

## 2.4 Bezugssysteme

Die Wahl von Ortskoordinaten  $\vec{r} = (x, y, z)^T$  und einer Zeitkoordinate  $t$  definiert ein Bezugssystem  $\Sigma$ .

Der Wechsel in ein Bezugssystem  $\Sigma'$  mit Koordinaten  $x', y', z', t'$  wird beschrieben durch eine Transformation

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(t, \vec{r}) \\ \vec{f}(t, \vec{r}) \end{pmatrix} \quad (152)$$

mit —zunächst beliebigen— (hinreichend oft differenzierbaren) Funktionen  $f_0, f_1, f_2, f_3$ . Ein (oft unausgesprochenes) Axiom der Newtonschen Mechanik ist der Glaube an eine absolute Zeit, die von Bewegungen (und allen physikalischen Abläufen) unbeeinflusst verläuft. Dieser Geist beschränkt  $f_0$  auf die Form:

$$t' = f_0(t) = t + t_0 \quad (153)$$

↑

Verschiebung des Zeitnullpunkts, z.B. zwischen der Westeuropäischen Zeit (Greenwich-Zeit) und der Mitteleuropäischen Zeit (MEZ)

Ein Bezugssystem, in dem jede kräftefreie Bewegung geradlinig-gleichförmig ist, also durch

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{r}_0 \quad \text{mit } \vec{v} = \text{const. und } \vec{r}_0 = \text{const.} \quad (154)$$

beschrieben wird, heißt Inertialsystem (von „inert“ = träge). Eine Transformation, die ein Inertialsystem in ein anderes überführt und Gl. (153) erfüllt, heißt Galilei-Transformation (GT). Für Galilei-Transformationen gilt

$$t' = t + t_0 \quad (155a)$$

$$\vec{r}'(t') = \vec{f}(\vec{r}, t) = S(\phi)\vec{r} + \vec{w}t + \vec{a} \quad (155b)$$

mit zeitunabhängigen  $S(\vec{\phi})$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{a}$  und  $S^T(\vec{\phi}) S(\vec{\phi}) = \mathbb{1}$ . Ist zusätzlich  $\det S(\vec{\phi}) = 1$ ,  $S(\vec{\phi})$  also Drehmatrix, so spricht man von einer eigentlichen (oder orthochoren) GT.

Mit Gl. (155) finden wir im Bezugssystem  $\Sigma'$  für unsere geradlinig-gleichförmige Bewegung:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t') &= S(\vec{\phi}) (\vec{v}t + \vec{r}_0) + \vec{w}t + \vec{a} \\ &= [S(\vec{\phi})\vec{v} + \vec{w}] t + S(\vec{\phi})\vec{r}_0 + \vec{a} \\ &\stackrel{(153)}{=} \underbrace{[S(\vec{\phi})\vec{v} + \vec{w}] t'}_{= \vec{v}'} + \underbrace{S(\vec{\phi}) (\vec{r}_0 - \vec{v}t_0) - \vec{w}t_0 + \vec{a}}_{= \vec{r}'_0} \end{aligned} \quad (156)$$

D.h. die Bewegung in Gl. (156) ist geradlinig-gleichförmig mit

$$\vec{v}' = S(\vec{\phi})\vec{v} + \vec{w}$$

$\uparrow$   
 Drehung (bzw. Drehspiegelung) der Koordinatensysteme gegeneinander

$\nwarrow$   
 Relativgeschwindigkeit von  $\Sigma'$  bzgl.  $\Sigma$

$$\vec{r}'_0 = S(\vec{\phi}) (\vec{r}_0 - \vec{v}t_0) - \vec{w}t_0 + \vec{a}$$

$\nearrow$   
Versatz der Ursprünge von  $\Sigma$  und  $\Sigma'$

Die umgekehrte Beweisrichtung, also dass aus der Forderung  $\vec{r}' = \vec{v}'t' + \vec{r}'_0$  (mit Gl. (153)) für jede Wahl  $(\vec{v}, \vec{r})$  zwingend Gl. (155) folgt, findet man z.B. in *Scheck, Mechanik*, Kap. 1.12.

Eine eigentliche GT wird durch 10 reelle Parameter beschrieben:

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2, a_3, t_0$$

Alle Inertialsysteme sind „gleichberechtigt“, d.h. die Newtonschen Gesetze haben die gleiche Form. D.h. man darf behaupten dass sich der Zug, in dem

man sitzt, in Ruhe befindet und sich der Bahnsteig mit Geschwindigkeit  $-\vec{v}$  bewegt!

Matrix-Schreibweise von Gl. (155):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{w} & S(\vec{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad \begin{matrix} 4 \times 1\text{-Untermatrix} & 4 \times 3\text{-Untermatrix} \end{matrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S(\vec{\phi}) \end{pmatrix} \\ &=: G(\vec{\phi}, \vec{w}) \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{157}$$

Verkettung zweier GT mit  $G_1 := G(\vec{\phi}_1, \vec{w}_1)$  und  $\vec{a}_1$  sowie  $G_2 := G(\vec{\phi}_2, \vec{w}_2)$  und  $\vec{a}_2$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t'' \\ \vec{r}'' \end{pmatrix} &= G_2 \begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{02} \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= G_2 \left[ G_1 \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{01} \\ \vec{a}_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} t_{02} \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= G(\vec{\phi}, \vec{w}) \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{158}$$

Durch Ausmultiplizieren von  $G_2 G_1 = G$  findet man  $\vec{w}$  und die Matrix  $S(\vec{\phi})$  in  $G$ . Aus Gl. (158) liest man außerdem ab:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} &= G_2 \begin{pmatrix} t_{01} \\ \vec{a}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{02} \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(157)}{=} \begin{pmatrix} t_{01} + t_{02} \\ \vec{w}_2 t_{01} + S(\vec{\phi}_2) \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{159}$$

**Rotierende Bezugssysteme**  $\Sigma$  sei ein Inertialsystem („raumfestes Bezugssystem“),  $\Sigma'$  drehe sich bzgl.  $\Sigma$  um eine Achse  $\vec{n}$ . Ist  $\Sigma'$  mit einem rotierenden Körper verbunden (d.h. die Koordinatenachsen sind auf diesem Körper eingezeichnet), so spricht man von einem „körperfestes Bezugssystem“. Dabei wählen wir Ursprung und Orientierung der Koordinatenachsen von  $\Sigma$  so, dass zu einem Zeitpunkt  $t_0$  die Koordinatenachsen der beiden Bezugssysteme zusammenfallen.

Beispiele: rotierende Scheibe, Erde.

$$\vec{\omega} := \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \dot{\vec{\phi}}, \quad (160)$$

das nicht mit dem Vektor aus  $3 \times 3$ -Matrizen in Gl. (160) verwechselt werden darf, heißt Winkelgeschwindigkeit.  $\vec{\omega}$  ist völlig beliebig und darf von  $t$  abhängen.

$$t' = t \quad (161a)$$

$$\vec{r}' = R(\vec{\phi}(t))\vec{r} \quad (161b)$$

Ziel: Bewegungen zwischen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  umrechnen.

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \dot{\vec{r}}', \\ &= \frac{d}{dt} [R(\vec{\phi}(t))\vec{r}] = \underbrace{\dot{R}(\vec{\phi}(t))}_{\sum_{j=1}^3 \dot{\phi}_j \frac{\partial R(\vec{\phi}(t))}{\partial \phi_j}} \vec{r} + R(\vec{\phi}(t))\dot{\vec{r}} \end{aligned} \quad (162)$$

Zur Berechnung von  $\frac{\partial R}{\partial \phi_j}$  wählen wir den Nullpunkt von  $\phi$  gerade so, dass der betrachtete Zeitpunkt  $t$  gerade dem Punkt  $t_0$  entspricht, zu dem  $\phi(t) = 0$

und  $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t)$  ist.  $\Sigma$  heißt dann instantanes Inertialsystem. Die einzige Eigenschaft von  $\Sigma$ , die wir nutzen werden, ist die Gültigkeit der Newtonschen Gesetze, die Bewegungsgleichung wird dagegen in  $\Sigma'$  gelöst werden.

Entwicklung von  $R = R(\vec{\phi})$  in Gl. (128):

$$\left[ R(\vec{\phi}) \right]_{kl} = \delta_{kl} + \sum_{m=1}^3 \epsilon_{klm} \phi_m + \mathcal{O}(\phi_n^2) \quad (163)$$

Für beliebige Vektoren  $\vec{b}, \vec{c}$  finden wir

$$\sum_{j=1}^3 c_j \left[ \frac{\partial R}{\partial \phi_j} \vec{b} \right]_k = \sum_{j,l=1}^3 c_j \left[ \frac{\partial R}{\partial \phi_j} \right]_{kl} b_l \stackrel{(163)}{=} \sum_{j,l=1}^3 c_j \epsilon_{klj} b_l = - \left[ \vec{c} \times \vec{b} \right]_k. \quad (164)$$

Also mit  $c_j = \dot{\phi}_j = \omega_j$ :

$$\dot{R} \vec{b} = \sum_{j=1}^3 \dot{\phi}_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} \vec{b} = -\vec{\omega} \times \vec{b}. \quad (165)$$

Einsetzen in Gl. (162) mit Gl. (163) (und  $\vec{b} = \vec{r}$ ):

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (166a)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (166b)$$

Für den gewählten Zeitpunkt  $t$  ist  $R(\vec{\phi}(t)) = \mathbb{1}$ , aber  $\dot{R}(\vec{\phi}(t)) \neq 0$ ! Eine schrecklich unpräzise, aber dennoch häufig verwendete Kurzschreibweise ist

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\text{Raum}} = \frac{d}{dt} \Big|_{\text{Körper}} + \vec{\omega} \times$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}' &= \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}' \stackrel{(162)}{=} \frac{d}{dt} \left( \dot{R} \vec{r} + R \dot{\vec{r}} \right) \\ &= \ddot{R} \vec{r} + 2 \dot{R} \dot{\vec{r}} + R \ddot{\vec{r}} \end{aligned} \quad (167)$$

Für  $\ddot{R}$  müssen wir Gl. (128) zur zweiten Ordnung entwickeln:

$$\begin{aligned}\ddot{R}_{kl} &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \dot{\phi}_j \frac{\partial R_{kl}}{\partial \phi_j} = \sum_{j=1}^3 \ddot{\phi}_j \frac{\partial R_{kl}}{\partial \phi_j} + \sum_{j,m=1}^3 \dot{\phi}_j \dot{\phi}_m \frac{\partial^2 R_{kl}}{\partial \phi_j \partial \phi_m} \\ &\stackrel{(128)}{=} \sum_{j=1}^3 \ddot{\phi}_j \frac{\partial R_{kl}}{\partial \phi_j} + \sum_{j,m=1}^3 \dot{\phi}_j \dot{\phi}_m \left[ -\delta_{kl} \delta_{jm} + \frac{1}{2} \delta_{lm} \delta_{jk} + \frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{lj} \right] \\ &= \sum_{j=1}^3 \ddot{\phi}_j \frac{\partial R_{kl}}{\partial \phi_j} - \delta_{kl} \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}_k \dot{\phi}_l\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[ \ddot{R}\vec{r} \right]_k &= \sum_{l=1}^3 \ddot{R}_{kl} x_l \stackrel{(164)}{=} - \left[ \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \right]_k - \vec{\omega}^2 x_k + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \omega_k \\ \Rightarrow \quad \ddot{R}\vec{r} &= -\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \vec{\omega}^2 \vec{r} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega}\end{aligned}$$

Wir nutzen

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

um  $\ddot{R}\vec{r}$  umzuschreiben in

$$\ddot{R}\vec{r} = -\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (168)$$

Einsetzen von Gl. (166) und (168) in Gl. (167) (und Verwenden von  $R(\vec{\phi}(t)) = \mathbb{1}$ ) liefert:

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \quad (169)$$

Schließlich mit Gl. (166b),  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ :

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} \quad \underbrace{- 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\swarrow} \quad \underbrace{- \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\searrow} \quad - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \quad (170)$$

↗      ↑      ↖      ↔ Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{a}_Z$

In  $\Sigma'$  beobachtete Beschleunigung      Beschleunigung im Inertialsystem  $\Sigma$       Coriolis-Beschleunigung  $\vec{a}_C$

Entsprechend heißen  $m\vec{a}_C$  und  $m\vec{a}_Z$  Corioliskraft und Zentrifugalkraft. Man spricht oft von Scheinkräften, weil sie in Inertialsystemen nicht auftreten.

Wichtige Anwendung:  $\Sigma'$  als Koordinatensystem der rotierenden Erde mit Ursprung im Erdmittelpunkt, typischerweise zur Beschreibung einer Bewegung auf oder über der Erdoberfläche.

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{im Inertialsystem } \Sigma \quad (171)$$

mit  $\omega = \frac{2\pi}{23.934 h} = \frac{2\pi}{86164 s}$ , wobei  $23.934 h = 86164 s$  ein siderischer Tag ist. Ein Sterntag sind  $24 h$ , der Unterschied liegt daran, dass die Erde an

einem Tag um ca.  $1/365$  auf ihrer Bahn um die Sonne fortschreitet (und sich in 365 Tagen 366-mal um sich selbst dreht),  $23.934 h = 24 h \frac{365}{366}$ . Wir vernachlässigen  $\dot{\vec{\omega}}$ . Zwar pendelt die Erdachse um die raumfeste  $z$ -Achse („Polbewegung“), jedoch nur mit einer Periode von 427 Tagen und weniger als 8 Metern Amplitude am Norpol. Die Ursache dafür ist, dass die Erdachse nicht mit der Symmetrieachse der Erde (die eben keine perfekte Kugel ist) zusammenfällt.

Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{a}_Z$  für einen Massenpunkt im Abstand  $\vec{r}'$  vom Erdmittelpunkt:

$$\begin{aligned} \vec{a}_Z &= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\omega^2 \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{r}') \\ \text{mit } \vec{e}_z \times \vec{r}' &= x' \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}_{=\vec{e}_y} + y' \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_y)}_{=-\vec{e}_x} + z' \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_z)}_{=0} \\ &= x' \vec{e}_y - y' \vec{e}_x \\ \Rightarrow \vec{a}_Z &= -\omega^2 \vec{e}_z \times (x' \vec{e}_y - y' \vec{e}_x) \\ &= -\omega^2 (-x' \vec{e}_x - y' \vec{e}_y) = \omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (172)$$

d.h.  $\vec{a}_Z$  ist senkrecht zu  $\vec{\omega}$  wie erwartet! (Gl. (172) findet man einfacher aus

$$\vec{a}_Z = \omega^2 \vec{r} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega}.)$$

In Kugelkoordinaten  $\vec{r}' = r \vec{e}_r$  (siehe Gl. (93)) ist

$$\begin{aligned} \vec{a}_Z &= (\vec{a}_Z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (\vec{a}_Z \cdot \vec{e}_\phi) \vec{e}_\phi + (\vec{a}_Z \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta \\ &\stackrel{(93)-(95)}{=} \omega^2 r \sin \theta \left( \underbrace{\sin \theta \vec{e}_r}_{\substack{\nearrow \\ \text{oben}}} + \underbrace{\cos \theta \vec{e}_\theta}_{\substack{\uparrow \\ \text{Süden auf der} \\ \text{Nordhalbkugel,} \\ \text{d.h. für } \theta < \pi/2}} \right) \end{aligned} \quad (173)$$

Eine bzgl. der Erde bewegte Masse erfährt zudem eine Coriolisbeschleunigung

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}' &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad v = |\dot{\vec{r}}'| \\ \vec{a}_C &= -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = 2\omega \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (174)$$

Passatwind: Wir betrachten Luftmoleküle, die sich parallel zur Erdoberfläche bewegen:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_{\text{süd}} \vec{e}_\theta + v_{\text{ost}} \vec{e}_\phi \\ \Rightarrow \vec{a}_C &= -2\vec{\omega} \times \vec{v} = -2\omega (v_{\text{süd}} \vec{e}_z \times \vec{e}_\theta + v_{\text{ost}} \vec{e}_z \times \vec{e}_\phi) \end{aligned} \quad (175)$$

$v_{\text{süd}} > 0$  beschreibt also eine Luftmasse, die sich *nach* Süden bewegt, also einen *Nordwind*. Entsprechend ist beim *Westwind*  $v_{\text{ost}} > 0$ . Um

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_\theta = [(\vec{e}_z \times \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_r] \vec{e}_r + [(\vec{e}_z \times \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_\theta] \vec{e}_\theta + [(\vec{e}_z \times \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_\phi] \vec{e}_\phi$$

zu berechnen, nutzen wir die Zyklicität des Spatprodukts aus:

$$\begin{aligned} \vec{e}_z \times \vec{e}_\theta &= \left[ \underbrace{(\vec{e}_\theta \times \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_z}_{\substack{= -\vec{e}_\phi}} \right] \vec{e}_r + \left[ \underbrace{(\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z}_{\substack{= 0}} \right] \vec{e}_\theta + \left[ \underbrace{(\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi) \cdot \vec{e}_z}_{\substack{= \vec{e}_r}} \right] \vec{e}_\phi \\ &\stackrel{(95),(93)}{=} \cos \theta \vec{e}_\phi \end{aligned} \quad (176)$$

Analog:

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_\phi = -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta = - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (177)$$

Einsetzen von Gl. (176) und (177) in Gl. (175):

$$\vec{a}_C = -2\omega \cos \theta v_{\text{süd}} \vec{e}_\phi + 2\omega v_{\text{ost}} (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \quad (178)$$

↙ ↘  
Westablenkung eines Nordwindes ( $v_{\text{süd}} > 0$ ) auf der Nordhalbkugel ( $\cos \theta > 0$ ).

↖ ↗  
Südatlenkung eines Westwindes ( $v_{\text{ost}} > 0$ ) auf der Nordhalbkugel ( $\cos \theta > 0$ ).

Zyklon = Tiefdruckgebiet: Der Unterdruck zieht Luft aus allen Richtungen an. Auf der Nordhalbkugel:

Einströmender Wind dreht sich im mathematisch positiven Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) ins Tiefdruckgebiet.

Passatwind: Über dem Äquator steigt heiße Luft auf, es strömt Luft aus Norden und Süden nach. Für beide Luftmassen gilt  $\cos \theta v_{\text{süd}} > 0$ :

Ostwind in Äquatornähe als Folge der Westablenkung.

Die Zentrifugalkraft ist i.A. größer als die Corioliskraft. Die meteorologische Bedeutung der Corioliskraft rührt daher, dass sie geschlossenen Luftströmen (Passatwinde, Winde in Tiefdruckgebiete) eine Vorzugsrichtung gibt.

### 3 Newtonsche Dynamik

#### 3.1 Newtonsche Gesetze

1. „Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder geradlinig-gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.“

Das entspricht in mathematischer Schreibweise:

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \text{const.} \quad (179)$$

2. „Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach Richtung der geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.“

Also:

$$\ddot{\vec{r}} \propto \vec{F} \quad (180)$$

3. „Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich.“ Oder präziser: „Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.“ („actio = reactio“).

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{\vec{F}_{BA}} \quad \leftarrow \vec{F}_{AB} B \\ \text{mit } \vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \end{array} \right\} \quad (181)$$

Bemerkungen:

- a) 1. ist Spezialfall von 2.
- b) Der Proportionalitätsfaktor in Gl. (180) heißt träge Masse

$$\vec{F} =: m\ddot{\vec{r}} \quad (182)$$

- c) Gl. (180) und (182) sind nur korrekt, wenn die Masse  $m$  zeitlich konstant ist. (Eine Rakete verliert z.B. Masse durch den ausgestoßenen Treibstoff, so dass  $\dot{m}_{\text{Rakete}} < 0$ .)
- d) 1.-3. gilt (nur) in Inertialsystemen.

### 3.2 Mechanik eines Teilchens, Erhaltungssätze

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} \quad (183)$$

heißt Impuls. Gl. (182) verallgemeinert sich zu

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} + \dot{m}\dot{\vec{r}} \quad (184)$$

Daraus folgt der Impulserhaltungssatz:

*Ist  $\vec{F} = 0$ , so ist  $\vec{p}$  eine Konstante der Bewegung.*

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} \quad (185)$$

heißt Drehimpuls und

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (186)$$

heißt Drehmoment.

Bewegter Massenpunkt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &\stackrel{(185)}{=} \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\ &\stackrel{(183)}{=} m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \vec{F} \stackrel{(186)}{=} \vec{M} \\ \Rightarrow \quad \vec{M} &= \dot{\vec{L}} \end{aligned} \quad (187)$$

Daraus folgt der Drehimpulserhaltungssatz:

*Ist  $\vec{M} = 0$  (d.h. auf den Massenpunkt wirkt kein Drehmoment), so ist  $\vec{L}$  eine Konstante der Bewegung.*

Es gibt einen subtilen Unterschied zwischen Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz: Ist in einem Inertialsystem  $\vec{F} = 0$ , so auch in jedem anderen,

d.h. die Eigenschaft  $\vec{F} = 0$  ist invariant unter Galilei-Transformationen. Hingegen gibt es die Möglichkeit, dass in einem bestimmten Inertialsystem  $\vec{M} = 0$  gilt, in anderen jedoch nicht. Ein Beispiel ist ein Massenpunkt, der sich unter der Wirkung einer Zentripetalkraft  $\vec{F}$  mit konstantem  $|\vec{F}|$  auf einer Kreisbahn bewegt. Im Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt, ist  $\vec{F} \parallel -\vec{r}$  und somit  $\vec{M} = 0$ . In diesem Bezugssystem ist also der Drehimpuls erhalten. Verschieben wir den Nullpunkt um  $\vec{r}_0$  weg vom Kreismittelpunkt, so ist im neuen Bezugssystem  $\dot{\vec{L}} = \vec{M} \neq 0$ .

Ist  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$  ortsabhängig, so spricht man von einem Kraftfeld. Beispielsweise unterscheidet sich die Gravitationskraft (Schwerkraft), die die Erde auf Himmelskörper (z.B. auf Satelliten wie den Mond) ausübt, an verschiedenen Orten in Richtung oder Betrag. Lediglich in der Nähe des Erdbodens dürfen wir mit der konstanten Gewichtskraft  $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$  rechnen.

Wir betrachten einen Massenpunkt, der unter dem Einfluss des Kraftfeldes  $\vec{F}$  den Weg  $\mathcal{C}$  durchläuft:

$\mathcal{C} : u \rightarrow \vec{r}(u)$  mit  $\vec{r}(u_1) = \vec{u}_1$  und  $\vec{r}(u_2) = \vec{r}_2$ . Hier ist  $u$  ein Kurvenparameter, z.B. die Bogenlänge oder die Zeit  $t$ . Das Wegelement  $\vec{ds} = \vec{t}(u) du$  mit dem Tangentenvektor  $\vec{t}(u)$  brauchen wir zunächst für den Spezialfall  $u = t$ , also

$$\vec{ds} = \vec{v}(t) dt \tag{188}$$

Damit ist

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t), t) \vec{v}(t) dt \quad (189)$$

und

$$W[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (190)$$

heißt die von der Kraft  $\vec{F}$  am Massenpunkt auf dem Weg  $\mathcal{C}$  verrichtete Arbeit.

$T := \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2$  heißt kinetische Energie. Ab jetzt betrachten wir nur noch den Fall, das  $m$  nicht von der Zeit abhängt.

$$\begin{aligned} W[\mathcal{C}] &\stackrel{(189)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \stackrel{(182)}{=} m \int_{t_1}^{t_2} dt \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}^2 \\ &= \frac{m}{2} \left( \dot{\vec{r}}(t_2) \right)^2 - \frac{m}{2} \left( \dot{\vec{r}}(t_1) \right)^2 = T_2 - T_1, \end{aligned} \quad (191)$$

wobei  $T_{1,2} := T(t_{1,2})$  ist. Die verrichtete Arbeit ist also gleich der Differenz der kinetischen Energien an End- und Anfangspunkt von  $\mathcal{C}$ .

Ein Kraftfeld heißt konservativ, wenn es so beschaffen ist, dass

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

gilt für *alle geschlossenen* Wege  $\mathcal{C}$ . Dabei wird  $\mathcal{C}$  für eine konstante Zeit durchlaufen und es ist zu beachten, dass die betrachteten Wege  $\mathcal{C}$  beliebig sind. Das ist ein Unterschied zur Situation in Gl. (191), wo  $\mathcal{C}$  nur bestimmte Wege bezeichnet, nämlich solche, die ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Kraft  $\vec{F}$  nehmen kann. Beim Wurf im erdnahen Schwerfeld von  $\vec{r}(t_1)$  nach  $\vec{r}(t_2)$ , die Anfangs- und Endpunkt von  $\mathcal{C}$  bezeichnen, ist  $\mathcal{C}$  eine Wurfparabel. (Es gibt  $\infty$ -viele solche Wurfparabeln, mit unterschiedlichen Abwurfwinkeln und dem Wurfziel  $\vec{r}_2$  entsprechend angepassten Anfangsgeschwindigkeiten, wie jede(r) Basketballspieler\*in bestätigen kann.)

Die Arbeit  $W[\mathcal{C}] := \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F} \cdot \vec{ds}$  ist auch sinnvoll definiert, wenn der Weg  $\mathcal{C}$  beliebig ist: Ein Beispiel wäre ein Weg, den ein Fahrradfahrer von einem Punkt  $\vec{r}_1$  auf einem Berg zu einem Punkt  $\vec{r}_2$  im Tal nimmt und der aus Überlegungen des Gesundheitsschutzes besser *keine* Wurfparabel ist. Dennoch ist es sinnvoll, die Arbeit zu betrachten, die die Gewichtskraft  $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$  an Fahrrad und Fahrer leistet. Hier sind noch weitere Kräfte im Spiel, die das Fahrrad auf der Straße halten, und zwar die Gegenkraft der Straße, ohne die das Fahrrad frei fiel, und die Kräfte des Lenkers, ohne die das Fahrrad von der Straße abkäme. Diese Kräfte nennt man *Zwangskräfte*  $\vec{Z}$ , weil sie das betrachtete Objekt (Massenpunkt, Fahrrad, ...) auf den Weg  $\mathcal{C}$  zwingen. Aber  $T_2 - T_1$  des ungebremsten Fahrrads können wir dennoch durch Einsetzen von  $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$  in Gl. (191) bestimmen, denn diese Zwangskräfte  $\vec{Z}$  stehen senkrecht auf  $\vec{ds}$  und tragen somit zu  $(\vec{F} + \vec{Z}) \cdot \vec{ds} = \vec{F} \cdot \vec{ds}$  nicht bei. (Bremst der Fahrer hingegen auf seinem Weg ins Tal, so muss die Reibungskraft  $\vec{F}_{\text{brems}} \parallel -\vec{ds}$  jedoch im Integral in Gl. (191) mitberücksichtigt werden.)

Wir betrachten als nächstes die von einer konservativen *zeitunabhängigen* Kraft  $\vec{F}$  geleistete Arbeit auf zwei verschiedenen Wegen  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$ , die dieselben Punkte  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  verbinden und finden:

$$W[\mathcal{C}_1] = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} = W[\mathcal{C}_2],$$

denn  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \circ (-\mathcal{C}_2)$  ist geschlossen, d.h. wegen der Konservativität von  $\vec{F}$  ist die geleistete Arbeit gleich null auf dem Weg  $\mathcal{C}$ , der von  $\vec{r}_1$  zu  $\vec{r}_2$  und wieder zurück zu  $\vec{r}_1$  führt. Für konservative zeitunabhängige Kräfte ist die Arbeit in Gl. (191) also vom Weg unabhängig und man darf

$$W[\vec{r}_1, \vec{r}_2] := \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad (192)$$

schreiben. Mit Gl. (192) können wir –nur– für konservative Kraftfelder das

Potential (= die potentielle Energie) definieren:

$$V(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (193)$$

$V$  hängt vom gewählten Bezugspunkt  $\vec{r}_0$  ab, Differenzen  $V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$  jedoch nicht. Die Definition Gl. (193) gilt auch für konservative zeitabhängige Kräfte, wobei der Weg von  $\vec{r}_0$  nach  $\vec{r}$  für eine feste Zeit durchlaufen wird, und  $V$  dann ebenfalls zeitabhängig ist.

Ist  $\vec{F}$  unabhängig von  $t$  und bewegt sich unser Massenpunkt unter dem Einfluss von  $\vec{F}$  von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$ , so finden wir

$$W[\vec{r}_1, \vec{r}_2] \stackrel{(192)}{:=} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \stackrel{(193)}{=} V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) =: V_1 - V_2 \quad (194)$$

und wir finden für Gl. (191) für die Energie

$$E := T + V \quad (195)$$

die Beziehung

$$E_1 = T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E_2, \quad (196)$$

also Energieerhaltung für konservative, zeitunabhängige Kraftfelder.  $E = T(\dot{\vec{r}}(t)) + V(\vec{r}(t))$  ist also Konstante der Bewegung.

Gl. (193) zeigt uns, wie man für eine konservative Kraft  $\vec{F}$  das zugehörige Potential findet. Nun leiten wir eine Formel her, die umgekehrt zu vorgegebenem  $V$  die Kraft  $\vec{F}$  liefert. Dazu betrachten wir einen geraden Weg von  $\vec{r}_0$  nach  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , so dass (mit Kurvenparameter  $x$ )  $d\vec{s} = \vec{e}_x dx$  ist:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}_1) &= - \int_{x_0}^{x_0+x} dx \vec{F} \cdot \vec{e}_x = - \int_{x_0}^{x_0+x} dx F_x \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^{x_0+x} dx F_x = -F_x. \end{aligned}$$

Analog findet man  $\frac{\partial V}{\partial y} = -F_y$  und  $\frac{\partial V}{\partial z} = -F_z$  also

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V. \quad (197)$$

Für jedes (differenzierbare)  $V$  ist das aus Gl. (197) gewonnene  $\vec{F}$  auch tatsächlich konservativ, denn mit dem Kurvenparameter  $u$  und  $\vec{r}(u_0) = \vec{r}(u_1) =: \vec{r}_0 \in \mathcal{C}$  ist

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} &= - \int_{u_0}^{u_1} \vec{\nabla} V(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}}{du} du \\ &= - \int_{u_0}^{u_1} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{du} \right) du \\ &= - \int_{u_0}^{u_1} \frac{dV}{du} du = V(\vec{r}(u_0)) - V(\vec{r}(u_1)) \\ &= V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}_0) = 0. \end{aligned}$$

Die Existenz eines Potential ist also notwendig und hinreichend dafür, dass die zugehörige Kraft  $\vec{F}$  in Gl. (197) konservativ ist.

Um ein praktisches Kriterium für konservative Kräfte zu finden, definieren wir

$$\text{rot } \vec{A} := \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (198)$$

die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix}.$$

In Komponentenschreibweise:

$$(\text{rot } \vec{A})_j := (\vec{\nabla} \times \vec{A})_j = \sum_{kl=1}^3 \epsilon_{jkl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \quad (199)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$  ist ein Maß für die „Wirbelstärke“.

Beispiel:

$$a \in \mathbb{R}, \quad \vec{A} = a \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  zeigt aus der Zeichenebene, in der die Komponenten von  $\vec{A}$  liegen, heraus. (Das ist i.A. nicht so und liegt im Beispiel daran, dass sowohl  $A_z = 0$  ist und  $A_{x,y}$  nicht von  $z$  abhängen.)

Für eine beliebige Funktion  $f(\vec{r})$  gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f)_j &= \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} f}_{\text{symmetrisch bzgl. } k \leftrightarrow l} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also

$$\text{rot grad } f = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0. \quad (200)$$

Für eine konservative Kraft gilt also

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0 \quad (201)$$

Im nächsten Schritt nehmen wir umgekehrt an, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (202)$$

gilt. Wir definieren

$$V_{\mathcal{C}}(\vec{r}) := - \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (203)$$

wobei  $\mathcal{C}$  die Strecke zwischen den Punkten  $\vec{r}_0$  und  $\vec{r}$  bezeichnet. Unser Ziel ist zu beweisen, dass Gl. (202) hinreichend dafür ist, dass  $\vec{F}$  ein konservatives Kraftfeld beschreibt. Diesen Beweis führen wir, indem wir zeigen werden, dass  $V_{\mathcal{C}}(\vec{r})$  ein Potential ist. Wir benötigen

$$\vec{F}(\vec{r}'(u)) \quad \text{mit} \quad \vec{r}'(u) = \vec{r}_0 + u(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (204)$$

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \frac{d\vec{r}'}{du} du = (\vec{r} - \vec{r}_0) du \\ \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \vec{F}(\vec{r}'(u)) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) du \\ &= [F_{x'}(x - x_0) + F_{y'}(y - y_0) + F_{z'}(z - z_0)] du \end{aligned} \quad (205)$$

Hier wurde das Argument von  $F_{x'} = F_{x'}(\vec{r}'(u))$  usw. weggelassen, um Platz zu sparen. In dieser Parametrisierung unseres Weges  $\mathcal{C}$  läuft der Kurvenparameter  $u$  von 0 bis 1,  $\vec{r}'$  läuft dabei von  $\vec{r}_0$  bis  $\vec{r}$  und Gl. (203) wird zu

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{C}}(\vec{r}) &:= - \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}'(u)) \cdot \frac{d\vec{r}'}{du} du \\ &= - \int_0^1 [F_{x'}(x - x_0) + F_{y'}(y - y_0) + F_{z'}(z - z_0)] du \end{aligned} \quad (206)$$

Im nächsten Schritt berechnen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_C}{\partial x} &= - \int_0^1 \left[ F_{x'} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} (y - y_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial F_{z'}}{\partial x} (z - z_0) \right] du \\
&= - \int_0^1 \left[ F_{x'} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F_{y'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} (y - y_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial F_{z'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} (z - z_0) \right] du \\
&\stackrel{(204)}{=} - \int_0^1 \left[ F_{x'} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial x'} u (x - x_0) + \frac{\partial F_{y'}}{\partial x'} u (y - y_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial F_{z'}}{\partial x'} u (z - z_0) \right] du \tag{207}
\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ . Das bedeutet (siehe Gl. (198) mit der Ersetzung von  $\vec{A}(\vec{r})$  durch  $\vec{F}(\vec{r}')$ ), dass

$$\frac{\partial F_{y'}}{\partial x'} = \frac{\partial F_{x'}}{\partial y'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_{z'}}{\partial x'} = \frac{\partial F_{x'}}{\partial z'} \tag{208}$$

ist. Einsetzen in Gl. (207) liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_C}{\partial x} &= - \int_0^1 \left[ F_{x'} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial x'} (x - x_0) u + \frac{\partial F_{x'}}{\partial y'} (y - y_0) u + \frac{\partial F_{x'}}{\partial z'} (z - z_0) u \right] du \\
&= - \int_0^1 \left[ F_{x'} + \frac{dF_{x'}}{du} u \right] du
\end{aligned}$$

Mit partieller Integration beim zweiten Summanden findet man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_C}{\partial x} &= - \int_0^1 F_{x'} du - \left[ F_{x'} (\vec{r}_0 + u(\vec{r} - \vec{r}_0)) u \right]_0^1 + \int_0^1 F_{x'} du \\
&= - F_x(\vec{r}), \tag{209}
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt  $x'(u) = x_0 + u(x - x_0)$  mit  $u = 1$  verwendet wurde.

Ebenso findet man

$$\frac{\partial V_C}{\partial y} = - F_y(\vec{r}), \quad \text{und} \quad \frac{\partial V_C}{\partial z} = - F_z(\vec{r}). \tag{210}$$

Damit erfüllt  $V_C$  Gl. (197) und ist ein Potential! Wie nach Gl. (197) bewiesen, ist  $\vec{F} = -\vec{\nabla} V_C$  also konservativ. Wir fassen zusammen: Gilt überall

Gl. (202), so ist  $\vec{F}$  konservativ. Mithin dürfen wir dann in  $V_{\mathcal{C}}$  den Index  $\mathcal{C}$  weglassen, denn für konservative Kräfte ist ja gerade das Integral in Gl. (203) unabhängig vom Weg!

Eine Besonderheit ist zu beachten, wenn die Bedingung  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  nur in einem Teilgebiet  $G \in \mathbb{R}^3$  erfüllt ist. Die Beweisführung von Gl. (202–210) nahm an, dass es einen Punkt  $\vec{r}_0$  in  $G$  gibt, den wir mit jedem anderen Punkt  $\vec{r}$  durch eine Strecke verbinden können. So ein Gebiet nennt man *sternförmig*. Durch Zusammensetzen mehrerer Strecken kann man den Beweis auch auf bestimmte nicht-sternförmige Gebiete ausweiten, aber man kann auch Gegenbeispiele finden. Dazu betrachten wir

$$V_{\mathcal{C}_1}(\vec{r}) := - \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad V_{\mathcal{C}_2}(\vec{r}) := - \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (211)$$

mit zwei beliebigen Wegen  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$ , die beide  $\vec{r}_0$  mit  $\vec{r}$  verbinden:

Können wir  $\mathcal{C}_2$  stetig in  $\mathcal{C}_1$  deformieren (also bei festgehaltenen Endpunkten alle Punkte auf  $\mathcal{C}_2$  auf Punkte in  $\mathcal{C}_1$  verschieben), ohne dabei das Gebiet  $G$  zu verlassen<sup>1</sup>, so dürfen wir schließen, dass  $V_{\mathcal{C}_1} = V_{\mathcal{C}_2}$  ist, denn wegen  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  ist das Integral in Gl. (211) unabhängig vom Weg. Für den geschlossenen Weg  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \circ (-\mathcal{C}_2)$  ist also  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  und  $\vec{F}$  konservativ. Ein Gebiet, in dem man jeden Weg  $\mathcal{C}_2$  stetig in jeden Weg  $\mathcal{C}_1$  mit gleichen Endpunkten deformieren kann, heißt einfach zusammenhängend.<sup>2</sup>

Wir fassen zusammen:

<sup>1</sup>In der Mathematik spricht man dann von zwei homotopen Wegen.

<sup>2</sup>Geschlossene Wege in einfach zusammenhängenden Gebieten kann man also stetig in einen Punkt deformieren, sie sind nullhomotop.

Gilt  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$ , so ist  $\vec{F}$  dort konservativ, also  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  für alle geschlossenen in  $G$  verlaufenden Wege. Wir können dann ein Potential  $V$  mit  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$  finden. Ist zudem  $V$  unabhängig von  $t$ , so ist die Energie  $E = T + V$  auf jedem Weg, den ein Massenpunkt unter dem Einfluss von  $\vec{F}$  in  $G$  durchläuft, erhalten.

Was passiert nun mit  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  in nicht zusammenhängenden Gebieten  $G$ ?

Umschließt der Weg in  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$  ein Gebiet, in dem  $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$  ist, so kann  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$  sein. Das Potential  $V_{C_1}(\vec{r})$  in Gl. (211) ist dann an mindestens einer Stelle unstetig, wenn  $\vec{r}$  den beschriebenen geschlossenen Weg komplett durchläuft (siehe Übungsaufgabe).

### 3.3 Zweikörper-Zentralkraftproblem

Beispiel:

$m_1$  = Planetenmasse

$m_2$  = Sonnenmasse

$$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (212)$$

Zentralpotential:

$$U(\vec{r}) := U(r) \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (213)$$

Kraft:

3. Newtonsches Gesetz, Gl. (181)

$$\begin{aligned} \downarrow \\ -\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} &= \vec{\nabla}U(\vec{r}) = \frac{dU(r)}{dr} \vec{\nabla}r \\ &= \frac{dU(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \quad (214)$$

Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \vec{r}_S &:= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (215) \\ \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_S &= \frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}{m_1 + m_2} \stackrel{(181)}{=} 0 \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also geradlinig-gleichförmig. Aus Gl. (212) und (215) folgt

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (216a)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (216b)$$

$$\vec{F}_{21} = m_1 \ddot{r}_1 \stackrel{(216)}{=} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}},$$

also

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} \stackrel{(214)}{=} -\vec{\nabla} U \quad (217)$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (218)$$

Ab jetzt betrachten wir alles im Schwerpunktsystem, das durch

$$\vec{r}_S = 0, \quad \dot{\vec{r}}_S = 0,$$

charakterisiert ist. Wegen  $\dot{\vec{r}}_S = 0$  ist es ein Inertialsystem.

Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \vec{l} &= m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \\ &\stackrel{(216)}{=} \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \end{aligned} \quad (219)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{l}} &= \vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} \stackrel{(214)}{\propto} \vec{r} \times \vec{r} = 0 \\ \Rightarrow \quad \vec{l} &= \text{const.} \end{aligned} \quad (220)$$

Wegen Gl. (219) ist  $\vec{r} \perp \vec{l}$  und  $\dot{\vec{r}} \perp \vec{l}$ . Die Bewegung  $\vec{r}(t)$  verläuft also in einer Ebene senkrecht zum konstanten Vektor  $\vec{l}$ .

Ebene Polarkoordinaten (wobei nun  $\phi$  in  $\theta$  umgetauft ist):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (221)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (222)$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (223)$$

Mit der Bezeichnung  $l = l_z$  ( $l$  ist also nicht der Betrag von  $\vec{l}$ ) gilt also:

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (224)$$

In der Zeiteinheit  $dt$  überstreicht der Radiusvektor  $\vec{r}$  den Winkel  $d\theta = \dot{\theta} dt$  und die Fläche  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ :

$$\begin{aligned} dA &= \frac{r^2}{2} \dot{\theta} dt \stackrel{(224)}{=} \frac{l}{2\mu} dt \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{l}{2\mu} = \text{const.} \end{aligned} \quad (225)$$

Dies ist das zweite Keplersche Gesetz der Planetenbewegung:

*Der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleich Flächen.*

Strategie: Lösung der Bewegungsgleichung Gl. (217) mit Hilfe der Erhaltungsgrößen  $\vec{l}$  und  $E$ .

Energieerhaltung: Aus

$$\mu \ddot{\vec{r}} \stackrel{(214)}{=} -\vec{\nabla} U$$

folgt analog zu Gl. (191)-(196), dass

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(r) \quad (226)$$

konstant ist. Mit Gl. (222) finden wir

$$T := \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2). \quad (227)$$

Aus  $\dot{\theta} \stackrel{(224)}{=} \frac{l}{\mu r^2}$  folgt also

$$T = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (228)$$

und

$$E \stackrel{(226)}{=} \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}}_{\text{Zentrifugalpotential}} + U(r) \quad (229)$$

„Äquivalentes Einteilchenproblem“:

Gl. (229) entspricht der Bewegungsgleichung eines Teilchens in einer Dimension (mit Koordinate  $r$ ) im Potential

$$U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} =: U'(r) \quad (230)$$

Wir spezialisieren uns jetzt auf den Fall, dass  $U(r)$  überall anziehend,  $\frac{dU}{dr} > 0$  und  $U(\infty) = 0$  ist, z.B.:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta} \quad \text{mit } \alpha, \beta > 0 \quad (231)$$

Falls  $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 U(r) = 0$  und  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 U(r) < 0$  ist, hat  $U'(r)$  ein Minimum. (Im Beispiel Gl. (231) ist das so für  $\beta < 2$ .)

Für  $E < 0$  gibt es gebundene Bewegungen, bei denen  $r$  auf  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  beschränkt ist.

$$E = T'(r) + U'(r) \quad (232a)$$

$$\text{mit } T'(\dot{r}) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 \quad (232b)$$

$T' \geq 0 \Rightarrow E \geq U'(r)$ , und

$$U'(r_{\min}) = U'(r_{\max}) = E$$

D.h. für  $E < 0$  umkreisen sich die beiden Körper. Der Fall  $E \geq 0$  hingegen bedeutet, dass ein Körper aus dem Unendlichen eintrifft und den anderen teilweise umrundet und dann wieder ins Unendliche verschwindet.

Aus Gl. (232) folgt:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U'(r))} & (233) \\ \Rightarrow \frac{\dot{r}}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U'(r))}} &= 1 \\ \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\dot{r}}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U'(r))}} &= t_1 - t_0 \\ \Rightarrow \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U'(r))}} &= t_1 - t_0 & (234) \end{aligned}$$

mit  $r_0 = r(t_0)$  und  $r_1 = r(t_1)$ . Gl. (234) definiert die Funktion  $t(r)$ . Die Umkehrfunktion ist das gesuchte  $r(t)$ .

Mit  $r(t)$  finden wir dann

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \int_{t_0}^t dt' \dot{\theta}(t') \\ &= \theta_0 + \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t dt' \frac{1}{(r(t'))^2} \quad \text{mit } \theta_0 = \theta(t_0). & (235) \end{aligned}$$

Gl. (234) ist schwer zu lösen, und man kann keinen analytischen Ausdruck für die Umkehrfunktion finden. Einfacher ist die Bestimmung der Bahnkurve  $r(\theta)$  bzw  $\theta(r)$ .

Zunächst:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \stackrel{(224)}{=} \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} & (236) \\
 \Rightarrow E &\stackrel{(232)}{=} \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}_{= T'} + U'(r) \\
 \Rightarrow \left|\frac{d\theta}{dr}\right| &= \frac{|l|}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2\mu(E - U'(r))}} \\
 \int_{r_0}^r \frac{d\theta}{dr'} dr' &= \pm |l| \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu(E - U'(r'))}}
 \end{aligned}$$

Dabei sind  $r_0$  und  $r$  so gewählt, dass  $\frac{d\theta}{dr'}$  das Vorzeichen nicht wechselt für  $r_0 \leq r' \leq r$ . Ideal:  $r_0 = r_{\min}$ .

$$\theta(r) = \theta_0 \pm |l| \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu(E - U'(r'))}} \quad \text{mit } \theta_0 = \theta(r_0) \quad (237)$$

↑

I.A. (außer an den Scheitelpunkten) gibt es zu jedem  $r$  zwei Lösungen für  $\theta$ . (Beispiel: Sonne und Erde im Frühling und Herbst, verschiedene  $\theta$  mit gleichem  $r(\theta)$ .)

Die Umkehrfunktion  $r(\theta)$  ist die gesuchte Bahnkurve.

Der Spezialfall

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (238)$$

definiert das Kepler-Problem.

Newtonsches Gravitationsgesetz:

*Zwei Körper mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  erfüllen Gl. (238) mit  $\alpha = G_N m_1 m_2$  und*

$$G_N = (6,6742 \pm 0,0010) \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{kg s^2}. \quad (239)$$

$G_N$  heißt Newtonsche Gravitationskonstante. Mit Gl. (238) wird Gl. (237)

zu

$$\theta(r) = \theta_0 \pm |l| \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu \left( E - \frac{l^2}{2\mu r'^2} + \frac{\alpha}{r'} \right)}}$$

Mit  $u(r) = 1/r$ ,  $u_0 = 1/r_0$ ,  $u' = 1/r'$ :

$$\begin{aligned} dr' &= -\frac{1}{u'^2} du' \\ \theta &= \theta_0 \mp |l| \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{2\mu E - l^2 u'^2 + 2\mu\alpha' u'}} \end{aligned} \quad (240)$$

Quadratische Ergänzung:

$$2\mu E - l^2 u'^2 + 2\mu\alpha' u' = -l^2 (u' - \bar{u})^2 + l^2 B$$

mit

$$\bar{u} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \quad (241a)$$

$$B = \frac{\mu\alpha}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (241b)$$

Mit Gl. (241) und  $v = u' - \bar{u}$  wird Gl. (240) zu

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \mp \int_{u_0 - \bar{u}}^{u - \bar{u}} \frac{dv}{\sqrt{B^2 - v^2}} \\ &= \theta_0 \pm \left[ \arccos \frac{u - \bar{u}}{B} - \arccos \frac{u_0 - \bar{u}}{B} \right] \end{aligned} \quad (242)$$

Wir wählen nun  $r_0$  so, dass

$$\arccos \frac{u_0 - \bar{u}}{B} = 0$$

ist, also  $u_0 = \bar{u} + B$ . Damit löst

$$\frac{u - \bar{u}}{B} = \cos(\theta - \theta_0)$$

Gl. (242) für beide Vorzeichen (denn  $\cos(\theta - \theta_0) = \cos(\theta_0 - \theta)$ ). Also

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} = \bar{u} + B \cos(\theta - \theta_0) \\ &\stackrel{(241)}{=} \frac{\mu\alpha}{l^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right]. \end{aligned}$$

Nach  $r$  aufgelöst wird daraus

$$r = \frac{1}{C(1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0))} \quad (243)$$

mit

$$C = \frac{\mu\alpha}{l^2} \quad (244a)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \quad (244b)$$

$\epsilon$  heißt Exzentrizität. Gl. (243) ist die Gleichung eines Kegelschnitts:

$$\left. \begin{array}{l} E > 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon > 1 \quad \text{Hyperbel} \\ E = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 1 \quad \text{Parabel} \\ E < 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon < 1 \quad \text{Ellipse} \\ \text{mit dem Spezialfall} \\ E = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2} \Rightarrow \epsilon = 0 \quad \text{Kreis} \end{array} \right\} \quad (245)$$

Aus Gl. (243) finden wir

$$r(\theta_0) = r_{\min} = \frac{1}{C(1 + \epsilon)}. \quad (246)$$

Für  $\epsilon < 1$  ist

$$r(\theta_0 + \pi) = r_{\max} = \frac{1}{C(1 - \epsilon)}. \quad (247)$$

Die Erde erreicht den Perihel am 5. Januar mit Sonnenabstand

$r_{\min} = 147,1 \cdot 10^9 \text{ m}$  und den Aphel am 4. Juli mit Sonnenabstand

$r_{\max} = 152,1 \cdot 10^9 \text{ m}$ . Große Halbachse (Hauptachse):

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} \stackrel{(246)}{=} \frac{1}{2C(1 + \epsilon)} + \frac{1}{2C(1 - \epsilon)} \\ &= \frac{1}{C} \frac{1}{1 - \epsilon^2} \end{aligned} \quad (248)$$

$$a \stackrel{(244)}{=} -\frac{\alpha}{2E} \quad (249)$$

D.h. die großen Halbachse hängt nicht von  $l$  ab!

Der Fall  $\epsilon < 1$  in Gl. (243) entspricht dem 1. Keplerschen Gesetz:

*Die Planeten durchlaufen Ellipsenbahnen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.*

Berechnung der kleinen Halbachse (Nebenachse)  $b$ :

Bei  $\theta = \theta_b$  sei  $y = b$ . Extrema von

$$y = r \sin(\theta - \theta_0) \stackrel{(243)}{=} \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{C [1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)]}$$

finden wir als Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dy}{d\theta} = \frac{\epsilon + \cos(\theta - \theta_0)}{C [1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)]^2} \quad \text{für } \theta = \theta_b \\ \Rightarrow \cos(\theta_b - \theta_0) &= -\epsilon \end{aligned} \quad (250)$$

und

$$r_b = r(\theta_b) \stackrel{(243)}{=} \frac{1}{C(1 - \epsilon^2)} \stackrel{(248)}{=} a. \quad (251)$$

Pythagoras:

$$\begin{aligned} b^2 &= r_b^2 - (r_{\max} - a)^2 = a^2 - (r_{\max} - a)^2 = 2ar_{\max} - r_{\max}^2 \\ \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} &= 2\frac{r_{\max}}{a} - \frac{r_{\max}^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (252)$$

Mit

$$\frac{r_{\max}}{a} \stackrel{(247)}{\stackrel{(248)}}{=} \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon} = 1 + \epsilon$$

und Gl. (252) finden wir

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2(1 + \epsilon) - (1 + \epsilon)^2} = \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (253)$$

was die geometrische Bedeutung der Exzentrizität verdeutlicht.

Fläche der Ellipse:

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \\ \stackrel{(248)}{=} \pi \frac{a^2}{\sqrt{Ca}} \stackrel{(244)}{=} \pi |l| \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu\alpha}}. \quad (254)$$

$$A = \int_0^\tau \left| \frac{dA}{dt} \right| dt \stackrel{(225)}{=} \frac{|l|}{2\mu} \tau \quad (255)$$

Gleichsetzen von Gl. (254) und (255) liefert:

$$\tau = \frac{2\mu A}{|l|} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2} \quad (256)$$

Für  $m_1 \gg m_2$  (was für Sonnen- und Planetenmasse erfüllt ist) ist  $\mu \approx m_2$ .

Mit

$$\alpha \stackrel{(239)}{=} G_N m_1 m_2$$

ist also

$$\tau \stackrel{(256)}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{G_N m_1}} a^{3/2}, \quad (257)$$

die Umlaufzeit eines Planeten ist also (im betrachteten Grenzfall  $m_1 \gg m_2$ )

unabhängig von seiner Masse  $m_2$ ! Dies ist das 3. Keplersche Gesetz:

*Das Quadrat der Periode  $\tau$  ist der dritten Potenz der Hauptachse  $a$  proportional!*

Dies gilt wegen  $\mu \neq m_2$  nur näherungsweise. Mit

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_2 \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

finden wir den Korrekturfaktor zu Gl. (257):

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{G_N m_1}} a^{3/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}}} \quad (258)$$

Für den schwersten Planeten, Jupiter, ist  $\frac{m_2}{m_1} \approx 10^{-3}$  und die Korrektur ist 0,5‰.

# Klassische Theoretische Physik I

(Theoretische Physik A)

—Einführung in die Mechanik—

Prof. Dr. Ulrich Nierste

Ilias-Seite der Vorlesung:

[https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs\\_2215325&client\\_id=produktiv](https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2215325&client_id=produktiv)

## Literatur

1. W. Nolting: Grundkurs Theor. Physik, Bd. 1, Klass. Mechanik, Springer.
2. F. Scheck: Mechanik, Springer.
3. S. Brandt, H. Dahmen: Physik Bd. 1, Mechanik, Springer.
4. T. Fließbach: Mechanik, BI Hochschultaschenbuch.
5. J. Honerkamp, H. Römer: Klass. Theor. Physik, Springer.
6. H. Goldstein: Klass. Mechanik, Wiley-VCH.
7. L. D. Landau, E. Lifshitz: Lehrbuch der Theor. Physik, Bd. 1, Mechanik.
8. K. Kirchgessner, M. Schreck: Lern- und Übungsbuch zur Theor. Physik 1, Klass. Mechanik, Oldenbourg.

# Inhalt

1. Grundlagen
2. Kinematik
3. Newton'sche Dynamik

## 1 Grundlagen

### 1.1 Grundbegriffe

**Theoretische Physik** beschäftigt sich mit der Beschreibung physikalischer Gesetzmäßigkeiten in einem mathematischen Gebäude, der physikalischen Theorie.

Eine wissenschaftliche Theorie muss deskriptiv und prädiktiv sein.

Deskriptiv: Experimentelle Daten müssen korrekt beschrieben werden.

Prädiktiv: Eine Theorie muss Vorhersagen über die Ergebnisse künftiger Experimente machen. Insbesondere muss sie falsifizierbar sein (experimentum crucis) (Philosophen Francis Bacon und Karl Popper).

Naturwissenschaftliche Theorien werden erraten. Sie sind unbeweisbar.

*Ockhams Messer* = Sparsamkeitsprinzip der Wissenschaft:

Unter mehreren Theorien, die die Daten korrekt beschreiben, ist die einfachste vorzuziehen.

Wiliam of } Ockham \*1285 (Ockham) †1349 (München)  
 Wilhelm von }

Naturwissenschaftliche Theorien müssen schließlich allgemeingültig sein, also immer und überall gelten.

Klassische Mechanik ist die Physik bewegter makroskopischer Körper unter dem Einfluss von Kräften.

Kinematik: Bewegungslehre

Dynamik: Lehre von den Kräften

- Bewegung von Körpern in Kraftfeldern
- Klassifizierung von Kräften (z.B. ob sie die Energie erhalten oder nicht)
- Beschreibung der Gravitation (Schwerkraft), Himmelsmechanik (Planetenbewegung)

## 1.2 Mathematische Grundlagen

### 1.2.1 Ableitung

Ableitung einer reellen Funktion  $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \underbrace{\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f}_{\text{Leibniz-Schreibweise}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Leibniz-Schreibweise

Ist das Argument der Funktion die Zeit  $t$ , so schreibt man:

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} \quad \text{Newton-Schreibweise}$$

Höhere Ableitungen:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right)$$

$$\ddot{f}(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}, \quad \text{usw.}$$

Ableitungsregeln:

- Produktregel:

$$\frac{d}{dt} [f(t)g(t)] = \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t) \quad (1)$$

- Kettenregel:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{d f(g(t))}{d g} \underbrace{\frac{d g(t)}{d t}}_{= \dot{g}(t)} \quad (2)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & g(t) &= \omega t \\ \Rightarrow f(g(t)) &= \sin(\omega t) \\ \dot{f}(g(t)) &= \frac{d f(g(t))}{d t} = \underbrace{\frac{d f}{d g}}_{\cos g(t)} \underbrace{\dot{g}(t)}_{\omega} \\ &= \omega \cos(\omega t) \end{aligned}$$

### 1.2.2 Integral

Riemann'sches Integral:

Fläche A minus Fläche B:

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^b dx f(x)}_{\text{Physiker*innen-Schreibweise}}$$

$$\int_b^a dx f(x) = - \int_a^b dx f(x)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):  $F(x) := \int_a^x dy f(y)$

ist Stammfunktion zu  $f(x)$ , d.h.  $\frac{dF}{dx} = f(x)$ .

Eigenschaften:

- $\int_a^c dx f(x) = \int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x)$  Additivität

- Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_a^b dx (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \int_a^b dx f(x) + \mu \int_a^b dx g(x) \quad \text{Linearität}$$

Kurzschreibweise:  $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$ .

Das Monom  $F(x) = x^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$  hat die Stammfunktionen

$F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$  mit beliebiger Integrationskonstante  $C$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b dx x^\alpha &= \left[ \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \right]_a^b \\ &= \frac{1}{\alpha+1} b^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} a^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Integriert man Gl. (1), so findet man die Regel der partiellen Integration:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt f(t) \dot{g}(t) &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{f}(t) g(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} [f(t)g(t)] \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} [f(t)g(t)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{f}(t)g(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Integriert man Gl. (2), so findet man die Substitutionsregel:

$$\int_{g_1}^{g_2} dg f(g) = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{g}(t) f(g(t)) \quad \text{mit} \quad g_{1,2} := g(t_{1,2}), \quad (4)$$

sofern  $g$  monoton und  $\dot{g}$  stetig für  $t \in [t_1, t_2]$  ist.

Merkregel:  $dg = \frac{dg}{dt} dt$ .

### 1.2.3 Logarithmus und Exponentialfunktion

Der natürliche Logarithmus ist für  $x > 0$  definiert durch

$$\ln x := \int_1^x \frac{dy}{y} := \int_1^x dy \frac{1}{y} \quad (5)$$

Also findet man  $\ln 1 = 0$ .

Eigenschaften (siehe Übungsblatt):

$$1. \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \text{für } x, y > 0. \quad (6)$$

$$2. \quad \ln x^\alpha = \alpha \ln x, \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}, x > 0. \quad (7)$$

Die Exponentialfunktion  $\exp(x)$  definieren wir als Funktion mit den Eigenschaften:

$$1. \quad \frac{d \exp(x)}{d x} = \exp(x) \quad (8)$$

$$2. \quad \exp(0) = 1 \quad (9)$$

$\Rightarrow \exp(x)$  ist in einem Intervall  $[a, \infty)$  mit  $a < 0$  positiv und monoton wachsend.

$$\begin{aligned} \text{Gl. (8)} \quad &\Rightarrow \frac{1}{\exp(x)} \frac{d \exp(x)}{d x} = 1 \\ &\Rightarrow \int_0^y dx \frac{1}{\exp(x)} \frac{d \exp(x)}{d x} = \int_0^y 1 dx = y \quad \text{für } y > 0 \quad (10) \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} z = \exp(x) \quad &\Rightarrow \quad dz = \frac{d \exp(x)}{d x} dx \\ \text{Gl. (10)} \quad &\Rightarrow \quad \underbrace{\int_1^{\exp(y)} dz \frac{1}{z}} = y \\ \text{Mit Gl. (5):} \quad &\quad \underbrace{[\ln z]_1^{\exp(y)}} = y \\ &\Rightarrow \quad \ln \exp(y) = y \quad (11) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exp$  ist die Umkehrfunktion zu  $\ln$ !

Mit  $y = \ln t$  folgt aus Gl. (11)  $\ln \exp(\ln t) = \ln t$ , wegen der strengen Monotonie von  $\ln$  also auch  $\exp(\ln t) = t$  für  $t > 0$ .

Aus Gl. (6) und (7) folgt mit  $x = \exp t$ ,  $y = \exp s$ :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \ln [\exp(t) \exp(s)] = t + s \\ & \Rightarrow \exp(t) \exp(s) = \exp(t + s) \end{aligned} \tag{12}$$

$$2. \quad [\exp(t)]^\alpha = \exp(\alpha t) \quad \text{für } t, s, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Dies rechtfertigt die Schreibweise

$$\exp(x) =: e^x,$$

so dass Gl. (12) und (13) zu

$$e^t e^s = e^{t+s} \quad \text{und} \quad (e^t)^\alpha = e^{t\alpha}$$

werden. Euler'sche Zahl:  $e := \exp(1) = 2,71828\dots$

### 1.2.4 Komplexe Zahlen

Geordnete Paare reeller Zahlen:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{Zwei-Tupel}$$

Schreibweise:

$$(x, y) \rightarrow x + iy$$


Realteil      imaginäre Einheit      Imaginärteil

- Addition:

$$x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \quad (14)$$

- Multiplikation:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) := x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (15)$$

Spezialfall mit  $x_1 = x_2 = 0$  und  $y_1 = y_2 = 1$ :

$$i^2 = -1 \quad (16)$$

Man wählt:

$$i := \sqrt{-1} \quad (17)$$

Menge der komplexen Zahlen:  $\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ . Eigenschaften: Für alle  $v, w, z \in \mathbb{C}$  gilt:

- $$\left. \begin{aligned} w + z &= z + w \\ wz &= zw \end{aligned} \right\} \text{Kommutativgesetz}$$
- $$\left. \begin{aligned} (v + w) + z &= v + (w + z) =: v + w + z \\ v(wz) &= (vw)z =: vwz \end{aligned} \right\} \text{Assoziativgesetz}$$
- $$v(w + z) = vw + vz \quad \text{Distributivgesetz}$$

4. Inverses Element zu  $z = x + iy$ :

$$(-z) + z = 0 \text{ wobei } -z = -x - iy.$$

Für  $z \neq 0$ :

$$\frac{1}{z} := \frac{1}{x + iy} := \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\text{so dass } \frac{1}{z} \cdot z = 1.$$

Polardarstellung:

komplexe Ebene

$$|z| := r := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \quad (18)$$

heißt Betrag von  $z$ .

Aus der Zeichnung liest man ab:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= |z| \cos \phi \\ \operatorname{Im} z &= |z| \sin \phi, \end{aligned} \quad (19)$$

also

$$z = |z| \cos \phi + i |z| \sin \phi. \quad (20)$$

Die Funktion

$$f(\phi) = \cos \phi + i \sin \phi \quad (21)$$

erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\phi} &= if(\phi), & (22) \\ \text{also } \frac{1}{f(\phi)} \frac{df}{d\phi} &= i \\ \frac{d}{d\phi} \ln f(\phi) &= i \\ \ln f(\phi) &= i\phi + \text{const.} \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$f(\phi) = C e^{i\phi} \quad \text{mit beliebigem } C \in \mathbb{C}.$$

Einsetzen in Gl. (22) und Verwenden von Gl. (8) (und der Kettenregel) bestätigt, dass dieses  $f(\phi)$  tatsächlich eine Lösung von Gl. (22) ist. Mit  $\phi = 0$  finden wir  $f(0) \stackrel{(21)}{=} 1 = e^0$ , so dass  $C = 1$  sein muss. Folglich ist

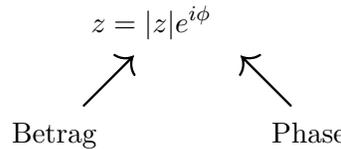
$$\exp(i\phi) = e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi \quad (23)$$

die einzig mögliche Verallgemeinerung der Exponentialfunktion auf imaginäre Argumente.

Für beliebige komplexe Zahlen  $z = x + iy$  definieren wir

$$\exp z := e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy}. \quad (24)$$

Mit Gl. (23) wird Gl. (20) zur Polardarstellung:

$$z = |z| e^{i\phi} \quad (25)$$


Komplexe Konjugation:

$$z^* := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z = |z| e^{-i\phi}$$

heißt zu  $z$  komplex konjugiert. Also ist  $z^* z = |z|^2$ .

Den Logarithmus definieren wir für komplexe Argumente über

$$\ln z = \ln \left( |z| e^{i\phi} \right) := \ln |z| + \ln e^{i\phi} = \ln |z| + i\phi \quad (26)$$

wobei wir  $-\pi < \phi \leq \pi$  vereinbaren. (Dies ist notwendig, weil  $e^{i\phi}$  und  $e^{i(\phi+2n\pi)}$  für  $n \in \mathbb{Z}$  übereinstimmen.)

Man findet aus Gl. (24)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (27)$$

für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  und speziell für  $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ :

$$e^{i(\phi_1+\phi_2)} = e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} \quad (28)$$

Aus Gl. (28) findet man

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} \stackrel{(28)}{=} e^{i\alpha} e^{i\beta} \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Aus Real- und Imaginärteil dieser Gleichung findet man die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (29)$$

Multiplikation und Division sind einfacher in der Polardarstellung:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\phi_1}, & z_2 &= r_2 e^{i\phi_2}, \\ \Rightarrow z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}, & \frac{1}{z_1} &= \frac{1}{r_1} e^{-i\phi_1}, & \frac{z_2}{z_1} &= \frac{r_2}{r_1} e^{i(\phi_2-\phi_1)}. \end{aligned}$$

Nützlich, um Integrale mit  $\sin x$  und  $\cos x$  zu lösen sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), \end{aligned} \quad (30)$$

die man leicht durch Einsetzen von  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  beweist.

Definitionen:

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) && \underline{\text{cosinus hyperbolicus}}, \\ \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) && \underline{\text{sinus hyperbolicus}}.\end{aligned}\tag{31}$$

### 1.2.5 Standardmethoden der Integration

Es sei  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$ :

$$P(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (32)$$

heißt Polynom vom Grad  $n$ .

Für  $n \geq 1$  hat  $P(x)$  eine eindeutige Nullstellenzerlegung

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n \prod_{k=1}^m (x - x_k)^{n_k} \quad \text{mit } m \leq n, n_k \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^m n_k = n, x_k \in \mathbb{C}. \\ &= a_n [(x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_m)^{n_m}] \end{aligned} \quad (33)$$

$n_k$  heißt Grad der Nullstelle  $x = x_k$ .

Beispiele:

- $P(x) = 3x^3 - 15x^2 + 24x - 12 = 3(x - 1)(x - 2)^2$ ,  
also  $n = 3$ ,  $a_3 = 3$ ,  $m = 2$ ,  $x_1 = 1$ ,  $n_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $n_2 = 2$ .
- $P(x) = x^2 - \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}i\right)x + 1 + 2i = \left(x - \frac{1+i}{2}\right)(x - 3 - i)$ .
- $P(x) = x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ .

Sind alle  $a_k \in \mathbb{R}$ , so sind die Nullstellen reell oder paarweise zueinander komplex konjugiert.

Rationale Funktion:

$$\begin{aligned} R(x) &:= \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit Polynomen } P(x), Q(x) \\ &\quad \text{und } Q(x) = a_n \prod_{k=1}^m (x - x_k)^{n_k}. \end{aligned}$$

Ist  $\text{Grad } Q = 0$ , so findet man als Spezialfall, dass  $R(x)$  ein Polynom ist.

Für eine echte rationale Funktion gilt  $\text{Grad } Q \geq 1$ .

Partialbruchzerlegung: Man kann  $R(x)$  schreiben als

$$\begin{aligned}
 R(x) := & \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} \\
 & + \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2n_2}}{(x-x_2)^{n_2}} \\
 & + \dots \\
 & + \frac{A_{m1}}{x-x_m} + \frac{A_{m2}}{(x-x_m)^2} + \dots + \frac{A_{mn_m}}{(x-x_m)^{n_m}} \\
 & + S(x) \qquad \text{mit } A_{jk} \in \mathbb{C}
 \end{aligned} \tag{34}$$

und einem Polynom  $S(x)$  mit  $\text{Grad } S = \text{Grad } P - \text{Grad } Q$  für  $\text{Grad } P \geq \text{Grad } Q$  und  $S(x) = 0$  sonst.

$A_{k1}$  heißt Residuum von  $R(x)$  beim Pol  $x = x_k$ .

Beispiel:

$$R(x) = \frac{2x^3}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{8}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2} + 2$$

↗  
konstantes Polynom  $S(x) = 2$

Praktische Berechnung der  $A_{jk}$ :

Schritt 1: Am einfachsten findet man die Koeffizienten der höchsten Potenzen der Polstellen: Dazu schreiben wir  $Q(x) = (x-x_j)^{n_j} q_j(x)$ , also

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-x_j)^{n_j} q_j(x)}$$

und

$$\begin{aligned}
 A_{jn_j} & \stackrel{(34)}{=} \lim_{x \rightarrow x_j} [(x-x_j)^{n_j} R(x)] = \lim_{x \rightarrow x_j} \frac{(x-x_j)^{n_j} P(x)}{(x-x_j)^{n_j} q_j(x)} \\
 & = \frac{P(x_j)}{q_j(x_j)},
 \end{aligned}$$

d.h. man setzt in den Vorfaktor von  $(x-x_j)^{-n_j}$  in  $R(x)$  einfach  $x = x_j$  ein.

Hat  $R(x)$  nur einfache Nullstellen, so haben wir unser Ziel bereits erreicht.

Schritt 2: Ein Algorithmus, um  $A_{j,n_j-1}$  (und dann sukzessive alle  $A_{jk}$  zu berechnen), arbeitet mit

$$R(x) - \frac{A_{jn_j}}{(x - x_j)^{n_j}}$$

weiter, bei dem wegen Gl. (34) die Polstelle  $x = x_j$  nur den Grad  $n_j - 1$  hat, und fährt analog zu Schritt 1 (mit  $n_j$  ersetzt durch  $n_j - 1$ ) fort. In der Praxis hat man es meist nur mit einfachen und doppelten Nullstellen zu tun. Dann ist es einfacher, Gl. (34) auf den Hauptnenner zu bringen, und die Koeffizienten des Zählers mit denen von  $P(x)/a_n$  zu vergleichen.

Im obigen Beispiel ist  $P(x) = 2x^3$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $q_1(x) = (x - 2)^2$  und  $q_2(x) = x - 1$ :

$$A_{11} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ (x - 1) \frac{2x^3}{(x - 1)(x - 2)^2} \right] = \frac{P(1)}{q_1(1)} = 2$$

$$A_{22} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[ (x - 2)^2 \frac{2x^3}{(x - 1)(x - 2)^2} \right] = \frac{P(2)}{q_2(2)} = 16$$

Wegen Grad  $S = 0$  ist  $S(x) = s_0 = \text{const.}$  Also

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2}{x - 1} + \frac{16}{(x - 2)^2} + \frac{A_{21}}{x - 2} + s_0 \\ &= \frac{s_0 x^3 + (2 + A_{21} - 5s_0)x^2 + (8 - 3A_{21} + 8s_0)x - 8 + 2A_{21} - 4s_0}{(x - 1)(x - 2)^2} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{2x^3}{(x - 2)^2(x - 1)} \\ \Rightarrow \quad &s_0 = 2 \quad \text{und} \quad A_{21} = 8. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung kann man jede rationale Funktion integrieren:

$$\begin{aligned}
\int dx R(x) = & A_{11} \ln(x - x_1) - A_{12} \frac{1}{x - x_1} - \frac{A_{13}}{2} \frac{1}{(x - x_1)^2} - \\
& \dots - \frac{A_{1n_1}}{n_1 - 1} \frac{1}{(x - x_1)^{n_1 - 1}} \\
& + A_{21} \ln(x - x_2) - A_{22} \frac{1}{x - x_2} - \dots \\
& \vdots \\
& + \underbrace{\int dx S(x)}_{\text{Polynom}}
\end{aligned} \tag{35}$$

Wird  $x - x_k$  auf dem Integrationsweg negativ, so kann man als Stammfunktion von  $\frac{1}{x - x_k}$  die Funktion  $\ln \frac{x - x_k}{\alpha}$  mit geeignetem  $\alpha \in \mathbb{C}$  wählen, z.B.  $\alpha = -1$ , denn

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{x - x_k}{\alpha} = \frac{\alpha}{x - x_k} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{x - x_k}$$

**Standardsubstitutionen:**  $R$  bezeichne eine rationale Funktion. Wir benötigen auch rationale Funktionen mit zwei Variablen:

$$R(x, y) := \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

wobei  $P$  und  $Q$  Polynome in zwei Variablen sind, also die Form

$$P(x, y) := a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots,$$

mit  $a_{jk} \in \mathbb{C}$  haben.

(a)  $\int dx R(x, \sqrt{a + bx})$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a + bx \geq 0$ .

Beispiel: Mit  $R(x, y) = \frac{1 + y^2}{2 + 3xy}$  ist  $R(x, \sqrt{a + bx}) = \frac{1 + a + bx}{2 + 3x\sqrt{a + bx}}$ .

Substitution:

$$t = \sqrt{a + bx} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2}{b} - \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2t}{b} dt$$

also: 
$$\int dx R(x, \sqrt{a + bx}) = \int dt \underbrace{\frac{2t}{b} R\left(\frac{t^2 - a}{b}, t\right)}_{\text{rationale Funktion}} \quad (36)$$

Das Integral ist also lösbar mit Partialbruchzerlegung und Gl. (35)

(wobei dort  $R(x)$  durch  $\frac{2t}{b}R(t^2 - a, t)$  zu ersetzen ist).

(b)  $\int dx R(x, \sqrt{(x - a)(x - b)})$  mit  $b > a \in \mathbb{R}$ .

Euler-Substitution:

$$t = \sqrt{\frac{x - a}{x - b}} \quad \text{für } x \geq b \quad \text{oder } x \leq a \quad (37a)$$

$$t = \sqrt{\frac{x - a}{b - x}} \quad \text{für } a \leq x \leq b \quad (37b)$$

Wir betrachten den Fall Gl. (37a):

$$x = \frac{bt^2 - a}{t^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - a)(x - b)} = |x - b|t = (b - a) \frac{t}{|t^2 - 1|}$$

$$dx = (a - b) \frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

Also:

$$\int dx R(x, \sqrt{(x - a)(x - b)}) =$$

$$2(a - b) \int dt \underbrace{\frac{t}{(t^2 - 1)^2} R\left(\frac{bt^2 - a}{t^2 - 1}, \frac{(b - a)t}{|t^2 - 1|}\right)}_{\text{rationale Funktion}} \quad (38)$$

Für  $x > b$  ist  $t > 1$ , also  $|t^2 - 1| = t^2 - 1$ , während für  $x < a$  stattdessen  $t < 1$  und  $|t^2 - 1| = 1 - t^2$  ist.

Eine Alternative zur Euler-Substitution ist (hier erklärt für den Fall

$(x - a)(x - b) \geq 0$  und  $b > a$ ):

$$\begin{aligned} x &:= \frac{(z + (b - a)/4)^2}{z} + a, & z \leq -\frac{b - a}{4} \text{ oder } z > \frac{b - a}{4}, \\ dx &= \frac{(4z + a - b)(4z + b - a)}{16z^2} dz \\ \sqrt{(x - a)(x - b)} &= \frac{(4z + a - b)(4z + b - a)}{16|z|}. \end{aligned}$$

(c) Wir behandeln nun zwei Spezialfälle von (b), für die andere Substitutionen eleganter sind:

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 x^2}} \quad \text{mit } a > 0, -1 < ax < 1$$

Substitution:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a} \sin t, & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ dx &= \frac{\cos t}{a} dt, & \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{1}{\cos t} \\ \Rightarrow \int dx \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 x^2}} &= \frac{1}{a} \int dt = \frac{t}{a} + C \\ &= \frac{\arcsin(ax)}{a} + C \end{aligned} \tag{39}$$

Lösen wir nun für den Spezialfall  $a = 1$  das Integral mit der Euler-Substitution, so finden wir stattdessen

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > 1, & x &= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 1} \\ \Rightarrow dx &= \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \quad \text{und} \quad \sqrt{1-x^2} &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
 \int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 2 \int dt \frac{1}{1+t^2} \\
 &\stackrel{\text{Partialbruchz.}}{=} \int dt \left( \frac{i}{t+i} - \frac{i}{t-i} \right) \\
 &= i [\ln(t+i) - \ln(t-i)] + C \\
 &= i \ln \frac{t+i}{t-i} + C' = i \ln \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + i}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - i} + C' \quad (40) \\
 &\quad \uparrow
 \end{aligned}$$

erlaubt, weil  $t > 0$

Durch Vergleich von Gl. (39) und (40) finden wir

$$\begin{aligned}
 \arcsin x &= i \ln \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + i}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - i} + C' - C \\
 &= i \ln \left( x + i\sqrt{1-x^2} \right) + C' - C
 \end{aligned}$$

Durch Betrachten des Limes  $x \rightarrow -1$  findet man zudem

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi}{2} &= \arcsin(-1) = i \ln(-1) + C' - C = -\pi + C' - C \\
 \Rightarrow C' - C &= \frac{\pi}{2} \\
 \text{also } \arcsin x &= i \ln \left( x + i\sqrt{1-x^2} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (41)
 \end{aligned}$$

D.h. man kann nicht nur  $\sin x$  durch komplexe Exponentialfunktionen ausdrücken, sondern auch  $\arcsin x$  durch den komplexen Logarithmus!

Der andere Spezialfall ist das Integral

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}, \quad \text{mit } a > 0$$

Substitution:  $x = \frac{1}{a} \sinh t$ . Wegen  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$  (was man einfach mit Gl. (31) nachrechnet) ist also

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + a^2 x^2} &= \cosh t, & dx &= \frac{1}{a} \cosh t dt \\ \int dx \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 x^2}} &= \frac{1}{a} \int dt \frac{\cosh t}{\cosh t} = \frac{1}{a} \int dt \\ &= \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a} \operatorname{arsinh}(ax) + C. \end{aligned} \quad (42)$$

Substituiert man stattdessen  $s = a^2 x^2$  und danach  $z = \sqrt{\frac{s}{1+s}}$ , so findet man nach mehreren Schritten (analog zum ersten Spezialfall)

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 x^2}} = \frac{1}{a} \ln \left( ax + \sqrt{1 + a^2 x^2} \right) + C' \quad (43)$$

und mit  $a = 1$  aus Gl. (42) und (43);

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right),$$

wobei  $C' - C$  z.B. durch Betrachten von  $x = 0$  bestimmt wurde.

(d)  $\int dx R(\sin x, \cos x)$  kann mit der Substitution  $t = \tan \frac{x}{2}$  (also  $x = 2 \arctan t$ ) gelöst werden:

Dazu betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} \tan y &= \frac{\sin y}{\cos y} \\ \Rightarrow \frac{d \tan y}{dy} &= \sin y \frac{d}{dy} \frac{1}{\cos y} + \frac{1}{\cos y} \frac{d}{dy} \sin y \\ &= \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \\ \Rightarrow \frac{d \arctan t}{dt} &= \cos^2 y \Big|_{y=\arctan t} \\ &= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} \Big|_{y=\arctan t} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \Big|_{y=\arctan t} \\ &= \frac{1}{1 + t^2} \end{aligned} \quad (44)$$

Also  $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$  und weiter:

$$\sin x \stackrel{(29)}{=} 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad (45)$$

$$\cos x \stackrel{(29)}{=} \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (46)$$

Damit haben wir unser Ziel erreicht:

$$\int dx R(\sin x, \cos x) = 2 \int dt \underbrace{\frac{1}{1+t^2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}_{\text{rationale Funktion}} \quad (47)$$

### 1.2.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gesucht: Funktion  $y(t)$ , die eine Gleichung

$$F\left(\frac{d^n y}{dt^n}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, t\right) = 0 \quad (48)$$

erfüllt. Gl. (48) heißt gewöhnliche Differentialgleichung (DGL). Dabei bedeutet *gewöhnlich*, dass nur eine unabhängige Variable  $t$  vorkommt.  $n$  ist die Ordnung der DGL in Gl. (48). Eine DGL heißt homogen, wenn mit einer Lösung  $y(t) \neq 0$  auch  $\lambda y(t)$  mit beliebigem  $\lambda \in \mathbb{C}$  Lösung der DGL in Gl. (48) ist. Eine lineare DGL enthält keine höheren Potenzen von  $y$ ,  $\frac{d^k y}{dt^k}$  als 1 und lässt sich somit so schreiben:

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t) \quad (49)$$

↑

o.B.d.A.:  $a_n(t) = 1$

mit vorgegebenen Funktionen  $a_0(t) \dots a_n(t)$ ,  $g(t)$ . Ist  $g(t) \equiv 0$ , so ist Gl. (49) auch homogen.

Beispiel:

$$\dot{y} = \alpha y, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (50)$$

ist eine homogene, lineare DGL 1. Ordnung.

Lösung:

$$\begin{aligned} \int dt \frac{\dot{y}}{y} &= \alpha \int dt \\ \Rightarrow \ln y &= \alpha t + C' \\ y(t) &= \underbrace{e^{C'}}_C e^{\alpha t} \\ &= C e^{\alpha t} \quad \text{mit } C \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (51)$$

D.h. wir haben eine Schar von Lösungen, die von einem freien Parameter  $C$  (einer Integrationskonstante) abhängen. Sind  $a_0, \dots, a_n$  unabhängig von der Zeit, so spricht man von einer DGL mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungsschar einer DGL  $n$ -ter Ordnung hat  $n$  unabhängige Parameter  $C_1, \dots, C_n$ .

Für eine lineare homogene DGL gilt das Superpositionsprinzip: Mit  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  ist auch

$$\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$$

eine Lösung. (Beweis: Einsetzen in Gl. (49).) Die Lösungsschar hat die Form

$$C_1 y_1(t) + \dots + C_n y_n(t), \quad (52)$$

wobei  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  linear unabhängige Lösungen sind. (Linear unabhängig bedeutet, dass man keine Konstanten  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  finden kann, so dass  $\alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) \equiv 0$ , also gleich der Nullfunktion ist.)

Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\text{Rückstellkraft } F = -ky$$

$$m\ddot{y} = -ky, \quad m, k > 0, \quad \text{Schwingungsdifferentialgleichung} \quad (53)$$

$m$  ist die Masse des schwingenden Teilchens,  $k$  die Federkonstante. Trick:

$$\begin{aligned}
 m\dot{y}\ddot{y} &= -k\dot{y}y \\
 \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \dot{y}^2 &= -\frac{k}{2} \frac{d}{dt} y^2 \\
 \frac{m}{2} \dot{y}^2 &= -\frac{k}{2} y^2 + E, \tag{54}
 \end{aligned}$$

↑

Integrationskonstante  $C_1$

Lösungen mit reellen Funktionen  $y(t)$  kann es nur für  $E > \frac{k}{2}y^2$  geben.

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{2} \frac{\dot{y}^2}{E - \frac{k}{2}y^2} &= 1 \\
 \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int dt \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}y^2}} &= \int dt
 \end{aligned}$$

↙

Mit  $dy = \dot{y}dt$  erkennen wir das Integral aus Gl. (39)!

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{\frac{2E}{k}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} y \right) = \underbrace{t - t_0}_{\text{zweite Integrationskonstante } C_2}$$

$$\arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} y \right) = \omega(t - t_0),$$

wo wir die Parameter  $k$  und  $m$  zu

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \text{Eigen(kreis)frequenz} \tag{55}$$

zusammengefasst haben. Die Lösung ist also

$$y(t) = A \sin [\omega(t - t_0)] \tag{56}$$

$$\hookrightarrow \text{Amplitude } A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$E$  ist die Energie der schwingenden Masse, in Gl. (54) ist sie als Integrationskonstante aufgetreten.

Energieerhaltung!

Alternativ zu Gl. (56):

$$\begin{aligned} \sin(\omega t - \omega t_0) &\stackrel{(29)}{=} \cos(\omega t_0) \sin(\omega t) - \sin(\omega t_0) \cos(\omega t) \\ \lambda &:= A \cos(\omega t_0), \quad \mu := -A \sin(\omega t_0) \\ y(t) &= \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{57}$$

$\begin{array}{c} \uparrow \quad \nearrow \\ \text{unabhängige Lösungen} \end{array}$

Für  $\lambda = \pm i\mu$  findet man die Lösungen

$$\mu = A_1 : \quad y_1 = A_1 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = A_1 e^{i\omega t} \tag{58a}$$

$$\mu = A_2 : \quad y_2 = A_2 [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] = A_2 e^{-i\omega t} \tag{58b}$$

Eine Standardmethode zur Lösung von Gl. (53) ist die Verwendung des Ansatzes

$$y = A e^{i\tilde{\omega} t} \tag{59}$$

Einsetzen von Gl. (59) in Gl. (53):

$$\begin{aligned} mA(i\tilde{\omega})^2 e^{i\tilde{\omega} t} &= -kA e^{i\tilde{\omega} t} \\ \Leftrightarrow m\tilde{\omega}^2 &= k \\ \Leftrightarrow \tilde{\omega} &= \pm\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \tag{60}$$

Superpositionsprinzip:

$$y(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \tag{61}$$

Mit  $\mu = A_1 + A_2$  und  $\lambda = A_1 - A_2$  findet man Gl. (57).

Zurück zu DGL 1. Ordnung:

- DGL des Typs

$$\dot{y} = f(t)g(y) \quad (62)$$

kann man durch Separation der Variablen lösen:

$$G(y) := \int \frac{\dot{y}}{g(y)} = \int dt f(t)$$

$$y = G^{-1} \left( \int dt f(t) \right)$$

↑

Notation enthält Integrationskonstante

- Lineare DGL erster Ordnung (mit  $h(t) = \frac{a_0(t)}{a_1(t)}$ ,  $f(t) = \frac{g(t)}{a_1(t)}$ ),

$$\dot{y} + h(t)y = f(t) \quad (63)$$

löst man so:

$$(\dot{y} + h(t)y) e^{\int_{t_0}^t ds h(s)} = f(t) e^{\int_{t_0}^t ds h(s)}$$

Produktregel:

$$\frac{d}{dt} \left( y e^{\int_{t_0}^t ds h(s)} \right) = f(t) e^{\int_{t_0}^t ds h(s)}$$

$$y e^{\int_{t_0}^t ds h(s)} = \int dt f(t) e^{\int_{t_0}^t ds h(s)}$$

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^t ds h(s)} \int dt f(t) e^{\int_{t_0}^t ds h(s)} \quad (64)$$

Die Lösung hat aus  $\int dt f(t) \dots$  eine Integrationskonstante  $C$ , in die  $t_0$  absorbiert werden kann; d.h. es gibt nur eine Integrationskonstante, nicht zwei ( $t_0$  und  $C$ ).

## 2 Kinematik

### 2.1 Bewegung eines Massenpunktes

Idealisierung: Ausdehnung des bewegten Körpers wird vernachlässigt (Massenpunkt).

Ortsvektor  $\vec{r}$

Ein Koordinatensystem mit rechtwinkligen Achsen definiert kartesische Koordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Darstellung des Ortsvektors: Pfeil vom Ursprung  $O$  des Koordinatensystems zum Ort  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  des Massenpunktes.

$n$ -Tupel:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow n \text{ Zahlen. Es kommt auf die Reihenfolge an!} \\ \swarrow \end{array}$$

Die Menge der  $\left\{ \begin{array}{l} \text{reellen} \\ \text{komplexen} \end{array} \right\}$   $n$ -Tupel ist  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{array} \right\}$ .

D.h.  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ ;  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ist Spaltenvektor. Die Transposition eines Spaltenvektors liefert einen Zeilenvektor  $\vec{r}^T = (x, y, z)$ .

$\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  sind Euklidische Vektorräume:

- $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n \Rightarrow$  Linearkombination  $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  für beliebi-

ge  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , wobei mit  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \lambda a_3 + \mu b_3 \end{pmatrix}$$

Konsequenzen:

Kommutativgesetz, Existenz eines Nullvektors  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- Skalarprodukt für  $\mathbb{R}^n$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \vec{a}^T \vec{b} := \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad (66)$$

– Länge oder Norm:

$$|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}^T \vec{a}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j a_j} \quad (67)$$

– Winkel  $\theta(\vec{a}, \vec{b})$  zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =: |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{mit } 0 \leq \theta(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi \quad (68)$$

Um Gl. (68) zu verstehen, betrachten wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2] = \frac{1}{2} [|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2].$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite enthält die Längen von drei Vektoren. Die Länge eines Vektors hängt nicht von der Wahl des Koordinatensystem ab. Wenn wir die  $x$ -Achse in Richtung von  $\vec{a}$  und die  $z$ -Achse senkrecht zur von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene legen, dann ist  $\vec{a} = |\vec{a}|(1, 0, 0)^T$  und  $\vec{b} = |\vec{b}|(\cos \phi, \sin \phi, 0)^T$  (ebene Polarkoordinaten!), wobei  $\phi = \theta(\vec{a}, \vec{b})$  der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist. Also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{(66)}{=} (|\vec{a}|, 0, 0) \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cos \theta(\vec{a}, \vec{b}) \\ |\vec{b}| \sin \theta(\vec{a}, \vec{b}) \\ 0 \end{pmatrix} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta(\vec{a}, \vec{b})$$

wie in Gl. (68) behauptet.

$$\text{Bahnkurve: } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Die Zeit  $t$  ist ein Kurvenparameter, wir können die verschiedenen Punkte mit dem Zeitpunkt  $t$  kennzeichnen, zu dem der Massenpunkt den Ort  $\vec{r}(t)$  durchlaufen hat.

Beispiel: Wurfparabel

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ -g \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor:  $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (69)$$

Limes komponentenweise definiert; d.h.  $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ .

Weglänge oder Bogenlänge:

$$\underbrace{s(t, t_0)}_{\text{Kilometerzähler}} = \int_{t_0}^t d\tau \underbrace{|\dot{\vec{r}}(\tau)|}_{\text{Tachoanzeige}} \quad (70)$$

Umkehrfunktion  $t(s)$  zu  $s(t, t_0)$ :

$$\vec{r}_s(s) := \vec{r}(t(s))$$

ist eine andere Parameterdarstellung der Kurve, nun kennzeichnet die Weglänge  $s$  zwischen  $\vec{r}_s(0) = \vec{r}(t_0)$  und  $\vec{r}_s(s) = \vec{r}(t)$  den betrachteten Punkt auf der Bahnkurve. ( $s$  steht auf Kilometersteinen an Straßen.)

Tangentenvektor:

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) &= \frac{d\vec{r}_s}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} \\ &= \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} \end{aligned} \quad (71)$$

Nicht mit der Zeit verwechseln!

Also  $|\vec{t}(s)| = 1$  und  $\vec{r}_s \propto \vec{v}$  ist tangential zur Bahnkurve.

$$\vec{v}_s(s) := \vec{v}(t(s)) = \frac{d\vec{r}_s}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{t}(s) v(t) \quad (72)$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) := \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \frac{d}{dt} |\vec{v}(t)| = \frac{v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \end{aligned} \quad (74)$$

Achtung: I.A.  $a(t) = |\vec{a}(t)| = |\dot{\vec{v}}| \neq \frac{d}{dt} |\vec{v}(t)| = \dot{v}(t)$ . ( $a(t) = \dot{v}(t)$  gilt nur, wenn  $\vec{a} \propto \vec{v}$ , also  $\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} = a$  ist.)

$\vec{a}$  als Funktion der Bogenlänge:

$$\begin{aligned}\vec{a}_s(s) &= \vec{a}(t(s)) \\ &= \frac{d\vec{v}(s(t))}{dt} \stackrel{(72)}{=} \frac{d}{dt} [|\vec{t}(s)|\vec{v}(t)] \\ &= \dot{\vec{t}}v(t) + \vec{t}\dot{v}(t)\end{aligned}\tag{75}$$

wegen  $1 \stackrel{(71)}{=} |\vec{t} \cdot \vec{t}|$  ist

$$0 = \frac{d}{dt} (\vec{t} \cdot \vec{t}) = 2\vec{t} \cdot \dot{\vec{t}},\tag{76}$$

denn es gilt die Produktregel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d}{dt} (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= \dot{a}_1b_1 + \dot{a}_2b_2 + \dot{a}_3b_3 + a_1\dot{b}_1 + a_2\dot{b}_2 + a_3\dot{b}_3 \\ &= \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}\end{aligned}\tag{77}$$

Gl. (76) bedeutet, dass  $\dot{\vec{t}}$  auf  $\vec{t}$  senkrecht steht. Damit folgt aus Gl. (75):

$$|\vec{a}|^2 = |\dot{\vec{t}}|^2v^2 + |\dot{v}|^2\tag{78}$$

Man sieht an Gl. (78), dass tatsächlich  $|\vec{a}| \neq |\dot{v}|$ , außer es gilt  $\dot{\vec{t}} = 0$ , der Massenpunkt durch die Beschleunigung also nicht seine Richtung ändert.

In Gl. (75) beschreibt

$$\vec{a}_\perp := \dot{t} \vec{v}$$

die Zentripetalbeschleunigung, deren ausschließlicher Effekt die Änderung der Bewegungsrichtung ist, und

$$\vec{a}_\parallel := \dot{t} \dot{v}$$

die Beschleunigung in Bewegungsrichtung, deren ausschließlicher Effekt die Änderung von  $|\vec{v}|$  (also die Änderung der „Tachoanzeige“) ist.

$$\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$$

mit  $\vec{a}_\perp \cdot \vec{a}_\parallel = 0$ . Eliminieren wir mit Gl. (71) den Tangentenvektor, so finden wir

$$\begin{aligned} \vec{a}_\parallel &= \frac{\dot{v}}{v} \vec{v} \\ \vec{a}_\perp &= \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \dot{\vec{v}} - \frac{\dot{v}}{v} \vec{v} \end{aligned} \quad (79)$$

Beispiel: Wurfparabel

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ -g \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} \Rightarrow v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2} \\ \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow a(t) = |\vec{a}(t)| = g \end{aligned}$$

$$\dot{v}(t) \stackrel{(74)}{=} \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)} = \frac{g^2 t}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad \text{für } t = 0 \\ \rightarrow g \quad \text{für } t \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_{\parallel} \stackrel{(79)}{=} \frac{g^2 t}{v^2} \vec{v}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \frac{g^2 t}{v^2} \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \frac{gv_x}{v^2} \begin{pmatrix} -gt \\ 0 \\ -\frac{v^2}{v_x} + \frac{g^2 t^2}{v_x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{gv_x}{v^2} \begin{pmatrix} -gt \\ 0 \\ -v_x \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf  $\vec{v}$ !

$$\vec{a}_{\parallel} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}_{\parallel}| = \frac{g^2 t}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad \text{für } t = 0 \\ \rightarrow g \quad \text{für } t \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$|\vec{a}_{\perp}| = g \frac{v_x}{v} = \frac{gv_x}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} = g \quad \text{für } t = 0 \\ \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

D.h. für  $t \rightarrow \infty$  geht der Wurf in einen freien Fall über.

## 2.2 Krummlinige Koordinaten

Die Einheitsvektoren (oder Basisvektoren) unseres kartesischen Koordinatensystems hängen nicht von  $\vec{r}$  ab:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (80)$$

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Bei krummlinigen Koordinaten ist das nicht so.

## 2.3 Ebene Polarkoordinaten und Zylinderkoordinaten

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{array} \right\} \text{ ebene Polarkoordinaten } \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{array}} \right\} \text{ Zylinderkoordinaten} \quad (81)$$

Übliche Wahl:  $-\pi < \phi \leq \pi$

Umkehrung von Gl. (81):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad (82a)$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0, y > 0 \end{cases} \quad (82b)$$

Partielle Ableitung: Ist  $f(x, y, z)$  eine Funktion mehrerer Variablen, so bedeutet

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{die Ableitung von } f \text{ nach } x \text{ für konstante } y, z.$$

Die Kettenregel impliziert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} \\ &= \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f \end{aligned}$$

mit dem Gradienten

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator

Die Gleichung  $f(x, y, z) = \text{const.}$  definiert eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ . (Beispiel:  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  definiert die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R$ .) Parametrisiert  $\vec{r}(t)$  eine beliebige Bahnkurve in dieser Fläche, so ist  $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = 0 = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f$ , was bedeutet, dass  $\vec{\nabla} f$  senkrecht

auf dieser Kurve steht. Da  $\vec{\nabla}f$  senkrecht auf *allen* solchen Kurven steht, steht  $\vec{\nabla}f$  also senkrecht auf der Fläche  $f(x, y, z) = \text{const.}$

Die Einheitsvektoren der kartesischen Koordinaten aus Gl. (79) erfüllen

$$\vec{e}_x = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right|} \quad \text{usw.}$$

Wir definieren Einheitsvektoren analog für krummlinige Koordinaten. Für die Zylinderkoordinaten in Gl. (81):

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} \stackrel{(81)}{=} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1 \quad (83)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|} \stackrel{(81)}{=} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = r \quad (84)$$

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right|} \stackrel{(81)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Basisvektoren der Zylinderkoordinaten stehen paarweise senkrecht aufeinander und sind normiert:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = 0 \quad (85a)$$

$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\phi| = |\vec{e}_z| = 1 \quad (85b)$$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$  ist ein rechtshändiges Koordinatensystem. Wir finden

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \quad (86)$$

Hier tritt kein  $\vec{e}_\phi$  auf!

Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r + \dot{z} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (87)$$

Neu im Vergleich zu kartesischen Koordinaten:

$$\dot{\vec{e}}_r \stackrel{(83)}{=} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \vec{e}_\phi \quad (88)$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi \stackrel{(84)}{=} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \vec{e}_r \quad (89)$$

Aus Gl. (87) wird

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z \\ &= v_r \vec{e}_r + v_\phi \vec{e}_\phi + v_z \vec{e}_z \end{aligned} \quad (90)$$

$v_r = \dot{r}$  heißt radiale Geschwindigkeit (oder Radialgeschwindigkeit)

$v_\phi = r \dot{\phi}$  heißt zirkulare oder azimutale Geschwindigkeit

Empfehlung: Buch von Kirchgessner und Schreck.

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z \right) \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\phi} \vec{e}_\phi + r \ddot{\phi} \vec{e}_\phi + r \dot{\phi} \dot{\vec{e}}_\phi + r \dot{\phi} \dot{\vec{e}}_\phi + \ddot{z} \vec{e}_z \\ &= \underbrace{\left( \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \right)}_{a_r} \vec{e}_r + \underbrace{\left( 2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi} \right)}_{a_\phi} \vec{e}_\phi + \ddot{z} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (91)$$

mit radialer Beschleunigung  $a_r$  und zirkularer (azimutaler) Beschleunigung

$a_\phi$ .  $a_r \vec{e}_r$  heißt auch Zentripetalbeschleunigung.

## 2.2.2 Kugelkoordinaten

↑

Projektion von  $\vec{r}$  in die  $(x, y)$ -Ebene. Diese Projektion hat die Länge  $r \sin \theta$ .

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (92)$$

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (93a)$$

$$\text{mit } \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (93b)$$

$\theta$  mit  $0 \leq \theta \leq \pi$  heißt Polarwinkel,  $\phi$  mit  $-\pi < \phi \leq \pi$  heißt Azimutwinkel.

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|} \stackrel{(93)}{=} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (94)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|} \stackrel{(93)}{=} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (95)$$

Dabei wurde  $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r$  und  $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = r \sin \theta$  verwendet. Die Basisvektoren  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$  stehen paarweise senkrecht aufeinander und bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem.

Längengrad: Halbkreis definiert durch  $r = \text{const.}$ ,  $\phi = \text{const.}$  und  $\theta \in [0, \pi]$ .

Breitenkreis: Kreis definiert durch  $r = \text{const.}$ ,  $\theta = \text{const.}$  und  $\phi \in [-\pi, \pi]$ .

$\vec{e}_r$  steht senkrecht auf der Kugeloberfläche („Sphäre“) mit  $r = \text{const.}$

$\vec{e}_\theta$  steht senkrecht auf dem Breitenkreis (mit  $\theta = \text{const.}$ ) und ist tangential zum Längengrad.

$\vec{e}_\phi$  steht senkrecht auf dem Längengrad (mit  $\phi = \text{const.}$ ) und ist tangential zum Breitenkreis.

Umkehrung von Gl. (92):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (96)$$

$\phi$  wie in Eq. (82)

Erde  $\simeq$  Kugel, wobei die  $z$ -Achse den geographischen

Süd- und Nordpol durchsticht.



$z = -R$

$z = R = \text{Erdradius.}$

Greenwich-Meridian:  $\phi = 0$ . Wir zählen  $\phi > 0$  für Punkte östlicher Länge

und  $\phi < 0$  für Punkte westlicher Länge.  $\vec{e}_\phi$  zeigt in Richtung Osten, die Erde

dreht sich in Richtung  $\vec{e}_\phi$  (Rechte-Hand-Regel, Daumen zum Nordpol).

$\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$  definiert den Äquator. In der Geographie verwendet man

$$\theta_B = 90^\circ - \theta,$$

wobei  $\theta_B > 0$  der nördlichen Breite entspricht, während  $\theta_B < 0$  die südliche Breite

bezeichnet.

Karlsruhe (Schloss), „GPS-Koordinaten“:

$$\begin{aligned}\theta_B &= 49^\circ 0' 48,647'' = 49,013513^\circ \\ \Rightarrow \theta &= 40,986487^\circ = 0,22770271 \pi = 0,71534915 \\ \phi &= 8^\circ 24' 15,966'' = 8,404435^\circ \\ &= 0,04669131 \pi = 0,14668506\end{aligned}$$

Für  $\vec{v}$  und  $\vec{a}$  brauchen wir:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi\end{aligned}\tag{97}$$

Wie rechnet man die Koeffizienten  $0$ ,  $\dot{\theta}$  und  $\dot{\phi} \sin \theta$  von  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\phi$  aus?

Wegen  $0 = \frac{d}{dt} 1 = \frac{d}{dt} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 2 \vec{e}_r \dot{\vec{e}}_r$  ist  $\dot{\vec{e}}_r \perp \vec{e}_r$ , also  $\dot{\vec{e}}_r = a \vec{e}_\theta + b \vec{e}_\phi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Trick:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r \cdot \vec{e}_\theta &= a \underbrace{\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta}_{=1} + b \underbrace{\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\theta}_{=0} \\ &= a\end{aligned}$$

und ebenso  $\dot{\vec{e}}_r \cdot \vec{e}_\phi = b$ . Beispielhaft:

$$\begin{aligned}b &= \dot{\vec{e}}_r \cdot \vec{e}_\phi = \left( \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \right) (-\sin \phi) \\ &\quad + \left( \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \right) \cos \phi \\ &= \dot{\phi} \sin \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \dot{\phi} \sin \theta\end{aligned}$$

Analog zu Gl. (97) findet man:

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi\tag{98a}$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi} (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)\tag{98b}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r \\
 &= \underbrace{\dot{r}}_{v_r(t)} \vec{e}_r + \underbrace{r \dot{\theta}}_{v_\theta(t)} \vec{e}_\theta + \underbrace{r \sin \theta \dot{\phi}}_{v_\phi(t)} \vec{e}_\phi \quad (99) \\
 &\quad \text{radiale,} \quad \text{polare,} \quad \text{azimutale Geschwindigkeit}
 \end{aligned}$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned}
 \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d}{dt} \left( \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \vec{e}_\phi \right) \\
 &= \left[ \ddot{r} - r \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \right] \vec{e}_r \\
 &\quad + \left[ 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \left( \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \sin(2\theta) \right) \right] \vec{e}_\theta \\
 &\quad + \left[ 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + r \left( 2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + \ddot{\phi} \sin \theta \right) \right] \vec{e}_\phi \\
 &=: \underbrace{a_r(t)}_{\text{radiale}} \vec{e}_r + \underbrace{a_\theta(t)}_{\text{polare}} \vec{e}_\theta + \underbrace{a_\phi(t)}_{\text{azimutale}} \vec{e}_\phi \quad (100) \\
 &\quad \text{Beschleunigung}
 \end{aligned}$$

### 2.3 Drehungen

Oft muss man eine in einem Koordinatensystem  $\Sigma$  definierte Bewegung in einem anderen Koordinatensystem  $\Sigma'$  beschreiben, das gegen  $\Sigma$  gedreht ist. Beispiel: Drehung um  $z$ -Achse:  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  beschreiben denselben Punkt, wobei

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad \text{und} \quad \vec{r}' = x' \vec{e}_{x'} + y' \vec{e}_{y'} + z \vec{e}_{z'}$$

ist.

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \\ \Sigma' \end{array} \right\} \text{ ist durch } \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \\ \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'} \end{array} \right\} \text{ definiert.}$$

Im Beispiel (siehe Zeichnung):

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi \quad (101a)$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \quad (101b)$$

$$z' = z \quad (101c)$$

Matrix-Schreibweise:  $m \times n$ -Matrix  $B$ :

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \begin{matrix} \swarrow \\ \leftarrow m \text{ Zeilen} \\ \swarrow \end{matrix}$$

Die Menge aller  $\left\{ \begin{matrix} \text{reellen} \\ \text{komplexen} \end{matrix} \right\} m \times n$ -Matrizen ist  $\left\{ \begin{matrix} \mathbb{R}^{m \times n} \\ \mathbb{C}^{m \times n} \end{matrix} \right\}$ .

Spaltenvektoren:

$$\vec{b}_k := \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} \quad (102)$$

$$\Rightarrow B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n).$$

Multiplikation einer  $m \times n$ -Matrix mit einem Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  aus  $\mathbb{R}^n$   
oder  $\mathbb{C}^n$ :

$$\begin{aligned} B \vec{a} &:= a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + \dots + a_n \vec{b}_n \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \vec{b}_k, \end{aligned} \quad (103)$$

was eine Linearkombination der Spalten ist. Also

$$B \vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \dots & a_n b_{1n} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \dots & a_n b_{2n} \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ a_1 b_{m1} & a_2 b_{m2} & \dots & a_n b_{mn} \end{pmatrix}$$

Wir beschränken uns nun auf quadratische Matrizen, d.h. auf den Fall  $m = n$ . (In der Mechanik genügen zudem die Fälle  $n = 2$  und  $n = 3$ .) Matrix-Multiplikation:

$$BC := B(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n) = (B\vec{c}_1, \dots, B\vec{c}_n) \quad (104)$$

D.h. die  $k$ -te Spalte von  $BC$  ist gerade  $B\vec{c}_k$ . In Komponenten:

$$B = (b_{jk}), \quad C = (c_{kl}),$$

$\nearrow \quad \nwarrow$   
 Zeilenindex    Spaltenindex

$$\underbrace{[BC]_{jl}}_{\substack{\text{Element in der} \\ j\text{-ten Zeile und} \\ l\text{-ten Spalte von} \\ BC.}} \stackrel{(104,103)}{=} \sum_{k=1}^n b_{jk} c_{kl} \quad (105)$$

Mit den Zeilenvektoren  $\vec{\beta}_j^T := (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn})$  ist

$$B = \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \vec{\beta}_2 \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n \end{pmatrix}$$

und Gl. (105) liest sich als

$$[BC]_{jl} = \vec{\beta}_j^T \vec{c}_l \quad (106)$$

Merkregel für Matrixmultiplikation: „Zeile mal Spalte“.

Assoziativgesetz:

$$(BC)D = B(CD) =: BCD$$

$$(BC)\vec{a} = B(C\vec{a}) =: B C \vec{a}$$

Aber: I.A. ist  $AB \neq BA$ !

Drehung in Eq. (101):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\phi \vec{e}_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (107)$$

↗
↑

Winkel                      Achse (Einheitsvektor)

mit

$$R(\phi \vec{e}_z) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Wir betrachten zwei Drehungen um die  $z$ -Achse, zuerst um den Winkel  $\phi_1$  und dann um  $\phi_2$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi_1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi_2} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R(\phi_2 \vec{e}_z) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\phi_2 \vec{e}_z) R(\phi_1 \vec{e}_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kombinierte Drehung:

$$\begin{aligned} R(\phi_2 \vec{e}_z) R(\phi_1 \vec{e}_z) &= \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (106) \quad &\begin{pmatrix} \cos \phi_2 \cos \phi_1 - \sin \phi_2 \sin \phi_1 & \cos \phi_2 \sin \phi_1 + \sin \phi_2 \cos \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_2 \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \sin \phi_1 & -\sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (29) \quad &\begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) & \sin(\phi_1 + \phi_2) & 0 \\ -\sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= R((\phi_1 + \phi_2) \vec{e}_z) \end{aligned} \quad (109)$$

D.h. die beiden Drehwinkel addieren sich wie erwartet.

Welche Matrizen beschreiben Drehungen?

Um das herauszufinden drehen wir  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  mit einer Drehmatrix

$R = (\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3)$ :

$$R \vec{e}_x \stackrel{(103)}{=} \vec{r}_1, \quad R \vec{e}_y \stackrel{(103)}{=} \vec{r}_2, \quad R \vec{e}_z \stackrel{(103)}{=} \vec{r}_3,$$

die Spaltenvektoren von  $R$  sind also gerade die gedrehten Einheitsvektoren!

Wegen  $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$  und  $\vec{e}_x^2 = \vec{e}_y^2 = \vec{e}_z^2 = 1$  ist also

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3 = 0 \quad (110a)$$

$$\vec{r}_1^2 = \vec{r}_2^2 = \vec{r}_3^2 = 1, \quad (110b)$$

denn die Drehung des Koordinatensystems ändert weder etwas an der Länge der Vektoren noch an dem Umstand, dass sie senkrecht aufeinander stehen!

Die Gleichungen in Gl. (110) kann man zusammenfassen als

$$R^T R = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Einheitsmatrix,} \quad (111)$$

wobei die transponierte Matrix definiert ist durch

$$R^T = \begin{pmatrix} \vec{r}_1^T \\ \vec{r}_2^T \\ \vec{r}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (112)$$

Gl. (111) überprüft man leicht mit Gl. (106)!

Rechenregeln:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(B \vec{a})^T = \vec{a}^T B^T, \quad \text{was ein Zeilenvektor ist!}$$

Erfüllt  $R$  Gl. (111), so nennt man  $R$  orthogonale Matrix.

Levi-Civita-Symbol:

$$\epsilon_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 1, k = 2 \\ 0 & \text{für } j = k \\ -1 & \text{für } j = 2, k = 1 \end{cases} \quad (113a)$$

$$\text{Matrixform: } \epsilon = (\epsilon_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (113b)$$

$\epsilon_{jkl}$  ist definiert durch

$$(i) \quad \epsilon_{123} = 1 \quad (114a)$$

$$(ii) \quad \epsilon_{jkl} = \epsilon_{klj} \quad (\text{Zyklizität}) \quad (114b)$$

$$(iii) \quad \epsilon_{jkl} = -\epsilon_{kjl} \quad (\text{Antisymmetrie}) \quad (114c)$$

Daraus folgt einerseits, dass  $\epsilon_{jkl} = 0$  ist, wenn zwei Indizes gleich sind, und andererseits  $\epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$  und  $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$ .

Die Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix  $M = (m_{ln})$  ist:

$$\begin{aligned} \det M &:= \sum_{j,k=1}^2 \epsilon_{jk} m_{1j} m_{2k} \\ &= \epsilon_{12} m_{11} m_{22} + \epsilon_{21} m_{12} m_{21} \\ &= m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21} \end{aligned} \tag{115}$$

Für eine  $3 \times 3$ -Matrix:

$$\begin{aligned} \det M &= \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} m_{1j} m_{2k} m_{3l} \\ &= m_{11} (m_{22} m_{33} - m_{23} m_{32}) \\ &\quad - m_{12} (m_{21} m_{33} - m_{23} m_{31}) \\ &\quad + m_{13} (m_{21} m_{32} - m_{22} m_{31}) \end{aligned} \tag{116}$$

Ohne Beweis:

$$\det(AB) = \det A \det B \tag{117}$$

Aus Gl. (115) und (116) liest man ab:

$$\det M^T = \det M \tag{118}$$

und  $\det \mathbf{1} = 1$ . Die Inverse von  $M$  ist die Matrix  $M^{-1}$  mit der Eigenschaft

$$MM^{-1} = \mathbf{1} = M^{-1}M, \tag{119}$$

sie existiert nur für  $\det M \neq 0$ , ist dann aber eindeutig bestimmt. Wegen Gl. (119) ist  $\det M^{-1} = 1/\det M$ .

Für eine  $2 \times 2$ -Matrix  $M$  gilt:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \tag{120}$$

Unsere orthogonale Matrix  $R$  aus Gl. (111) erfüllt

$$\begin{aligned} 1 &= \det \mathbb{1} \stackrel{(117)}{=} \det R^T \det R \\ &= (\det R)^2, \quad \text{also } \det R = \pm 1 \end{aligned} \quad (121)$$

Außerdem bedeuten Gl. (111) und (119)

$$R^{-1} = R^T.$$

Eine orthogonale Transformation erhält das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a}' \cdot \vec{b}' &= (R\vec{a}) \cdot (R\vec{b}) = \vec{a}'^T \underbrace{R^T R}_{= \mathbb{1}} \vec{b} \\ &= \vec{a}'^T \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \end{aligned} \quad (122)$$

ist also (mit  $\vec{a} = \vec{b}$ ) längentreu,

$$|\vec{a}'|^2 = \vec{a}' \cdot \vec{a}' = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

und wegen

$$\cos \theta(\vec{a}', \vec{b}') = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{b}'}{|\vec{a}'| |\vec{b}'|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \theta(\vec{a}, \vec{b})$$

auch winkeltreu.

Eine weitere wichtige Anwendung des Levi-Civita-Symbols ist das Vektor-

bzw. Kreuzprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$ , das ein Vektor mit  $j$ -ter Komponente

$$\left( \vec{a} \times \vec{b} \right)_j = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} a_k b_l \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (123)$$

ist. Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 \\ \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{231} a_3 b_1 \\ \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (124)$$

$$\text{Gl. (123)} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \quad (125)$$

Spatprodukt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \sum_{j,k,l=1}^3 a_j \epsilon_{jkl} b_k c_l \\ &= \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} a_j b_k c_l \end{aligned} \quad (126a)$$

$$= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (126b)$$

und

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \stackrel{(125)}{=} -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$$

$\vec{a} \in \mathbb{R}$  und  $\vec{b} \in \mathbb{R}$  spannen die Ebene  $E = \{\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  auf. Aus Gl. (126a) folgt direkt  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ , das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  steht also auf seinen Faktoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  und somit auch auf der Ebene  $E$  senkrecht.

Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem und erfüllen

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) &= \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} e_{xj} e_{yk} e_{zl} \\ &= \epsilon_{123} = 1. \end{aligned}$$

Vertauschen wir zwei der Einheitsvektoren, so erhalten wir ein Linkssystem und finden für das Vektorprodukt stattdessen  $-1$ . Das positive Vorzeichen von  $\vec{e}_x \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z)$  ist notwendiges und hinreichendes Kriterium für ein Rechtssystem.

Beschreibt  $R$  eine Drehung, so müssen  $\vec{r}_1 = R\vec{e}_x, \vec{r}_2 = R\vec{e}_y, \vec{r}_3 = R\vec{e}_z$  ebenfalls ein Rechtssystem bilden:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) &= \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} r_{1j} r_{2k} r_{3l} \\ &= \det R^T = \det R. \end{aligned}$$

D.h. eine Drehmatrix muss notwendig sowohl  $R^T R = \mathbb{1}$  als auch  $\det R = 1$  erfüllen! Dieses Kriterium ist auch hinreichend:

*Satz von Euler:* Jede orthogonale  $3 \times 3$ -Matrix  $R$  mit  $\det R = 1$  beschreibt eine Drehung. Die Drehung ist charakterisiert durch eine Achse  $\vec{n}$  mit  $|\vec{n}| = 1$  und einen Winkel  $\phi$ .

Die Drehung lässt die Drehachse unverändert:<sup>1</sup>

$$R \cdot \vec{n} = \vec{n}$$

Man definiert den Drehvektor

$$\vec{\phi} = \phi \vec{n} \tag{127}$$

$\nearrow \quad \uparrow$   
 Winkel    Achse

Die zugehörige Matrix  $R(\vec{\phi})$  hat das  $(j, k)$ -Element

$$\begin{aligned} [R(\vec{\phi})]_{jk} &= \delta_{jk} \cos \phi + \frac{\phi_j \phi_k}{\phi^2} (1 - \cos \phi) \\ &+ \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \frac{\phi_l}{\phi} \sin \phi \end{aligned} \tag{128}$$

mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{129}$$

also

$$\mathbb{1} = (\delta_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gl. (128) in Matrix-Form:

$$R(\vec{\phi}) = \mathbb{1} \cos \phi + \vec{n} \vec{n}^T (1 - \cos \phi) + (\vec{n} \cdot \vec{\omega}) \sin \phi \tag{130}$$

---

<sup>1</sup>Erfüllt ein Vektor  $\vec{a}$  die Gleichung  $M \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a}$  mit einem  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so heißt  $\vec{a}$  Eigenvektor der Matrix  $M$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

mit

$$(\vec{n} \vec{n}^T)_{jk} = \left( \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} (n_1, n_2, n_2) \right)_{jk} = n_j n_k$$

und

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega^{(1)} \\ \omega^{(2)} \\ \omega^{(3)} \end{pmatrix}$$

mit

$$\omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (131a)$$

$$\omega^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also } \omega_{kl}^{(j)} = \epsilon_{jkl} \quad (131b)$$

Folglich:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\omega} &= n_1 \omega^{(1)} + n_2 \omega^{(2)} + n_3 \omega^{(3)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (132a)$$

$$\text{Komponenten: } [\vec{n} \cdot \vec{\omega}]_{kl} = \sum_{j=1}^3 n_j \epsilon_{jkl}. \quad (132b)$$

Als Check überprüfen wir, dass die Achse  $\vec{n}$  tatsächlich  $R\vec{n} = \vec{n}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} R(\vec{\phi}) \vec{n} &= \vec{n} \cos \phi + \underbrace{\vec{n} \vec{n}^T \vec{n}}_{=1} (1 - \cos \phi) + \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\omega})}_{= \sum_{j=1}^3 n_j \epsilon_{jkl}} \vec{n} \sin \phi \\ &= \vec{n} - (\vec{n} \times \vec{n}) \sin \phi = \vec{n}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aus Gl. (130) findet man für Drehungen um dieselbe Achse:

$$R(\phi_1 \vec{n}) R(\phi_2 \vec{n}) = R((\phi_1 + \phi_2) \vec{n})$$

Die Spur einer  $n \times n$ -Matrix  $M = (m_{jk})$  ist

$$\begin{aligned} \text{tr } M &:= \text{Sp } M := \sum_{j=1}^n m_{jj} & (133) \\ \uparrow & \\ \text{trace} & \end{aligned}$$

Rechenregeln für Spuren:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$$

$$\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\text{tr } \mathbb{1}_{n \times n} = n$$

↙  
 $n \times n$ -Einheitsmatrix

$$\text{tr}(AB) = \sum_{j,k=1}^n A_{jk} B_{kj} = \text{tr}(BA) \quad \text{Zyklizität}$$

Also:

$$\begin{aligned} \text{tr } R(\vec{\phi}) &= \underbrace{\text{tr } \mathbb{1}_{3 \times 3}}_{= 3} \cos \phi + \underbrace{\text{tr}(\vec{n} \vec{n}^T)}_{\sum_{j=1}^3 n_j n_j = \vec{n}^2 = 1} (1 - \cos \phi) + \underbrace{\text{tr}(\vec{n} \cdot \vec{\omega})}_{= 0} \sin \phi \\ \text{tr } R(\vec{\phi}) &= 1 + 2 \cos \phi & (134) \end{aligned}$$

D.h. den Betrag des Winkels  $\phi$  bestimmt man leicht aus der Spur der Drehmatrix!

Zur Bestimmung der Achse  $\vec{n} = \frac{\vec{\phi}}{\phi}$  von

$$R(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

ist folgende Identität nützlich:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkl} \epsilon_{jkm} &= \epsilon_{12l} \epsilon_{12m} + \epsilon_{21l} \epsilon_{21m} + \epsilon_{13l} \epsilon_{13m} + \epsilon_{31l} \epsilon_{31m} \\ &\quad + \epsilon_{23l} \epsilon_{23m} + \epsilon_{32l} \epsilon_{32m} \\ &= 2 \delta_{lm}, & (135) \end{aligned}$$

die man durch Einsetzen von  $l, m = 1, 2, 3$  überprüft. Aus Gl. (128) finden wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkm} [R(\vec{\phi})]_{jk} &= \underbrace{\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkm} \delta_{jk}}_{=0} \cos \phi + \underbrace{\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkm} n_j n_k}_{=0} (1 - \cos \phi) \\
&+ \underbrace{\sum_{l=1}^3 \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkl} \epsilon_{jkm} n_l}_{\stackrel{(135)}{=} 2\delta_{lm}} \sin \phi \\
&= 2 n_m \sin \phi = 2 \frac{\phi_m}{\phi} \sin \phi \tag{136a}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{\phi}}{\phi} = \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \sin \phi} \begin{pmatrix} r_{23} - r_{32} \\ r_{31} - r_{13} \\ r_{12} - r_{21} \end{pmatrix} \tag{136b}$$

An Gl. (136b) erkennt man, dass man mit  $(\vec{n}, \phi)$  als zweite Lösung  $(-\vec{n}, -\phi)$  erhält, die Orientierung von  $\vec{n}$  kann z.B. immer so gewählt werden, dass  $\phi \geq 0$  ist. Für  $\phi = 0$  ist  $R(\vec{\phi}) = \mathbb{1}$  und die Drehachse unbestimmt. Für  $\phi = \pi$  ist  $\cos \phi = -1$  und mit Gl. (130):

$$R(\pi \vec{n}) = \begin{pmatrix} -1 + 2n_1^2 & 2n_1 n_2 & 2n_1 n_3 \\ 2n_1 n_2 & -1 + 2n_2^2 & 2n_2 n_3 \\ 2n_1 n_3 & 2n_2 n_3 & -1 + 2n_3^2 \end{pmatrix} \tag{137}$$

D.h.

$$n_j = \pm \sqrt{\frac{R_{jj} + 1}{2}} \tag{138}$$

und die korrekten Vorzeichen bestimmt man aus denen der Nebendiagonalelemente von Gl. (137).

Bisher betrachtet: Passive Drehung = Drehung des Koordinatensystems

Alternativ: Aktive Drehung = Drehung eines Vektors bei festem Koordinatensystem

Die aktive Drehung wird durch  $R(-\vec{\phi})$  beschrieben!

Drehung eines beliebigen Vektors  $\vec{a}$ :

$$R(\vec{\phi}) \vec{a} = \vec{a} \cos \phi + (\vec{n} \cdot \vec{a}) \vec{n} (1 - \cos \phi) + (\vec{n} \cdot \vec{\omega}) \vec{a} \sin \phi,$$

wobei

$$\begin{aligned} [(\vec{n} \cdot \vec{\omega}) \vec{a}]_k &= \sum_{j,l=1}^3 n_j \epsilon_{jkl} a_l \\ &= - \sum_{j,l=1}^3 \epsilon_{kjl} n_j a_l = - [\vec{n} \times \vec{a}]_k, \end{aligned} \quad (139)$$

also

$$\begin{aligned} R(\vec{\phi}) \vec{a} &= \vec{a} \cos \phi + (\vec{n} \cdot \vec{a}) \vec{n} (1 - \cos \phi) \\ &\quad - \vec{n} \times \vec{a} \sin \phi \end{aligned} \quad (140)$$

Den letzten Term kann man so bestimmen

$$\left( R(\vec{\phi}) - R(\vec{\phi})^T \right) \vec{a} = \left( R(\vec{\phi}) - R(-\vec{\phi}) \right) \vec{a} = -2 \vec{n} \times \vec{a} \sin \phi \quad (141)$$

**Taylor-Entwicklung:** Eine Funktion  $f(x)$  sei bei  $x = x_0$  beliebig oft differenzierbar.

$$T_n[f, x_0](x) := \sum_{j=0}^n \frac{(x - x_0)^j}{j!} \frac{d^j f}{dx^j}(x_0) \quad (142)$$

ist das Taylor-Polynom  $n$ -ten Grades von  $f$  bei  $x_0$ . Es hat die Eigenschaft:

$$\frac{d^j T_n[f, x_0](x_0)}{dx^j} := \frac{d^j f}{dx^j}(x_0) \quad \text{für } 0 \leq j \leq n.$$

Taylor-Reihe:

$$T_\infty[f, x_0](x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^j}{j!} \frac{d^j f}{dx^j}(x_0).$$

Konvergiert die Taylor-Reihe in einer Umgebung von  $x_0$  gegen  $x$ , so nennt man  $f$  bei  $x_0$  analytisch und schreibt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^j}{j!} \frac{d^j f}{dx^j}(x_0). \quad (143)$$

Die wichtigste Taylor-Reihe der Physik ist

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}, \quad (144)$$

die für alle  $x \in \mathbb{C}$  konvergiert!

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^j + (-ix)^j}{2j!} \quad \text{Nur gerade } j \text{ tragen bei.} \\ &\stackrel{j=2k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned} \quad (145)$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (146)$$

In Gl. (144) kann man auch  $n \times n$ -Matrizen  $M$  einsetzen:

$$e^M = \exp M = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j}{j!} = \mathbb{1} + M + \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{3!} + \dots, \quad (147)$$

die für alle  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  konvergiert! Achtung: I.A. ist  $e^A e^B \neq e^{A+B}$ .

Ohne Beweis:

$$R(\vec{\phi}) = e^{\vec{\phi} \cdot \vec{\omega}} = e^{\phi \sum_{j=1}^3 n_j \omega^{(j)}} \quad (148)$$

mit  $\vec{\phi} = \phi \vec{n}$  und  $\omega^{(j)}$  aus Gl. (131).

Gilt  $S^T S = \mathbb{1}$  mit  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und  $\det S = -1$ , so beschreibt  $S$  eine Drehspiegelung

$$S = PR \quad (149)$$

mit einer Drehmatrix  $R$  und

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (150)$$

Die Punktspiegelung

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = Px = -\vec{x} \quad (151)$$

heißt auch Paritätstransformation.

Linksschraube  $\xrightarrow{P}$  Rechtsschraube

$P$  ist zwar eine Symmetrie der Gesetze der Mechanik, aber nicht aller Naturgesetze!

Flugrichtung

↑ Neutrino  $\nu$  (als masselos betrachtet)

Spinvektor (Spin ist eine Art Drehimpuls.)