

Experimentalphysik



Theoretische Physik

Mechanik

Statik - Kinematik - Dynamik

Mechanik starrer Körper - Kontinuumsmechanik

Newtonsche Mechanik - Lagrangemechanik

Mechanistisches Weltbild

Physikalische Größen beschreibbar durch

Skalare: Zahlenwert (Maßzahl) + Einheit

(beobachtbar $\leadsto$ reelle Zahl)

Bsp.: Masse, Volumen, Temperatur, ...

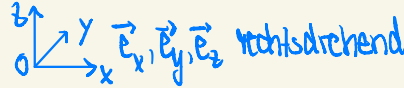
Vektoren: Betrag + Richtung

Bsp.: Geschwindigkeit, Kraft, Beschleunigung

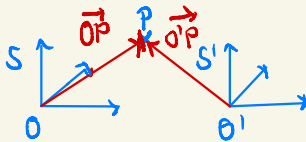
Tensoren: zunächst für uns nicht relevant

Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Kartesisches Koordinatensystem



Ortsvektor $\vec{r} = \vec{OP}$
 $\vec{r}' = \vec{O'P}$



Skalarprodukt $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$

Es gilt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ $i, j = 1, 2, 3$

Betrag / Norm $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = a$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \\ a \cdot b \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

Bemerkungen: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist ein Skalar

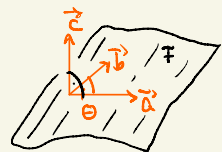
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ falls $\theta = \pi/2$ oder $a=0$ oder $b=0$
- Maß für Größe der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Kreuzprodukt: Verknüpfung im dreidimensionalen euklidischen Vektorraum

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden Rechtssystem

$$c = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta$$



Differentiation: $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Notation für Zeitableitung: $\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

Summenregel: $\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

Produktregel: $\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel: $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Kettenregel: $\frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$f(x) \rightarrow$ Stammfunktion $F(x)$, so dass

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$F(x) = \int^x f(x') dx'$$

$F(x)$ bestimmt bis auf eine Konstante

bestimmte Integration $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Partielle Integration:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

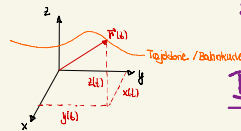
Substitutionsregel:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(x_1)}^{g(x_2)} f(g) dg$$

Bahnkurve: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$

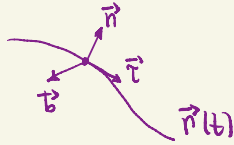
Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$



Wahl des Koordinatensystems wichtig
Hilfreich: Mathematische Beschreibung der Bewegung anpassen.

Natürliche Koordinaten/
Begleitendes Dreibein



lokales Koordinatensystem, relativ zur Bahnkurve orientiert

Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}(t)$: $\vec{v}(t) = v(t) \vec{T}(t)$
 $|\vec{T}(t)|^2 = 1$

Bogenlänge der Bahnkurve: $s(t) = \int_0^t ds(t') = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(t')| dt'$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $\vec{n} \parallel \frac{d\vec{T}(t)}{dt}$ [ist $\perp \vec{T}(t)$]
 $|\vec{n}(t)|^2 = 1$

Die Ableitung eines Einheitsvektors nach einer Größe, von der er abhängt, steht immer senkrecht zum Vektor selbst.

Zusammenhang mit Beschleunigung $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{T}(t) + \frac{v^2(t)}{R(t)} \vec{n}(t) = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$$

tangentiale $\vec{a}_{\parallel}$
radiale $\vec{a}_{\perp}$
Beschleunigung

Krümmungsradius R : Radius des Kreises der Bahnkurve in Umgebung des Punktes annähert; $R = \infty$ für geradlinige Bew.

Schmiegungelebene: Von $\vec{T}(t)$ und $\vec{n}(t)$ aufgespannte Ebene

Binormaleneinheitsvektor: $\vec{b}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{n}(t)$, $|\vec{b}(t)|^2 = 1$

Koordinatensysteme sind nicht fixiert; Verbindung durch Matrizen

Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ $(A)_{ij} = a_{ij}$
Zeile $i=1, \dots, n$ Spalte $j=1, \dots, m$

Spezielle Matrizen:

$n=m$: quadratische Matrix

$m=1$: Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

$n=1$: Zeilenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$

(ii) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$
müssen gleich groß sein!

(iii) $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k} \Rightarrow C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times k}$

$$(C)_{ij} = (A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} \cdot b_{lj}$$

Matrizen

$$(iii) A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times k} \leadsto C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$(C)_{ij} = (A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} b_{lj}$$

$$(iv) \text{ Transponierte Matrix } A^T$$

$$(v) \text{ (Seit)re spezielle Matrizen } A_{\text{diag}}, 1, A^{-1}$$

Determinanten für quadratische Matrizen

$$n=2: \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$n \geq 3: \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \begin{array}{l} \text{Entwicklg. nach} \\ j\text{-ter Spalte} \end{array}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad i\text{-ter Zeile}$$

A_{ij} : $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix von A : Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte

Eigenschaften von Determinanten

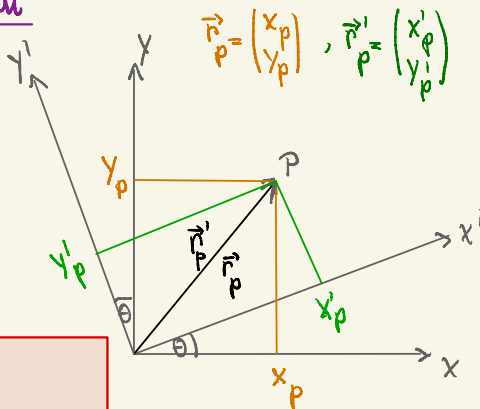
Drehungen

(I) 2-dimensionaler Fall

$$\vec{r}'_p = O \vec{r}_p$$

mit

$$O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



ACHTUNG: Hier wurde das Koordinatensystem gedreht. Man nennt dies passive Drehung!

Eigenschaften von Drehmatrizen

a) quadratisch b) reell c) $\det O = 1$

d) Zeilen / Spalten haben Länge 1.

e) Zeilen / Spalten sind orthogonal zueinander.

f) Es gilt $O^T O = 1$

c) - f) $\leadsto$ orthonormale Matrix

Drehung eines Vektors um den Winkel θ :

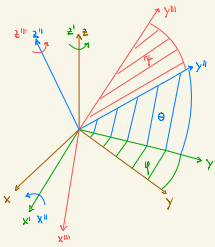
2-dim: $\vec{r}'_p = O \vec{r}_p = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \vec{r}_p$

Drehung im 3-dim. Raum

darstellbar durch Hintereinander-Ausführen der Drehungen um die 3 Koordinatenachsen

Achtung: Reihenfolge ist wichtig

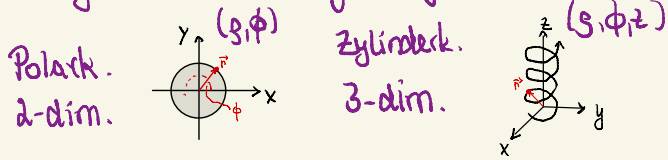
Euler-Winkel



$$O = O_z(\gamma) \cdot O_x(\theta) \cdot O_z(\varphi)$$

Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten

orthogonale, krummlinige KO-Systeme



Kartesische $\leftrightarrow$ Zylinderkoordinaten

$$x = s \cos \phi$$

$$y = s \sin \phi$$

$$z = z$$

$$s \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \begin{cases} \arccos x/s & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos x/s & y < 0 \end{cases}$$

$$z = z$$

Partielle Ableitungen $f = f(x_i), i = 1, \dots, n$

Notation: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f = f_{x_i}$

Totale Ableitung: $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$

Bsp.: $f(x(t), y(t), z(t), t): \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$

Linienelement Zylinderkoord.: $ds^2 = |d\vec{r}|^2 = ds^2 + s^2 d\phi^2 + dz^2$

Basisvektoren: $\vec{e}_s = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \mid \vec{e}_s = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
(2,3-dim.)

Zylinderkoordinaten: Ortsvektor: $\vec{r} = s \vec{e}_s + z \vec{e}_z$

allgemein: $\vec{r} = k_s \vec{e}_s + k_\phi \vec{e}_\phi + k_z \vec{e}_z$

$$k_s = \cos\phi k_x + \sin\phi k_y, k_\phi = -\sin\phi k_x + \cos\phi k_y, k_z = k_z$$

Zylinderkoordinaten:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + \phi \vec{e}_\phi + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r} = (\rho - \rho^2 \rho) \vec{e}_\rho + (2\rho\dot{\phi} + \dot{\phi}\rho) \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z$$

Kugelkoordinaten:

θ Polwinkel,

ϕ Azimutalwinkel,

r Radius

$$x = r \cos \phi \sin \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

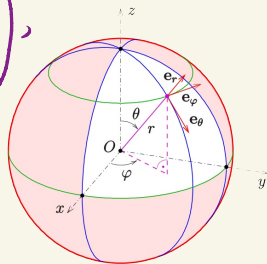
Linienelement:

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = dr^2 + r^2(d\phi^2 \sin^2 \theta + d\theta^2)$$

Basisvektoren:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$



Ortsvektor: $\vec{r} = r \vec{e}_r$

Allgemein: $\vec{k} = k_r \vec{e}_r + k_\theta \vec{e}_\theta + k_\phi \vec{e}_\phi$

Transformation der Koordinaten

$$\begin{pmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + (\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi) r$$

Kreisbewegung bei konstanter

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\phi}$

Geschwindigkeit $v = r\omega = \text{const.}$

$$\vec{v}(t) = v \vec{e}_\phi(t) = v \vec{e}_\phi(t)$$

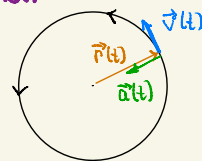
const. $\nearrow$ Zeitabh.

Beschleunigung: $a = r\omega^2 = \text{const.}$

$$\vec{a}(t) = -r\omega^2 \vec{e}_r(t)$$

const. $\nearrow$ Zeitabh.

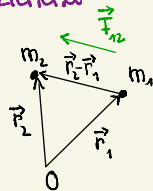
Zentripetalbeschleunigung



(i) Gravitationskraft: anziehend

Kraft von 2 auf 1

$$\vec{F}_{12} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$



(ii) Coulombkraft: anziehend oder abstoßend

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

(iii) Lorentzkraft: bewirkt Ladung im elektrischen und magnetischen Feld

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

(iv) Federkraft

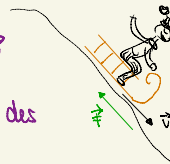
$$\vec{F}_{12} = -k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Proportional zur Auslenkung, entgegengesetzt zur Auslenkung gerichtet

(v) Reibungskraft:

$$\vec{F} = -f(v) \cdot \vec{v}$$

entgegen der Bewegung des Körpers gerichtet



Lex Prima - Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Massepunkt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung verharrt. Solche Systeme heißen Inertialsysteme.

Lex Secunda - Aktionsprinzip

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, in der die Kraft wirkt.

Die Änderung des Bewegungszustands (Impuls) ist proportional zur Kraft und zeigt in deren Richtung.

Lex Tertia - Wechselwirkungsprinzip, actio = reactio

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper 1 auf einen anderen Körper 2 eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft von Körper 2 auf Körper 1.

Superpositionsprinzip

Wirken mehrere Kräfte auf einen Massepunkt, so kann ihre Wirkung durch vektorielle Superposition beschrieben werden.

NEWTONSCHE GESETZE

Differentialgleichungen (DGL)

gewöhnliche: implizit: $f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

explizit: $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

lineare DGL: $y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}(x) + b(x) = 0$

homogen: $b(x) = 0$

homogene lineare DGL mit konst. Koeffizienten:

Lösungsansatz: $y(x) = e^{\lambda x} \leadsto$

allgemeine Lösung: $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}$
 $\uparrow$ aus Anfangsbedgn

Galilei-Transformation

- $t \rightarrow t' + b$ $b = \text{const.}$ (1 Parameter)
- $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$, $\vec{a} = \text{const.}$ (3 Par.)
- $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = A \vec{r}$, A Drehmatrix (3 Par.)
- $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} \cdot t$ (3 Par.)

$\leadsto$ 10 Parameter beschreiben allg. Galilei-Transf.

Beschleunigte Bezugssysteme - Scheinkräfte

Σ sei Inertialsystem, Σ' bewege sich nicht geradlinig und gleichförmig relativ zu Σ

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)$$

- Geschwindigkeit in Σ' :
Relativgeschwindigkeit
im beschleunigten System

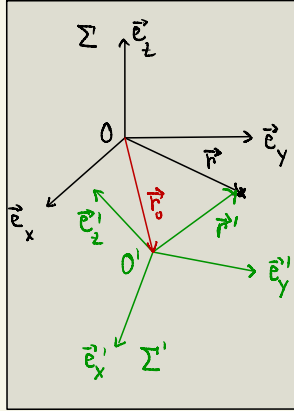
$$\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt}$$

- Translationsgeschwindigkeit
Kont. $\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{\vec{r}}_0$

- Absolutgeschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

Ableitung eines Vektors in einem Inertialsystem, der in einem rotierenden Bezugssystem dargestellt wird:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \vec{\omega} \times$$



$$\text{Es gilt } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

Im Inertialsystem haben wir (2. Newtonsches Gesetz)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Wie ist die Relation in Σ' ?

Betrachte

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right) = \ddot{\vec{r}}_0 + \frac{d}{dt} \left(\frac{d'}{dt} \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right)$$

Nachfolgenden Umformungen:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{a}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

$\vec{r}'$: Ortsvektor

$\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt}$: Geschwindigkeitsvektor

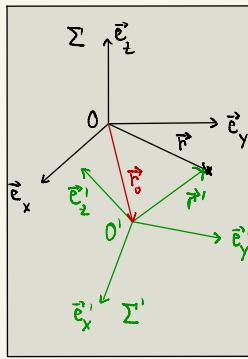
$\ddot{\vec{a}}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt}$: Beschleunigungsvektor

im gestrichenen,
also bewegten,
Koordinatensystem

Schlinkkräfte ($m\vec{a}' = m\vec{r}'' + \vec{F}_{\text{schein}}$)
 Auftreten in Nicht-Inertialsystemen

Translationskraft

$$\vec{F}_{\text{trans}} = -m \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2}$$



Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{\text{zent}} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Azimutalkraft

$$\vec{F}_{\text{az}} = -m \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Erhaltungssätze

Physikalische Größe G

ist erhalten, falls

$$\frac{dG}{dt} = 0.$$

G : Integral der
 Bewegung

Vektoralgebra

Gradient $\text{grad } \phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \phi(x, y, z)$

Nabla Operator $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix}$

Bemerkung $d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}$

Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(x, y, z) = \text{div } \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$

$\text{div } \vec{f} > 0$: Quelle, $\text{div } \vec{f} < 0$: Senke

Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{f}(x, y, z) = \text{rot } \vec{f} = \begin{pmatrix} \partial f_z / \partial y - \partial f_y / \partial z \\ \partial f_x / \partial z - \partial f_z / \partial x \\ \partial f_y / \partial x - \partial f_x / \partial y \end{pmatrix}$

Satz von Stokes $\iint_{\Sigma} d\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r})) = \oint_{R(\Sigma)} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$



Jacobi Determinante D:

↑ differenzierbar, mit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Bsp.: Koordinatentransformation Φ in
mehrdim. Integral: Transformationssatz

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x,y,z) \underbrace{dx dy dz}_{dV} \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r,\theta,\varphi) \cdot |\det D\Phi(r,\theta,\varphi)| \cdot dr d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Für Polarkoordinaten: $\det D\Phi(r,\varphi) = r$

Impulserhaltung: $\vec{p} = \vec{p} \Rightarrow$
 $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.}$

Energieerhaltung:

Def. Arbeit $W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Def. Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} = P, \text{ also} \\ P = 0 \Rightarrow T = \text{const.} \\ \text{und } T_2 - T_1 = W \end{array} \right.$

kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$

Kraftfeld $\vec{F}$: kann konservativ oder nicht-konservativ/dissipativ
sein: $\vec{F} = \vec{F}_{\text{cons.}} + \vec{F}_{\text{diss.}}$

Wenn $\frac{dV(\vec{r})}{dt} = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} \leadsto \vec{F}$ konservativ (*)

$\vec{F}_{\text{diss.}} = \vec{0} \Rightarrow E = T + V(\vec{r}) = \text{const.}$ E gesamte mechan. Energie

(*) $\Rightarrow$ für konservative Kraft $\vec{F}$:

(i) $\vec{F} = -\text{grad } V(\vec{r})$ V bis auf Konstante bestimmt
Vorzeichen ist Konvention
 $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

(ii) $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ Konservatives Kraftfeld ist wirbelfrei.

(iii) $\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ Kons. Kraft leistet längs eines geschlossenen Wegs keine Arbeit

(iv) $\int_{1,S_1}^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{1,S_2}^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ Arbeit einer kons. Kraft hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab

Potential $V(\vec{r})$ einer konservativen Kraft

Prüfe $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = 0$ (notwendige Bedingung)

$$\leadsto V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

$\uparrow$
Referenzpotential

Äquipotentialfläche: $V = \text{const.}$

Kraft $\perp$ Äquipotentialfläche und zeigt in Richtung des größten Pot.-Gefälles

Drehimpulserhaltung $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M} = \vec{0} \leadsto \vec{L} = \text{const.}$

Der harmonische Oszillator

rücktreibende Kraft $\sim$ Auslenkung; Bsp:

(i) Schwingende Feder: $F = -kx$, $V = \frac{1}{2} kx^2$

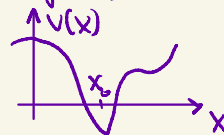
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = k/m$$

(ii) Fadenpendel, kleine Auslenkung: $F = -mg\varphi$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = g/l$$

(iii) Schwingung von Molekülen

(iv) Bewegung bei kleinen Auslenkungen um Ruhelage x_0 eines beliebigen Potentials



$$F = -\frac{dV}{dx} = V''(x_0) \cdot (x_0 - x)$$

Komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$

• $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

i imaginäre Einheit: $i^2 = -1$

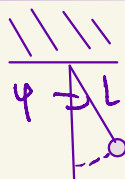
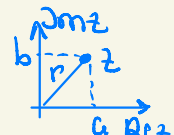
• komplex konjugiert: $z^* = a - ib$

• $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$r^2 = a^2 + b^2$$

$$\varphi = \arctan(b/a) = \arg(z)$$

• $z_{1/2} = a_{1/2} + ib_{1/2}$



$$(i) z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$(ii) z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$(iii) z_1 / z_2 = [a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)] / [a_2^2 + b_2^2]$$

Euler'sche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Satz von Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

$$\bullet \omega = \ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Freier harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = k/m$$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t} \leadsto$

$$x(t) = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t}$$

a_1, a_2 aus Anfangsbedingungen

Harmon. Oszillator mit Reibung

$$F_{\text{Reibg}} = -g\dot{x} \leadsto$$

$$\ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad g = \frac{\gamma}{m} > 0$$

$$\leadsto x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -g/2 \pm (g^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$$

Harmonischer Oszillator mit Reibung

$$F_{\text{Reibg}} = -q\dot{x} \leadsto$$

$$\text{DGL: } \ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, g = \frac{q}{m} > 0$$

$$\text{Ansatz: } x(t) = e^{\lambda t} \leadsto$$

$$\leadsto x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \text{ mit}$$

$$\lambda_{1,2} = -g/2 \pm (g^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$$

Schwache Dämpfung - Schwingfall

$$\omega_0 > \frac{g}{2} \leadsto \lambda_{1,2} = -\frac{g}{2} \pm i\Omega$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - g^2/4}$$

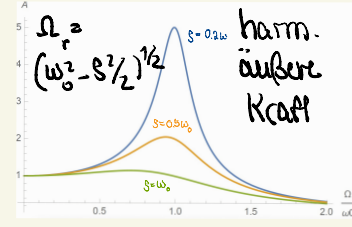
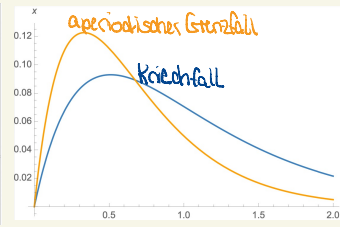
$$\text{AB: } x(0) = 0, \dot{x}(0) = v \quad (*) \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{v}{\Omega} e^{-g/2 t} \cdot \sin \Omega t$$

$$\text{Relaxationszeit } \tau = 2/g$$

$$\text{Dämpfungsverhältnis: } D = \frac{x(t)}{x(t+\tau)} = e^{g/2 \tau}$$

$$T = 2\pi/\Omega \text{ Periodendauer}$$



Starke Dämpfung - Kriechfall

$$\omega_0 < \frac{g}{2} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{g}{2} \pm \Omega'$$

$$\Omega' = \sqrt{\frac{g^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$\text{AB } (*) \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{v}{\Omega'} e^{-g/2 t} \cdot \sinh \Omega' t$$

Mittlere Dämpfung - aperiodischer Grenzfall

$$\omega_0 = \frac{g}{2} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{g}{2}$$

$$\text{AB } (*) \Rightarrow$$

$$x(t) = vt \cdot e^{-g/2 t}$$

Erzwungene Schwingungen

$$\text{'äußere Kraft } F(t) \leadsto$$

$$\ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \text{ mit } f(t) = F(t)/m$$

Harmonische Anregung

$$F(t) = F \cos(\Omega t + \theta) \leadsto$$

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_s(t)$$

$$\text{Ansatz: } x_s(t) = a e^{i\Omega t}, a = A e^{i\alpha} \Rightarrow$$

$$\bar{F} \cos(\Omega t + \theta) \rightarrow \bar{F} e^{i\Omega t}, \bar{F} = \bar{F} e^{i\theta} = \frac{F}{m} e^{i\theta}$$

$$A = \frac{\bar{F}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (g\Omega)^2}}$$

$$\tan(\theta - \alpha) \equiv \tan \delta = \frac{g\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Beliebige Anregung Externe
Kraft beliebiger zeitl. Abhängigkeit

Fourierzerlegung

periodische Fkt. $f(t)$:

$$f(t) = f(t+T)$$

Fourierreihenentwicklung:

$$f(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

$$\omega_n = 2\pi n/T, n \in \mathbb{N}; \text{ bzw.}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \text{ mit}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega_n t}$$

Fouriertransformation: Zerlegung

einer Fkt. mit beliebiger zeitabh. in
Spektrum harmonischer Schwingungen

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \quad \text{Fourier-} \\ \text{transformation} \\ \text{von } f(t)$$

Delta-Distribution

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x-x')$$

$$\delta(x-x') = \begin{cases} 0 & x \neq x' \\ \infty & x = x' \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x-x') = 1, \delta(x) = \delta(-x)$$

Lösung bei beliebiger Anregung

(i) Mit Fouriersatz $\rightarrow$

$$\ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \tilde{f}(\Omega) e^{i\Omega t}$$

Ansatz: (Superpositionsprinzip!)

$$x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \tilde{B}(\Omega) e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \tilde{B}(\Omega) = \tilde{f}(\Omega) / [-\Omega^2 + ig\Omega + \omega_0^2]$$

(ii) Sequenz von Impulsförmigen
Anregungen $\rightarrow$

$$\ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t-t')$$

Green-Funktion: Antwort eines
physikal. Systems auf punktförmige
Anregung (Antwortfunktion)

$G(t, t') = x(t)$: Fkt. von t , partimel-
lisch von t' abhängig; Kausalität:
 $G(t, t') = 0$ für $t < t'$

hier Translationsinvarianz: $G(t-t')$

wellenartig.

$$\text{Es gilt allg. } \mathcal{D}_t G(t-t') = \delta(t-t')$$

$$\text{hier: } \left(\frac{d^2}{dt^2} + g \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) G(t-t') = \delta(t-t') \\ [= 0 \text{ vor} \\ \text{Stoß}]$$

$$\text{AB: } x(t'_-) = 0, \dot{x}(t'_-) = 0 \Rightarrow$$

$$G(t-t') = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{g}{2}(t-t')} \cdot \sin(\Omega(t-t')) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

Beliebige zeitabhängige Kraft $f(t)$:

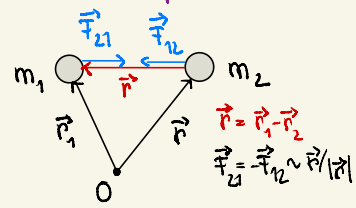
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t') dt'$$

denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} + g \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] G(t-t')}_{\delta(t-t')} f(t') = f(t)$$

Zweiteilchensystem (mit Zentralkraft)

Bewegung zweier Körper ohne zusätzliche äußere Einflüsse



$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}$$

Erhaltungsgrößen:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2,$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V(\vec{r}) = T + V$$

Relativkoordinat: $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Schwerpunkt koordinat:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Gesamtmasse } M = m_1 + m_2$$

$\Rightarrow$ Zentralkopplette DGL's:

- $M \ddot{\vec{R}} = \vec{P} = 0 \Rightarrow$ geradlinig, gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts

- $\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} \equiv \vec{F}(\vec{r})$ Effektives 1-Teilchen Problem

Effektive Masse:

$$\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{M}$$

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{L}_r + \vec{L}_s, \quad \text{mit}$$

$$\vec{L}_r = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{L}_s = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Gesamtenergie

$$E = E_s + E_r, \quad \text{mit}$$

$$E_s = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

$$E_r = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})$$

L_r, L_s separat erhalten

E_r, E_s " " " "

Bahnradien "r" Index

i.F. weggelassen, $\mu \equiv m$

$\vec{L} = \text{const.} \Rightarrow$ Bewegung in einer Ebene, o.B.d.R

X-Y-Ebene:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}_{\equiv U_{\text{eff}}(r)}$$

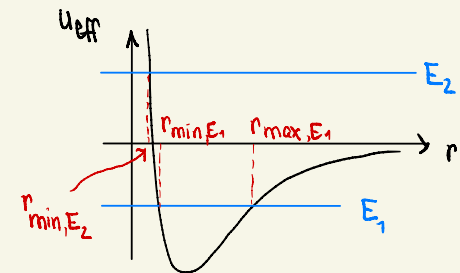
$$L_z \equiv L$$

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r)]}$$

für $V(r) = -\frac{mMG}{r}$



$$\dot{r} = \pm \left[\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r)] \right] \quad (*)$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r}$$

$$(i) E < U_{\text{eff}}(\infty):$$

Bewegung in $r_{\min} < r < r_{\max}$

$$U_{\text{eff}} = E: \text{ Kreisbewegung}$$

$$(ii) E > U_{\text{eff}}(\infty):$$

Bewegung in $r > r_{\min}$

$$E = U_{\text{eff}}(\infty): \text{ Parabel}$$

$$E > U_{\text{eff}}(\infty): \text{ Hyperbel}$$

Lösung von (*):

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Kegelschnitt in Polarkoordinaten

$0 < \varepsilon < 1$: Ellipse

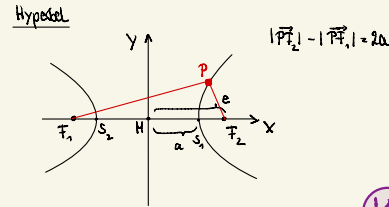
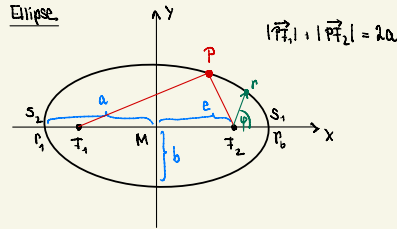
$\varepsilon = 1$: Parabel

$\varepsilon > 1$: Hyperbel

Ellipse und Hyperbel

Ellipse Hyperbel
Exzentrizität $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$

$$\text{Bahnkurve } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ellipse in Polardarstellung:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad p = k = \frac{L^2}{Gm^2M}$$

$$a = \frac{-GmM}{2E}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}$$

$$\bullet \frac{dF}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

$\leadsto$ Flächensatz (K2)

$$\bullet F = \pi ab = T \frac{dF}{dt} = T \frac{L}{2m}$$

$$\leadsto \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.} \leadsto \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (K3)$$

Also sind die Kepler Gesetze

7.4 Die Kepler Gesetze

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich zueinander wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

