k = 1, 2, 3, 4$ (blau, orange, grün, rot).

mit ($n \in \mathbb{N}$)

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}. \quad (\text{A.7})$$

Durch den Grenzübergang zu einer unendlich ausgedehnten Periode, $T \rightarrow \infty$, kann dieser Formalismus auf beliebige nichtperiodische Funktionen erweitert werden. In diesem Fall sind die harmonischen Schwingungen, mit denen die Funktion beschrieben wird, nicht mehr diskret, sondern gehen in ein kontinuierliches Spektrum über, dem *Fourierspektrum*.

Wir betrachten also eine Funktion $f(t)$, die nicht unbedingt periodisch sein muss. Sei $f_T(t)$ eine mit der Periode T periodische Funktion, die im Intervall $[-T/2, T/2]$ gleich $f(t)$ ist. Die Funktion $f_T(t)$ kann in eine Fourier-Reihe entwickelt werden,

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad (\text{A.8})$$

wobei ω_n in Glg. (A.7) definiert ist. Es gilt ferner

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt e^{-i\omega_n t} f_T(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega_n t} f(t). \quad (\text{A.9})$$

Für $T \rightarrow \infty$ geht $f_T(t)$ in $f(t)$ über. Wir betrachten deshalb nun den Grenzwert $T \rightarrow \infty$. Aus der Definition für ω_n , Glg. (A.7), folgt dann

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}, \quad (\text{A.10})$$

also

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} \quad (\text{A.11})$$

Die verwenden wir nun in der Glg. (A.9) für $1/T$,

$$c_n = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega_n t} f(t) \quad (\text{A.12})$$

und setzen dieses c_n dann in die Reihe Glg. (A.8) ein. Wir erhalten

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} e^{i\omega_n t} \int_{-T/2}^{T/2} d\xi e^{-i\omega_n \xi} f(\xi). \quad (\text{A.13})$$

Für $T \rightarrow \infty$ geht $\omega_{n+1} - \omega_n$ gegen null, so dass die Summe über n in ein bestimmtes Integral übergeht. Gleichzeitig wird für $T \rightarrow \infty$ die Funktion $f_T(t)$ zu $f(t)$. Und das Integral in Glg. (A.13) wird eine Funktion der kontinuierlichen Variablen t . Wir setzen

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} f(t). \quad (\text{A.14})$$

Damit können wir Glg. (A.13) im Grenzwert $T \rightarrow \infty$ schreiben als

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega). \quad (\text{A.15})$$

Man bezeichnet $f(t)$ und $\tilde{f}(\omega)$ als ihre gegenseitigen *Fourier-Transformierten*.

Zu beachten ist, dass die Wahl des Vorfaktors der Fouriertransformierten bis zu einem gewissen Grad frei ist. Man findet auch eine asymmetrische Aufteilung in zwei Vorfaktoren 1 und $1/(2\pi)$. Wichtig ist lediglich, dass man nach Hin- und Rücktransformation (also Realraum \rightarrow Fourierraum \rightarrow Realraum) wieder bei der ursprünglichen Funktion ankommt, d.h. $\tilde{\tilde{f}} = f$. Es gelten ferner die folgenden Rechenregeln (links steht die Funktion, rechts ihre Fouriertransformierte):

$$\dot{f}(t) \leftrightarrow i\omega \tilde{f}(\omega) \quad (\text{A.16})$$

$$f^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (i\omega)^n \tilde{f}(\omega) \quad (\text{A.17})$$

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-i\omega t_0} \tilde{f}(\omega) \quad (\text{A.18})$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t_0}. \quad (\text{A.19})$$

Diese Fouriertransformationspaare erlauben es, DGLs in algebraische Gleichungen überzuführen, wenn sie nicht im Realraum sondern im Fourierraum gelöst werden. Das vereinfacht die Lösung des Problems ungemein.

Beachte: Es gibt auch die Fouriertransformierte zu $f(x)$. Sie wird $\tilde{f}(k)$ bezeichnet. Wir haben dann

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad (\text{A.20})$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} f(x). \quad (\text{A.21})$$

Beispiel: Berechnung der Fouriertransformierten $\tilde{f}(\omega)$ des Einheitsimpulses, der durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

gegeben ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 2\pi\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\
 &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-a}^{t=a} = -\frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}] \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{\omega} \sin(\omega a) & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2a & \text{für } \omega = 0 \end{array} \right\} = 2a \cdot \text{sinc}(\omega a), \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

mit der sinc-Funktion

$$\text{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \sin(z) & \text{für } z \neq 0 \\ 1 & \text{für } z = 0 \end{cases} \tag{A.24}$$

Die graphischen Darstellungen des Einheitsimpulses $f(t)$ und seiner Fouriertransformierten, der sinc-Funktion $\tilde{f}(\omega)$, sind in Fig. A.2 gegeben.

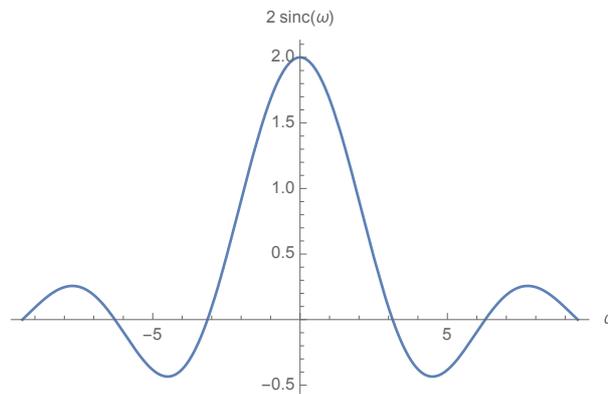


Abbildung A.2: Die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\omega)$ des Einheitsimpulses gegeben durch die sinc-Funktion, die hier dargestellt ist für $a = 1$.

Anhang B

Die δ -Distribution

Die δ -Distribution ist definiert durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' . \quad (\text{B.1})$$

Sie ist somit ein Funktional, das eine Funktion auf eine Zahl abbildet. Aus der Definition lassen sich folgende Zusammenhänge ableiten:

$$f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x + x') dx' \quad (\text{B.2})$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(-x') dx' \quad (\text{B.3})$$

$$f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(-x - x') dx' . \quad (\text{B.4})$$

Die δ -Distribution hat folgende Eigenschaften:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & x \neq x' \\ \infty & x = x' \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx' = 1 \quad (\text{B.6})$$

$$\delta(x) = \delta(-x) . \quad (\text{B.7})$$

Es gibt auch δ -Distributionen in höheren Dimensionen,

$$\delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{B.8})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' dz' \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') = \int_{-\infty}^{\infty} dV' \delta(\vec{r} - \vec{r}') = 1 \quad (\text{B.9})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = f(\vec{r}) . \quad (\text{B.10})$$

Man kann die δ -Distribution auch folgendermaßen darstellen, was in manchen Fällen eine Vereinfachung ist,

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dV_k e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} . \quad (\text{B.11})$$

Man kann die δ -Distribution auch in anderen Koordinatensystemen beschreiben. Z.B. im 3-Dimensionalen durch Kugelkoordinaten oder durch Zylinderkoordinaten. Es gilt in Kugelkoordinaten, dass

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}. \quad (\text{B.12})$$

Denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dV \delta(\vec{r}) &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} dr d\phi d\theta r^2 \sin\theta \delta(\vec{r}) \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \delta(\vec{r}) \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \\ &= \int_0^{\infty} dr \delta(r) = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Für Zylinderkoordinaten gilt die Relation

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho}. \quad (\text{B.14})$$

Speziell gilt im 2-Dimensionalen, also für Polarkoordinaten,

$$\delta^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}. \quad (\text{B.15})$$

Abschließend werden noch einige wichtige Rechenregeln für δ -Distributionen angegeben:

- Ableitung einer δ -Distribution, $\frac{\partial}{\partial x}\delta(x)$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x-x') dx' &= f(x') \delta(x-x') \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x'} f(x') \right) \delta(x-x') dx' \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} f(x). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

- δ -Distribution einer Funktion $g(x)$

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right|_{x_i}} \delta(x-x_i). \quad (\text{B.17})$$

Dabei sind die x_i die Nullstellen der Funktion, $g(x_i) = 0$. Damit findet man z.B.¹

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}. \quad (\text{B.18})$$

Häufig ist es auch nützlich, die δ -Distribution als Grenzübergang aus stetigen Funktionen darzustellen. So hat z.B. die Funktion

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad (\text{B.19})$$

¹Die Relation erweist sich oft als nützlich. Merken!

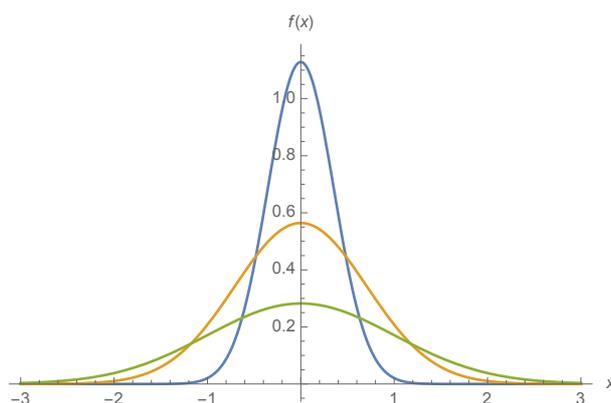


Abbildung B.1: Die Dichte der zentrierten Normalverteilung für verschiedene Werte von σ , $\sigma = 1/2, 1, 2$ (blau, orange, grün).

die Eigenschaft, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \sigma) dx = 1 \quad (\text{B.20})$$

und

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f(x, \sigma) = \delta(x) . \quad (\text{B.21})$$

Diese Funktion ist für $\sigma = \sqrt{2}$ ist die sogenannte Gauß'sche Glockenkurve. Die auch Normalverteilungs-Dichtefunktion genannte Funktion $f(x, \sigma)$ ist in Fig. B.1 für verschiedene Werte von σ dargestellt. Je kleiner σ wird, desto schmaler und höher wird die Funktion um $x = 0$. Das Integral unter der Kurve bleibt über die gesamte x -Achse aber immer gleich 1.