

Einführung in die Theoretische Physik (Theorie A)

Gudrun Heinrich

KIT, Institut für Theoretische Physik (ITP)

Wintersemester 2024/25

Version vom 9. Februar 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen und Geschichte	4
1.1	Allgemeine Bemerkungen zur theoretischen Physik	4
1.2	Kurze Geschichte der klassischen Mechanik	4
2	Kinematik eines Massenpunktes	6
2.1	Massenpunkte und Ortsvektoren	6
2.1.1	Vektoren	6
2.1.2	Differentialrechnung	11
2.2	Bahnkurven, Geschwindigkeit und Beschleunigung	14
2.3	Koordinatensysteme	22
2.3.1	Matrizen und Determinanten	22
2.3.2	Drehungen	24
2.3.3	Taylor-Entwicklung	29
2.3.4	Die wichtigsten Koordinatensysteme	32
2.3.5	Koordinatentransformationen	36
3	Dynamik eines Massenpunktes	38
3.1	Die Newtonschen Axiome	38
3.2	Beispiele	40
3.2.1	Freier Fall	40
3.2.2	Zentralkräfte	41
3.2.3	Lorentzkraft	41
3.3	Gewöhnliche Differentialgleichungen	42
3.4	Inertialsysteme und Galilei-Transformation	46

4	Beschleunigte Bezugssysteme	47
4.1	Allgemeine Betrachtung von Scheinkräften	47
4.2	Die Zentrifugalkraft	52
4.3	Die Corioliskraft	52
5	Erhaltungssätze	53
5.1	Mathematischer Einschub: Vektoralgebra	55
5.1.1	Der Gradient	55
5.1.2	Die Divergenz	57
5.1.3	Die Rotation	57
5.2	Impuls- und Drehimpulserhaltung	59
5.3	Energiebilanz	60
5.3.1	Konservative Kraftfelder	62
5.3.2	Nichtkonservative (dissipative) Kräfte	67
5.3.3	Energieerhaltung	68
6	Schwingungen und harmonischer Oszillator	69
6.1	Harmonischer Oszillator	69
6.1.1	Mathematischer Einschub: Komplexe Zahlen	71
6.1.2	Freier linearer harmonischer Oszillator	74
6.1.3	Harmonischer Oszillator mit Reibung	75
6.2	Erzwungene Schwingungen	79
6.2.1	Harmonische Anregung	79
6.2.2	Beliebige Anregung	82
6.2.3	Kraftstoß, Greensche Funktionen	87
7	Zweiteilchensysteme (Zentralkraft)	89
7.1	Zentralkräfte	90
7.2	Schwerpunkts- und Relativkoordinaten	90
7.3	Die Keplerschen Gesetze	93

Literatur (Auswahl)

- W. Nolting,
Grundkurs Theoretische Physik 1, Klassische Mechanik, Springer Verlag.
- H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko, *Klassische Mechanik*, Wiley Verlag.
- F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley Verlag.
- J. Honerkamp, H. Römer,
Grundlagen der Klassischen Theoretischen Physik, Springer Verlag.
- Walter Greiner,
Theoretische Physik, Band 1: Mechanik I, Verlag Harri Deutsch.
- T. Fließbach,
Mechanik, Spektrum Verlag.
- S. Grossmann,
Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Springer Verlag.
- C. B. Lang, N. Pucker
Mathematische Methoden in der Physik, Springer Verlag.

Dieses Skript orientiert sich vor allem am Buch von W. Nolting, ausserdem an Skripten von C. Rockstuhl, M. Mühlleitner, U. Schwarz, M. Steinhauser und eigenen Notizen.

1 Vorbemerkungen und Geschichte

1.1 Allgemeine Bemerkungen zur theoretischen Physik

Die theoretische Physik beschäftigt sich mit der Entwicklung und Verfeinerung von Theorien und mathematischen Modellen zur Erklärung von Phänomenen der unbelebten Natur. Die Physik ist grundsätzlich immer ein Wechselspiel zwischen theoretischer und experimenteller Physik. In der Experimentalphysik werden Experimente durchgeführt und Beobachtungen gemacht, um empirische Daten zu sammeln und zu analysieren. Die theoretische Physik konzentriert sich vermehrt darauf, die Beobachtungen in ein schlüssiges mathematisches Gebäude einzubetten und dadurch allgemeine Prinzipien und Gesetze der Natur zu eruieren. Die Mathematik ist dabei ein sehr wichtiges Werkzeug. Aus der Forderung nach mathematischer Schlüssigkeit einer Theorie lassen sich auch Vorhersagen treffen. Theoretische Physiker:innen können somit Modelle erstellen, die beschreiben, wie verschiedene Aspekte des Universums funktionieren, vom Verhalten subatomarer Teilchen bis zur Dynamik von Galaxien. Diese Modelle wiederum müssen experimentell überprüft werden.

1.2 Kurze Geschichte der klassischen Mechanik

Die klassische Mechanik beschäftigt sich mit der Bewegung von Objekten und den Kräften, welche auf diese wirken. Sie ist einer der ältesten Zweige der Physik. Um Bewegung zu beschreiben, benötigen wir auch mathematische Modelle von Raum und Zeit. Die Zeit wird durch die Menge geordneter “Zeitpunkte” in der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} beschrieben. In der klassischen Physik lässt sich jedem Ereignis ein eindeutiger Zeitpunkt in \mathbb{R} zuordnen. Der Raum ist der sogenannte Euklidische Raum. Wir werden noch darauf zurückkommen.

In Mitteleuropa begann die systematische Beschreibung von Bewegung im Raum mit Aristoteles im 4. Jahrhundert v.Chr. Während des Mittelalters waren es vor allem Gelehrte in der arabischen Welt, welche sich mit Mathematik und Naturwissenschaften beschäftigten. In der Renaissance kam es dann zu Einsichten und Entwicklungen von Konzepten, welche die Grundlage der klassischen theoretischen Physik bilden (das Wort “klassisch” wird hier als Abgrenzung zu “quantentheoretisch” verwendet).

Die grossen Pioniere waren hierbei:

- Nikolaus Copernicus (1473–1543): Vor allem bekannt für sein heliozentrisches Modell. Sehr wichtig war auch die Begründung der Methode, aus Beobachtungen und Berechnungen Gesetze über die Bewegung der Planeten herzuleiten.
- Galileo Galilei (1564–1642): Galileo wird oft als “Vater der theoretischen Physik“ bezeichnet. Neben seinem bekannten Beitrag zur Etablierung des heliozentrischen Weltbildes lieferte er noch viele andere wichtige Beiträge zur theoretischen Physik. Er widerlegte z.B. Aristoteles‘ Vorstellungen über fallende Objekte (schwere würden schneller fallen als leichte) und zeigte, dass Objekte unabhängig von ihrer Masse mit der gleichen Geschwindigkeit fallen, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Er entwickelte auch das Konzept der Trägheit und legte damit den Grundstein für Newtons erstes Bewegungsgesetz.
- Johannes Kepler (1571-1630): stellte die Gesetze der Planetenbewegungen auf, lieferte zudem wichtige Beiträge zur Optik.
- Christiaan Huygens (1629-1695): wichtige Beiträge zur Beschreibung Wellenbewegung, Streuung und Optik.
- Isaac Newton (1642–1727): Newton entwickelte die Arbeit seiner Vorgänger weiter und fasste sie in seinem bahnbrechenden Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) zu einer Gesamtschau zusammen. Er formulierte die drei Bewegungsgesetze und das Gesetz der universalen Gravitation, die zur Grundlage der klassischen Mechanik wurden.
- Weitere Pioniere der klassischen Mechanik:
Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, William Rowan Hamilton, Emmy Noether: systematischer Formalismus, allgemeine Bewegungsgleichungen, Bedeutung von Symmetrien (wird behandelt in Theorie B im Sommersemester).

2 Kinematik eines Massenpunktes

2.1 Massenpunkte und Ortsvektoren

Die **Kinematik** beschreibt die Bewegung von Objekten, die wir zunächst als punktförmig annehmen. Dazu benötigt man Ortskoordinaten und deren Zeitabhängigkeit.

Die **Dynamik** beschäftigt sich mit der Berechnung von Bewegungen aufgrund von Kräften.

Wir betrachten zunächst die Kinematik von Massenpunkten und die zur Beschreibung notwendigen mathematischen Grundlagen.

2.1.1 Vektoren

Als **Vektoren** im Raum \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) bezeichnen wir n -Tupel $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in \mathbb{R}$. Vektoren (z.B. Ort, Geschwindigkeit) haben im Gegensatz zu **Skalaren** (z.B. Masse, Temperatur) eine Richtung. Wir werden für Vektoren sowohl die Schreibweise \vec{a} als auch die Schreibweise \mathbf{a} verwenden.

Punkte in einem physikalischen Raum (z.B. Ortsraum, Impulsraum) können durch Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben werden:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} .$$

Damit dies Sinn macht, brauchen wir ein Koordinatensystem. In der klas-

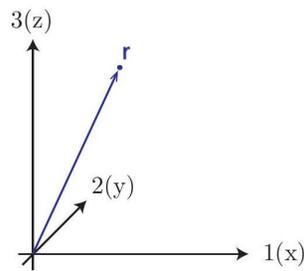


Abbildung 1: Beispiel Ortsvektor \mathbf{r} eines Massenpunktes

sischen Mechanik ist dies (im Unterschied zur Relativitätstheorie) ein kartesisches Koordinatensystem, gebildet aus drei orthogonalen Achsen (x-, y-

und z-Richtung), die sich in einem gemeinsamen Punkt, dem Koordinatenursprung, schneiden (siehe Abb. 1). Die Richtungen der drei Achsen werden durch Einheitsvektoren definiert, die senkrecht aufeinander stehen. Diese Einheitsvektoren bilden dann eine **Orthonormalbasis**:

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Damit gilt:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \quad (2)$$

und a_x, a_y, a_z sind die Koordinaten von \mathbf{a} bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Analog, mit Indizes 1,2,3 anstatt x, y, z :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$$

Statt $\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$ wird auch oft $a_i \mathbf{e}_i$ geschrieben, d.h. das Summenzeichen wird weggelassen. Dies ist die Einstein'sche Summenkonvention: über doppelt vorkommende Indizes wird summiert.

Die Koordinaten hängen von der Basis ab. Wenn zwei Koordinatensysteme mit Ursprung O bzw. O' gegeben sind durch $K = \{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ und $K' = \{O', \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$, so ändern sich auch die entsprechenden Werte a'_x, a'_y, a'_z in K' . Die Betrachtung eines Massenpunktes erfolgt immer in einem Bezugssystem (hier: kartesisches Koordinatensystem). Raum und Zeit haben in der Klassischen Mechanik keine eigenständige Bedeutung. Dies ändert sich allerdings in der Relativitätstheorie.

Rechenregeln mit Vektoren

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = \sum_{i=1}^3 a_i b_i. \quad (3)$$

Für Vektoren $\in \mathbb{R}^n$ gilt analog

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (4)$$

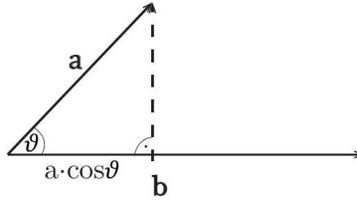


Abbildung 2: Veranschaulichung des Skalarproduktes

Das Skalarprodukt ist distributiv: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
 Der Betrag (die Länge) eines Vektors ist gegeben durch

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^2} \equiv a . \quad (5)$$

Der Winkel θ zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} ist gegeben durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta . \quad (6)$$

Es gilt also $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ falls $\theta = \pi/2$ oder $a = 0$ oder $b = 0$. Das Skalarprodukt ist also ein Mass für die Grösse der Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor.

Die Grösse $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ist ein **Skalar** und deshalb unabhängig vom Koordinatensystem.

Für die oben eingeführten Einheitsvektoren gilt offensichtlich

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} =: \delta_{ij} . \quad (7)$$

Das Objekt δ_{ij} wird auch **Kronecker-delta** genannt.

Vektorprodukt

Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt oder äusseres Produkt genannt) zweier Vektoren ist definiert durch

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (8)$$

Damit ist der Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ senkrecht zu \mathbf{a} und senkrecht zu \mathbf{b} , siehe Abb. 3. Es gilt ausserdem

$$|\mathbf{c}| = c = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \theta = a b \sin \theta .$$

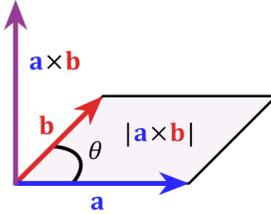


Abbildung 3: Darstellung des Vektorproduktes.

Der Betrag c entspricht dem Flächeninhalt des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms (Abb. 4).

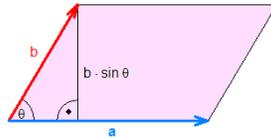


Abbildung 4: Darstellung der Fläche des Vektorproduktes

Der Vektor \mathbf{c} steht senkrecht auf \mathbf{a} und \mathbf{b} und zwar so, dass $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ein rechtshändig orientiertes Dreibein bilden. Physikalisches Beispiel:

Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot m$.

Zwei endliche Vektoren mit verschwindendem Vektorprodukt sind parallel oder anti-parallel, denn:

$$a \neq 0, b \neq 0, \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

Das Vektorprodukt ist **nicht** kommutativ (im Gegensatz zum Skalarprodukt), es gilt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Das Vektorprodukt ist distributiv (wie das Skalarprodukt):

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Das Vektorprodukt ist **nicht** assoziativ: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

In Index-Schreibweise gilt

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (9)$$

Dabei ist ϵ_{ijk} (auch Levi-Civita-Symbol genannt) definiert durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{wenn 2 Indices gleich sind} \\ 1 & \text{für } i, j, k \text{ gerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{für } i, j, k \text{ ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \end{cases} \quad (10)$$

Vektoren können addiert, subtrahiert und mit Skalaren multipliziert werden.

Addition

Die Vektoraddition ist kommutativ, d.h. es gilt: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
Geometrisch betrachtet ergibt sich diese Eigenschaft aus der Parallelogrammregel. Algebraisch zeigt man dies komponentenweise.

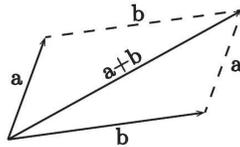


Abbildung 5: Addition von Vektoren

Die Vektoraddition ist assoziativ, d.h. es gilt: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

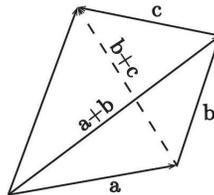


Abbildung 6: Assoziativität der Addition von Vektoren

Subtraktion

Subtraktion eines Vektors \mathbf{b} bedeutet Addition mit $-\mathbf{b}$, d.h.:
 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Multiplikation

Wie oben beschrieben, können zwischen Vektoren verschiedene Arten von Multiplikationen definiert werden:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ inneres oder Skalarprodukt,
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ äußeres, Kreuz- oder Vektorprodukt.

Ausserdem gibt es noch ein Tensorprodukt $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, dies wird jedoch vorerst nicht benötigt.

Vektoren können also addiert und/oder mit Skalaren (Zahlen) multipliziert werden, das Ergebnis ist wieder ein Vektor, die Menge der Vektoren ist also geschlossen unter diesen Operationen. Eine Menge von Elementen, die diese Eigenschaften erfüllen, nennt man **Vektorraum** oder **linearen Raum**.

Lineare Unabhängigkeit und Orthonormalsystem

Wenn zwei Vektoren parallel oder antiparallel (Oberbegriff: kollinear) sind, dann gibt es reelle Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$, so dass $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0$. Dies bedeutet, \mathbf{a} und \mathbf{b} sind linear abhängig. Allgemein gilt:

Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ sind **linear unabhängig**, falls die Gleichung $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i = 0$ nur durch $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ erfüllt werden kann.

Andernfalls nennt man sie linear abhängig.

Die Dimension eines Vektorraums ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren und höchstens so groß wie die Dimension n für Vektoren aus \mathbb{R}^n . In einem n -dimensionalen Vektorraum bildet jede Menge von n linear unabhängigen Vektoren eine Basis, d.h. jeder beliebige Vektor kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden. Normalerweise konstruiert man dafür ein Orthonormalsystem (ONS): $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Der gleiche Vektor kann in verschiedenen ONS dargestellt werden:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{\mathbf{e}}_i$$

Dies entspricht einem Basiswechsel.

2.1.2 Differentialrechnung

Hier fassen wir Grundlagen der Differentialrechnung zusammen, welche dann zur Berechnung von Bahnkurven und Bewegungsgleichungen benötigt werden.

Differentiation

Wir betrachten eine reelle Funktion im eindimensionalen Raum als Funktion des Ortes x . Diese bildet die Ortskoordinate x auf einen Funktionswert $f(x)$

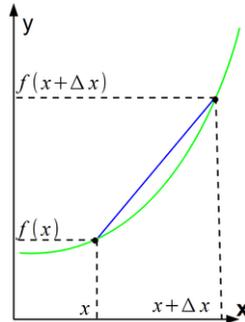


Abbildung 7: Differentialquotient einer Kurve.

ab,

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R} . \quad (11)$$

Die Ableitung der Funktion $f(x)$ beschreibt die Änderung der Funktion in einem infinitesimal kleinen Intervall Δx , also

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (12)$$

Geometrisch entspricht dies der Steigung am Punkt x . Die entsprechende Gerade ist die lineare Näherung für die Kurve, siehe Abb. 7.

Die Ableitung nach der Zeit wird oft mit einem Punkt bezeichnet:

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) \quad (13)$$

Es gelten folgende Regeln:

$$\text{Produktregel: } \frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) , \quad (14)$$

$$\text{Kettenregel: } \frac{d}{dx} (f(g(x))) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx} . \quad (15)$$

Beispiel für Kettenregel: $f(z) = 1/z \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} .$

Integration

Integration kann man sich als Berechnung der Fläche unter einer Kurve vorstellen. Wenn $f(x)$ gegeben ist, dann ist die Stammfunktion $F(x)$ gesucht,

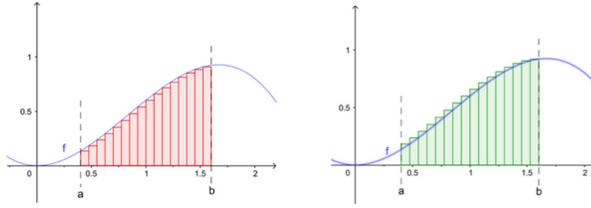


Abbildung 8: Näherungsweise Berechnung eines Integrals durch Diskretisierung. Links: Untersumme, rechts: Obersumme.

für die gilt

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \text{ also } \int^x dz f(z) = F(x). \quad (16)$$

Das Integral kann als Grenzwert einer Diskretisierung betrachtet werden. Unter- und Obersumme (dargestellt in Abb. 8) konvergieren gegen den Wert des Integrals (Stetigkeit der Funktion $f(x)$ vorausgesetzt).

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

Beispiele: $f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$, $f(x) = e^{ax} \Rightarrow F(x) = 1/a e^{ax}$.

Bestimmte Integration:

$$\int_a^b dz f(z) = F(b) - F(a) \quad (17)$$

Partielle Integration:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx f(x) g'(x) = \left[f(x) g(x) \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} dx f'(x) g(x) \quad (18)$$

Beispiel: $\int_a^b dx x e^x = \left[x e^x \right]_a^b - \int_a^b dx 1 \cdot e^x$.

Substitutionsregel:

$$\int_{g_1}^{g_2} dg f(g) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(g(x)) g'(x), \quad g_1 = g(x_1), g_2 = g(x_2). \quad (19)$$

Beispiel:

$$\int_a^b dx \frac{x}{x^2 + 1} \stackrel{y=x^2+1}{=} \int_{1+a^2}^{1+b^2} dy \frac{1}{2y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}.$$

2.2 Bahnkurven, Geschwindigkeit und Beschleunigung

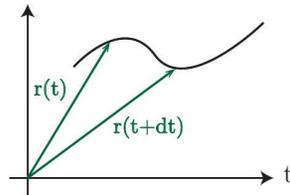
Wir betrachten die Bewegung von Massepunkten unter Vernachlässigung der räumlichen Ausdehnung. Ein Beispiel ist die Bewegung der Erde um die Sonne, bei der die Erde als Massepunkt betrachtet wird, in welchem die gesamte Masse der Erde konzentriert ist. Jegliche andere Dynamik, z.B. die Rotation der Erde um sich selbst, wird dabei vernachlässigt.

Die Position des Massepunktes wird durch den Ortsvektor \mathbf{r} beschrieben:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (20)$$

Bewegt sich der Massepunkt in Raum und Zeit, so bildet die zeitliche Abfolge seiner Aufenthaltspunkte eine Bahnkurve. Diese wird auch als **Trajektorie** bezeichnet. Der Ortsvektor wird damit eine Funktion der Zeit t .

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z \quad (21)$$



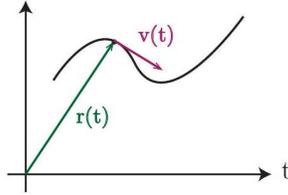
Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ eines Massepunktes ist definiert als die differentielle zeitliche Änderung des Ortes des Massepunktes, der **Geschwindigkeitsvektor** ergibt sich also aus der Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$$

Das Konzept der Ableitung als Grenzwert des Differentialquotienten kann auch auf vektorwertige Funktionen angewendet werden:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Die Ableitung erfolgt komponentenweise. Geometrisch handelt es sich um einen Tangentialvektor an die Bahnkurve.



Auch vom Geschwindigkeitsvektor kann eine Ableitung gebildet werden, diese liefert den **Beschleunigungsvektor** $\mathbf{a}(t)$.

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) .$$

Für einen Massenpunkt haben wir also:

1. Ortsvektor:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t)\mathbf{e}_i$$

2. Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t)\mathbf{e}_i$$

3. Beschleunigungsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t)\mathbf{e}_i .$$

Um den Beschleunigungsvektor (komponentenweise) integrieren zu können, benötigen wir noch Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{v}(t_0) = \text{const.} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r}(t_0) = \text{const.} = \mathbf{r}_0$$

Gegeben: $\mathbf{a}(t) \Rightarrow$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t dt'' \mathbf{a}(t'') , \quad (22)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \left[\int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{a}(t'') \right] . \quad (23)$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann durch Ableitung überprüft werden:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t dt'' \mathbf{a}(t'') \quad (24)$$

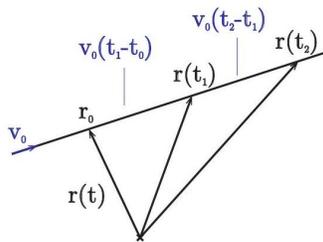
$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) \quad (25)$$

Check der Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 .$$

Beispiel geradlinige gleichförmige Bewegung

Geradlinig: in Richtung von \mathbf{v}_0 , gleichförmig: in gleichen Intervallen werden gleiche Strecken zurückgelegt.



Verschwindende Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) \quad (26)$$

Ein Beispiel wäre ein Raumschiff fern von massereichen Objekten.

Beispiel konstante Beschleunigung

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 (t - t_0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \mathbf{a}_0 (t' - t_0)$$

$$= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) + \mathbf{a}_0 \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t_0^2 - (t - t_0) t_0 \right)$$

$$= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 (t - t_0)^2$$

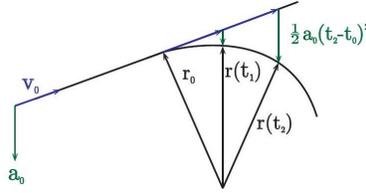


Abbildung 9: Wurfparabel bei gleichmässig beschleunigter Bewegung (Beschleunigung zeigt nach unten).

Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist die Überlagerung einer geradlinig gleichförmigen Bewegung mit \mathbf{v}_0 und einer geradlinig beschleunigten Bewegung mit \mathbf{a}_0 . Beispiel: Bahn eines Tennisballs.

Ein Spezialfall ist der freie Fall:

$$\mathbf{v}_0 = 0, \mathbf{a}_0 = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t_0 = 0$$

\Rightarrow Fallstrecke $s = |\mathbf{x}_3(t)| = \frac{1}{2}gt^2$, Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Beispiele für Raumkurven:

Unter einer Raumkurve versteht man die Menge aller Punkte $\{\mathbf{r}(t) | t_1 \leq t \leq t_2\}$.

Kreisbewegung in der $x - y$ Ebene

Die Funktion

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\varphi = \omega t}{=} \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine mögliche Parametrisierung der Kreisbewegung. Der Umlauf eines Kreises beträgt 2π und es gilt:

$$2\pi = \omega T \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (27)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = R\omega \quad (28)$$

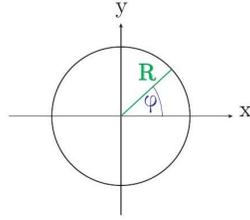


Abbildung 10: Raumkurve einer Kreisbewegung

Schraubenlinie

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ bt \end{pmatrix}$$

Dabei ist b die Geschwindigkeit in z -Richtung, $z_0 = b \frac{2\pi}{\omega}$.

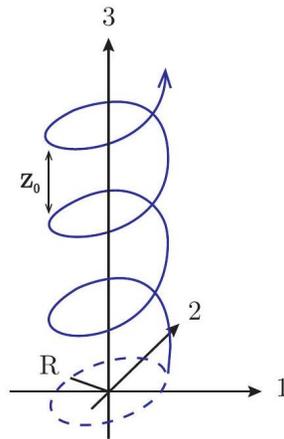


Abbildung 11: Raumkurve einer Schraubenlinie

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2} > R\omega$$

Bogenlänge

Die Bogenlänge ist die Länge L einer Raumkurve, gemessen an der gekrümmten Kurve. Sie sollte auf jeden Fall unabhängig von der gewählten Parame-

trisierung sein. Wir zerlegen das Intervall $[t_0, t_n]$ in n Teilintervalle der Länge $\Delta t = \frac{t_n - t_0}{n} \Rightarrow t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$. Verbinden wir die entsprechenden Ortsvektoren $\mathbf{r}(t_i)$, so ergibt sich ein Polygonzug:

$$L_n = \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \Delta t \left| \frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{\Delta t} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_n} dt \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|$$

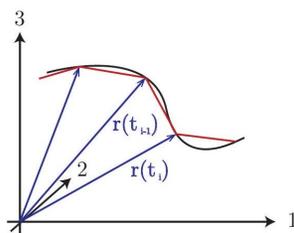


Abbildung 12: Approximation einer Raumkurve

Bogenlänge als Funktion der Zeit:

$$s(t) = \int_{t_0}^t dt' \left| \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} \right| \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| > 0 .$$

Die Bogenlänge wächst also monoton bei Bewegung \Rightarrow Umkehr ist eindeutig, $t = t(s)$. Dadurch erhalten wir die Parametrisierung der Raumkurve nach der Bogenlänge s : $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$. Diese Parametrisierung bezeichnet man als die **natürliche Parametrisierung** der Raumkurve. Für diese gilt immer

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right| = 1 .$$

Beispiel 1: Kreisbewegung

$$v = R \cdot \omega = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = R\omega t \Rightarrow t = \frac{s}{R\omega} \quad (29)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(s) = R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Ein Umlauf entspricht $s = 2\pi R$, also genau dem Umfang.

Beispiel 2: Schraubenlinie

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2} = \frac{ds}{dt} = \text{const}$$
$$\Rightarrow s = v \cdot t \Rightarrow \mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} R \cos \frac{\omega s}{v} \\ R \sin \frac{\omega s}{v} \\ \frac{bs}{v} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Begleitendes Dreibein

Auch das Koordinatensystem kann auf die Bahnkurve bezogen werden: damit haben wir ein ONS, das mit dem Massenpunkt mitwandert, dieses nennt man **begleitendes Dreibein** (siehe Abb. 13), bestehend aus

$\hat{\mathbf{t}}$ Tangentialeinheitsvektor,

$\hat{\mathbf{n}}$ Normaleneinheitsvektor,

$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ Binormaleneinheitsvektor $\Rightarrow (\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}})$ sind Funktionen der Bogenlänge s .

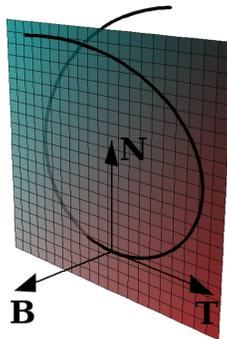


Abbildung 13: Begleitendes Dreibein

Der Vektor $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ist tangential zur Bahnkurve orientiert, deshalb ist die Definition des **Tangentialeinheitsvektors**

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{v}$$

Bei Parametrisierung durch die Bogenlänge $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$ gilt:

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \text{ist automatisch normiert.}$$

Im allgemeinen Fall ändert $\hat{\mathbf{t}}(s)$ seine Richtung:

$$\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds} \right| =: \kappa(s) \quad \text{Krümmung}, \quad \rho := \frac{1}{\kappa} \quad \text{Krümmungsradius} .$$

Der Normaleneinheitsvektor ist definiert durch

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} .$$

Die von den Vektoren $\hat{\mathbf{t}}$ und $\hat{\mathbf{n}}$ aufgespannte Ebene heisst **Schmiegungebene**, $\hat{\mathbf{b}}$ steht senkrecht auf der Schmiegungebene. Falls die Bewegung immer in einer Ebene bleibt, ist die Richtung von $\hat{\mathbf{b}}$ also konstant.

Beispiel Kreisbewegung

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\Rightarrow \kappa = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right| = \frac{1}{R}, \quad \rho = R . \quad (33)$$

Beispiel Schraubenlinie

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} -\frac{R\omega}{v} \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ \frac{R\omega}{v} \cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ \frac{b}{v} \end{pmatrix} \quad v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{R\omega^2}{v^2} \cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ -\frac{R\omega^2}{v^2} \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{R\omega^2}{v^2} = \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + b^2} = \frac{1}{R + \frac{b^2}{R\omega^2}} < \frac{1}{R} \quad (35)$$

$$\rho = R + \frac{b^2}{R\omega^2} > R \quad \text{für } b \neq 0 .$$

Die Krümmung der Schraubenlinie ist kleiner als beim Kreis (der Krümmungsradius ist größer), weil die Bahnkurve gestreckt wurde.

2.3 Koordinatensysteme

Die Verwendung eines Koordinatensystems, das der Symmetrie des Problems angepasst ist, kann eine Rechnung sehr vereinfachen. Neben den kartesischen Koordinaten sind die wichtigsten Fälle Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Für den Übergang von einem Koordinatensystem in ein anderes benötigen wir Matrizen.

2.3.1 Matrizen und Determinanten

Definition : Eine $(n \times m)$ -Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Einzelne Elemente der Matrix werden bezeichnet durch

$$(A)_{ij} = a_{ij}, \quad \text{mit } i = 1 \dots n; j = 1 \dots m$$

Spezielle Matrizen:

- Eine Matrix mit gleicher Zeilen- und Spaltenanzahl heißt quadratische Matrix.
- Eine Matrix mit nur einer Spalte, also $m = 1$, ist ein Spaltenvektor.
- Eine Matrix mit nur einer Zeile, also $n = 1$, ist ein Zeilenvektor.

Rechenregeln:

(i) Bei der Multiplikation einer Matrix mit einer skalaren Größe $\lambda \in \mathbb{R}$ wird jedes einzelne Element der Matrix mit dieser skalaren Größe multipliziert, also

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad (36)$$

(ii) Bei der Addition zweier Matrizen, die gleich groß sind, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, werden die jeweiligen Matrixelemente addiert, also

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}. \quad (37)$$

Matrizen unterschiedlicher Größe können nicht addiert werden.

(iii) Die Multiplikation zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ergibt

eine Matrix $C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Um die Einträge $(A \cdot B)_{ij}$ zu berechnen, wird der i -te Zeilenvektor von A mit dem j -ten Spaltenvektor von B multipliziert. Man berechnet also

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} b_{lj} \quad (38)$$

In Matrix-Form:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

- Für das Produkt $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt im allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$. Beispiel für nicht-Kommutativität des Matrixproduktes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

- Für den Fall, dass $A \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ (Zeilenvektor) und $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ (Spaltenvektor), ist das Matrixprodukt $A \cdot B$ eine skalare Größe und $B \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine quadratische Matrix.
- Das Produkt einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit einem Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ergibt einen Vektor der Dimension n : $A \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Die Elemente dieses Vektors berechnen sich gemäß

$$(A \cdot \vec{b})_i = \sum_{l=1}^m a_{il} b_l.$$

Determinante

Die Determinante ordnet einer quadratischen Matrix einen Skalar zu.

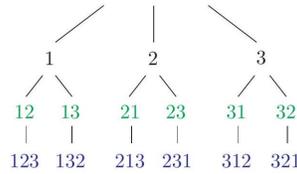


Abbildung 14: Für $n = 3$ gibt es $3! = 6$ Permutationen.

$$\text{Sei } A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\text{Permutation } p} \text{sign}(p) a_{1p(1)} \cdots a_{np(n)} \quad (40)$$

Von einer Menge $\{1, \dots, n\}$ gibt es $n!$ Permutationen. Für eine Matrix mit $n = 2$ ergibt sich:

$$\det A = \text{sign}(12)a_{11}a_{22} + \text{sign}(21)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Für eine Matrix mit $n = 3$ ergibt sich:

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) .$$

2.3.2 Drehungen

Eine konkrete Anwendung von Matrizen ist der Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen. Wir betrachten hierfür die Drehung eines Koordinatensystems, in dem ein Massepunkt durch den Ortsvektor \vec{r}_P beschrieben wird. Seine Ortskoordinaten sollen in den zwei verschiedenen Koordinatensystemen ausgedrückt werden. Wir betrachten zuerst den 2-dimensionalen, dann den 3-dimensionalen Fall.

Drehung in der Ebene

Im ungedrehten Koordinatensystem wird die Position von P beschrieben durch

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

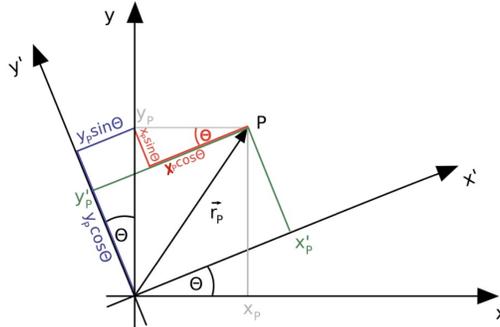


Abbildung 15: Drehung in der x - y Ebene.

Die Koordinaten des Ortsvektors

$$\vec{r}'_P = \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix}$$

von P im gedrehten Koordinatensystem lassen sich durch die Koordinaten x_P und y_P ausdrücken. Aus Abb. 15 schliessen wir

$$\begin{aligned} x'_P &= x_P \cos \theta + y_P \sin \theta \\ y'_P &= y_P \cos \theta - x_P \sin \theta . \end{aligned} \quad (41)$$

Auflösen nach x_P und y_P liefert

$$\begin{aligned} x_P &= x'_P \cos \theta - y'_P \sin \theta \\ y_P &= y'_P \cos \theta + x'_P \sin \theta . \end{aligned} \quad (42)$$

Dargestellt durch Einheitsvektoren haben wir

$$\vec{r}_P = x_P \vec{e}_x + y_P \vec{e}_y = x'_P \underbrace{(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)}_{\vec{e}'_x} + y'_P \underbrace{(\cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x)}_{\vec{e}'_y} = x'_P \vec{e}'_x + y'_P \vec{e}'_y$$

Die neuen Koordinaten können wir kompakt als Funktion der ursprünglichen Koordinaten ausdrücken. Aus den Gleichungen. (41) und (42) lesen wir ab

$$\begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

Wir finden also

$$\vec{r}'_P = O \vec{r}_P, \quad \text{mit } O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun die Frage untersuchen, welche Eigenschaften die Matrix O haben muss, damit sie eine Drehung beschreibt:

- a) Sie muss eine quadratische Matrix sein.
- b) Die Matrixelemente sind reell.
- c) Alle Zeilen und alle Spalten müssen orthonormal zueinander sein.
- d) Für die transponierte Matrix

$$O^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

muss gelten

$$O^T O = \mathbb{1} \tag{43}$$

- e) Die Determinante einer Drehmatrix ist 1, also $\det O = 1$. Dies bedeutet, dass die Drehung eines Vektors weder eine Verlängerung noch Stauchung des Vektors verursacht, und auch nicht gespiegelt wird. Es gilt $|\vec{r}'| = |\vec{r}|$.

Matrizen mit den Eigenschaften a)-e) nennt man **orthogonale Matrizen** (mit $\det O = 1$ genau genommen *eigentliche* orthogonale Matrizen, *uneigentlich* wäre $\det O = -1$, Drehspiegelung).

Mit Glg.(43) können wir leicht beweisen, dass Längen erhalten bleiben, also

$$|\vec{r}'| = |O \vec{r}| = |\vec{r}|$$

Denn

$$|\vec{r}'|^2 = |O \vec{r}|^2 = (O \vec{r})^T (O \vec{r}) = \vec{r}^T \underbrace{O^T O}_{=\mathbb{1}} \vec{r} = |\vec{r}|^2$$

Bemerkung: Führen wir 2 Drehungen aus, zuerst um den Winkel θ und dann um den Winkel ϕ , so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta} \begin{pmatrix} x'_P \\ y'_P \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{pmatrix} x''_P \\ y''_P \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} x''_P &= x'_P \cos \phi + y'_P \sin \phi \\ &= (x_P \cos \theta + y_P \sin \theta) \cos \phi + (y_P \cos \theta - x_P \sin \theta) \sin \phi \\ &= x_P \underbrace{(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi)}_{=\cos(\theta+\phi)} + y_P \underbrace{(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)}_{=\sin(\theta+\phi)}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$y''_P = y_P \cos(\theta + \phi) - x_P \sin(\theta + \phi).$$

Drehung im 3-dimensionalen Raum

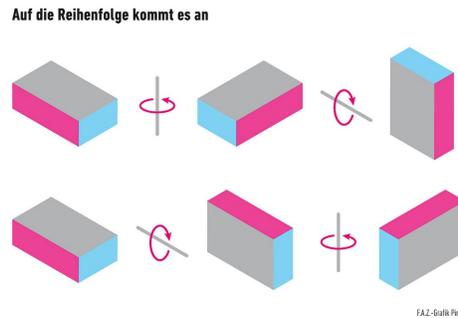


Abbildung 16: Anwendung der Drehoperationen in verschiedener Reihenfolge liefert ein anderes Ergebnis.

Die Drehung eines Koordinatensystems im dreidimensionalen Raum erhalten wir durch sukzessives Anwenden einer Drehung um jeweils eine Koordinatenachse. Dabei wird bei der zweiten und dritten Drehung um die zuvor gedrehten Koordinatenachsen gedreht (auch intrinsische Drehungen genannt). Bei extrinsischen Drehungen dreht man immer um die ursprünglichen Koordinatenachsen.

Man beachte: die Reihenfolge der Anwendung der Drehmatrizen ist wichtig. Die Drehoperationen in drei Dimensionen sind im Allgemeinen nicht vertauschbar, siehe Abb. 16.

Jede Drehung in 3 Dimensionen lässt sich durch die sogenannten **Euler-Winkel** darstellen. Die Euler-Winkel φ, θ, ψ sind definiert wie in Abb. 17. Die ursprüngliche Orthonormalbasis ist dabei durch $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ gegeben, diese wird in $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ überführt. Die $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ -Ebene und die $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -Ebene schneiden sich in einer Geraden N (Knotenlinie). Die drei Teil-Drehungen sind gegeben durch:

1. Drehung um \mathbf{n}_3 um den Winkel φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$). Die Achse \mathbf{n}_3 bleibt fest, wir nennen die zugehörige Drehmatrix $O_{ij}^3(\varphi)$, also

$$\mathbf{n}'_i = \mathbf{n}_j O_{ji}^3(\varphi) \quad \text{mit} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_1 &= \cos \varphi \mathbf{n}_1 + \sin \varphi \mathbf{n}_2, \\ \mathbf{n}'_2 &= -\sin \varphi \mathbf{n}_1 + \cos \varphi \mathbf{n}_2, \\ \mathbf{n}'_3 &= \mathbf{n}_3, \end{aligned}$$

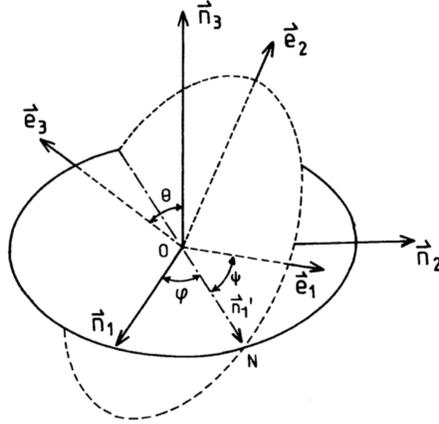


Abbildung 17: Definition der Eulerwinkel. Das ursprüngliche Koordinatensystem ist gegeben durch $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$.

also

$$O^3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

2. Drehung um \mathbf{n}'_1 um den Winkel θ ($0 < \theta < \pi$), also

$$\mathbf{n}''_k = \mathbf{n}'_r O^1_{rk}(\theta) \quad \text{mit} \quad O^1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (46)$$

3. Drehung um \mathbf{n}''_3 um den Winkel ψ ($0 \leq \psi < 2\pi$) mit der Matrix

$$O^3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{n}''_j O^3_{ji}(\psi) = \mathbf{n}'_k O^1_{kj}(\theta) O^3_{ji}(\psi) \\ &= \mathbf{n}_r O^3_{rk}(\varphi) O^1_{kj}(\theta) O^3_{ji}(\psi) \\ &= \mathbf{n}_r O_{ri}(\varphi, \theta, \psi) \end{aligned}$$

mit

$$O_{ri} = O_{rk}^3(\varphi)O_{kj}^1(\theta)O_{ji}^3(\psi), \quad (48)$$

explizit:

$$O = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Drehungen um endliche Winkel kann man als Verknüpfung infinitesimaler Drehungen verstehen. Dazu ist es wichtig, das Konzept der Taylor-Entwicklung zu kennen.

2.3.3 Taylor-Entwicklung

Eine Taylorreihe ist eine Darstellung einer analytischen Funktion in der Umgebung einer Stelle x_0 durch eine Potenzreihe. Typischerweise konvergiert die Reihe nur in einer Umgebung von x_0 (Konvergenzradius).

Vorteile der Darstellung als Potenzreihe:

1. Polynome sind einfach zu behandeln.
2. Näherung für kleine $x - x_0$: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$
3. Integration/Differentiation Term für Term möglich.

Beispiel geometrische Reihe ($x_0 = 0$):

$$S = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$. Zur Berechnung dient hier folgender Trick:

$$\begin{aligned} xS &= x + x^2 + x^3 + \dots = S - 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1-x} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \end{aligned} \quad (49)$$

die Funktion $f(x) = 1/(1-x)$ ist also für $|x| < 1$ als Potenzreihe darstellbar.

Allgemeine Form für Entwicklung um $x = x_0$ (falls als Potenzreihe darstellbar):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (50)$$

Aus obiger Form kann die Taylor-Reihe hergeleitet werden:

Wir nehmen an, dass die Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$ beliebig oft differenzierbar ist. Für die a_n gilt dann (oBdA Entwicklung um $x_0 = 0$):

$$\begin{aligned} 0. \text{ Schritt: } & f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \Rightarrow f(0) = a_0 \\ 1. \text{ Schritt: } & f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \Rightarrow f'(0) = a_1 \\ 2. \text{ Schritt: } & f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots \Rightarrow f''(0) = 2a_2 \\ & \vdots \\ n. \text{ Schritt: } & f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)! a_{n+1} x + \dots \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (51)$$

Für $x_0 \neq 0$ definiere $u = x - x_0$, $g(u) = f(x + x_0)$, entwickle $g(u)$ um $x = 0$, dann

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{Taylor-Reihe} \quad (52)$$

Beispiele

1. Geometrische Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2 \\ f'''(x) &= \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0) = 2 \cdot 3 \\ &\vdots \\ \Rightarrow f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned} \quad (53)$$

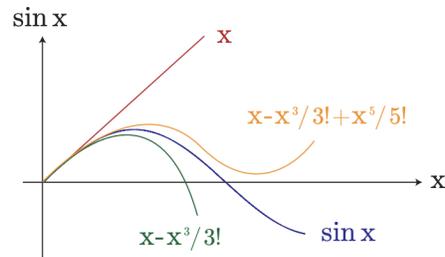


Abbildung 18: Approximation der Sinus-Funktion durch die ersten Glieder der Taylorreihe.

2. Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

⋮

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (54)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

3. Trigonometrische Funktionen (siehe auch Abb. (18))

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\text{Analog } \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \quad (55)$$

Der Logarithmus kann nicht um $x_0 = 0$ entwickelt werden, da die Funktion dort divergiert. Dagegen bietet sich $x_0 = 1$ für eine Entwicklung an.

2.3.4 Die wichtigsten Koordinatensysteme

Nun betrachten wir die Relationen zwischen gängigen Koordinatensystemen.

Kartesische Koordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Polarkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

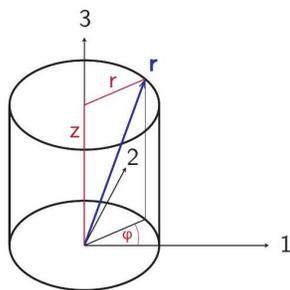


Abbildung 19: Zylinderkoordinaten

Kugelkoordinaten

Statt mit (x_1, x_2, x_3) kann ein Vektor auch mit (r, θ, φ) beschrieben werden, also mit dem Betrag von \mathbf{r} und zwei Winkeln für die Richtung. Dabei wird θ als Polarwinkel und φ als Azimutalwinkel bezeichnet.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

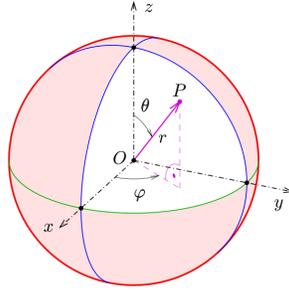


Abbildung 20: Kugelkoordinaten (Quelle: Wikipedia).

Der Einheitsvektor in Richtung von \mathbf{r} hat dann die Form:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Um die anderen Einheitsvektoren zu bestimmen, brauchen wir noch das mathematische Konzept von partiellen Ableitungen.

Mathematischer Einschub: partielle Ableitungen

Wird eine Funktion mehrerer Variablen nach jeweils einer der Variablen abgeleitet, nennt man dies *partielle Ableitung*.

Zur allgemeinen Definition betrachten wir eine Funktion f , die von mehreren Variablen $x_i, i = 1, \dots, n$, abhängt, also $f = f(x_1, \dots, x_n)$. Unter partieller Ableitung von f nach x_i versteht man die Ableitung von f nach der Variablen x_i , während alle anderen Variablen $x_j \neq x_i$ festgehalten werden. Die Notation hierfür ist $\partial f / \partial x_i$. Falls f nach x_i partiell differenzierbar ist, so ergibt sich die partielle Ableitung nach x_i aus

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Die partiellen Ableitungen sind i.a. immer noch Funktionen von x_i und können weiter differenziert werden. So erhält man höhere partielle Ableitungen, also z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

Die totale Ableitung einer Funktion von mehreren Variablen wird mit d bezeichnet, also df . Sie ist gegeben durch

$$df \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Wir betrachten als Beispiel die Funktion $f = f(x(t), y(t), z(t), t)$. Die Funktion f hängt sowohl explizit von der Zeit t ab als auch implizit über x, y, z . Die Ableitung der Funktion f nach der Zeit, df/dt , ergibt sich somit durch Anwendung der Kettenregel, da x, y, z selbst Funktionen der Zeit sind. Zudem muss die explizite Ableitung nach t gebildet werden. Somit erhalten wir

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Bei der partiellen Ableitung $\partial f/\partial t$ nach der Zeit wird nur die explizite Abhängigkeit der Funktion f von t berücksichtigt, alle anderen Variablen werden konstant gehalten. Die totale Ableitung df/dt berücksichtigt auch die indirekte Abhängigkeit von t , die z.B. dadurch zustande kommt, dass längs der Bahnbewegung die Ortskoordinaten von der Zeit abhängen.

Mit Hilfe der partiellen Ableitung können wir die Basisvektoren in den Koordinaten $\{y_i\}$ leicht bestimmen:

$$\mathbf{e}_{y_i} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \right|} = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \quad \text{mit } b_{y_i} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \right|. \quad (56)$$

Für das totale Differential gilt dann

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} dy_i. \quad (57)$$

Für die quadrierte Länge von $d\mathbf{r}$ (das *Linienelement*) gilt dann

$$(d\mathbf{r})^2 = g_{ij} dy_i dy_j, \quad \text{mit } g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_j}. \quad (58)$$

Die Matrix g_{ij} heisst *Metrik*.

Beispiele

1. Polarkoordinaten $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$, $(y_1, y_2) = (r, \varphi)$:

$$\begin{aligned} b_r &= 1, & \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ b_\varphi &= r, & \mathbf{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

2. Zylinderkoordinaten, $(y_1, y_2, y_3) = (r, \varphi, z)$:

$$r, \varphi \text{ wie bei Polarkoordinaten, } b_z = 1, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

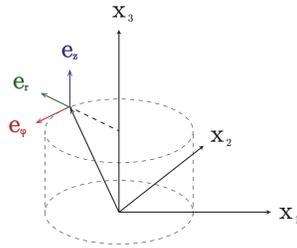


Abbildung 21: Zylinderkoordinaten mit Basisvektoren

3. Kugelkoordinaten $(y_1, y_2, y_3) = (r, \theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} b_r &= 1, & \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ b_\theta &= r, & \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ b_\varphi &= r \sin \theta, & \mathbf{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In allen drei Fällen verifizieren wir $\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = \delta_{ij}$ (Orthonormalsysteme).

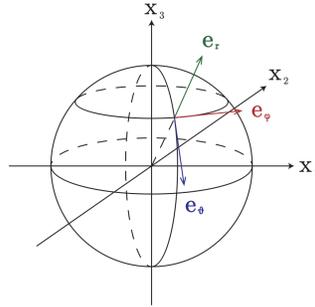


Abbildung 22: Kugelkoordinaten mit Basisvektoren

2.3.5 Koordinatentransformationen

Die kartesischen oder krummlinigen Koordinaten können alle den gleichen Ort beschreiben. Deshalb muss es Koordinatentransformationen geben, die an (fast) jedem Punkt P lokal, also in einer Umgebung von P , umkehrbar sind.

Beispiel: Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1} \text{ für } x_1 > 0 \text{ (sonst } + \pi) \end{array}$$

\Rightarrow alle Paare $(r = 0, \varphi)$ werden auf $x_1 = x_2 = 0$ abgebildet.

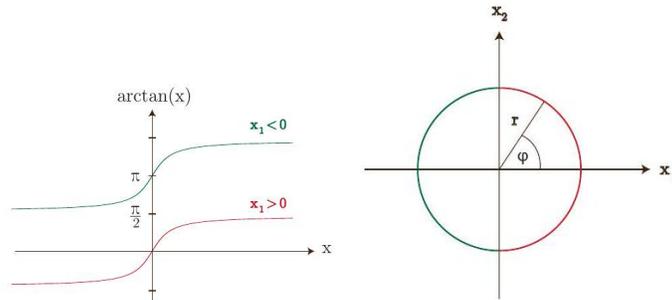


Abbildung 23: Berechnung des Winkels in Polarkoordinaten.

⇒ die Umkehrung für $r = 0$ ist nicht eindeutig.

Woher weiss man, ob (lokale) Umkehrbarkeit gegeben ist?

Eine Koordinatentransformation von Koordinaten $\{x_i\} \rightarrow \{y_i\}$ ist genau dann lokal umkehrbar, wenn die **Jacobideterminante** (auch **Funktionaldeterminante** genannt) nicht verschwindet. Die Jacobideterminante ist die Determinante der Transformationsmatrix (Jacobi-Matrix)

$$(J^{(xy)})_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right), \quad J^{(xy)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (60)$$

$\det J^{(xy)} \neq 0$ bedeutet, dass die inverse Matrix $(J^{(xy)})^{-1}$ existiert.

Die Jacobi-Determinante hat eine wichtige geometrische Bedeutung. Sie beschreibt die Änderung im Volumenelement bei einer Koordinatentransformation.

Beispiele:

1. Polarkoordinaten $(x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$J^{(xy)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J^{(xy)} = r \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi = r$$

$$\Rightarrow \text{Umkehrung möglich für } r \neq 0$$

Dies stimmt mit unseren zuvor gewonnenen Erkenntnissen zur Umkehrbarkeit überein.

2. Zylinderkoordinaten $(x_1, x_2, x_3) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$

$$J^{(xy)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J^{(xy)} = r$$

Umkehrung möglich für $r \neq 0$ wie bei Polarkoordinaten.

3. Kugelkoordinaten $(x_1, x_2, x_3) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$

$$J^{(xy)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J^{(xy)} = r^2 \sin \theta$$

Umkehrung möglich ausser für $r = 0$ oder $\theta = 0, \pi$ (Nord- oder Südpol).

3 Dynamik eines Massenpunktes

Die **Dynamik** befasst sich mit Kräften als Ursache der Bewegung. Die Rolle der Kräfte wird durch die Newtonschen Axiome beschrieben. Axiome sind Tatsachen, die mathematisch nicht bewiesen sind, bzw. deren Aussagen innerhalb der Theorie nicht weiter begründet werden. In der Newtonschen Mechanik geht es darum, die Folgerungen aus diesen drei Gesetze herzuleiten. Wie fast immer in der Physik entscheidet dann das Experiment, inwieweit die so entwickelte Theorie ihre Gültigkeit hat.

3.1 Die Newtonschen Axiome

Die Axiome, die Newton im Jahr 1687 in seinem Buch “Philosophiae Naturalis Principa Mathematica” veröffentlichte, bilden die Grundsätze der Newtonschen Mechanik. Sie beruhen auf Beobachtungen, die in der makroskopischen Welt gesammelt wurden. In der mikroskopischen Welt (Quantenphysik) und bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit (Relativitätstheorie wird relevant) sind sie nicht oder nur begrenzt gültig. Die Newtonsche Mechanik beruht auf der Annahme eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit, wo Ort und Impuls eines Massenpunktes im Prinzip beliebig genau gleichzeitig bestimmt werden können. Die Masse eines Körpers wird immer als konstant angenommen und hängt nicht von seiner Geschwindigkeit ab. Raum und Zeit sind noch nicht zur relativistischen “Raumzeit” verknüpft. In wenigen Worten lauten die Newtonschen Axiome wie folgt:

1. **Lex prima: Trägheitsprinzip:** Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch äussere Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.
2. **Lex secunda: Aktionsprinzip:** Die Änderung des Impulses ist gleich der auf den Körper wirkenden Kraft.

3. **Lex tertia: Wechselwirkungsprinzip:** Die Kräftewirkungen zweier Körper aufeinander sind entgegengesetzt gleich (actio = reactio).

Erläuterungen zu 1): Gleichförmige Bewegung bedeutet Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, also nicht beschleunigt. Diese Aussage macht nur dann Sinn, wenn es ein eindeutiges Bezugssystem gibt, in dem die Bewegung des Massepunktes beschrieben werden kann. Dies ist ein ruhendes System in dem von Newton postulierten absoluten Raum. Ein solches Bezugssystem wird Inertialsystem genannt. Eine modernere Formulierung des ersten Axioms lautet damit “Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Massepunkt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt. Solche Systeme heissen Inertialsysteme.”

Daraus ergibt sich

$$r(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0 \quad (\vec{v}_0, \vec{r}_0 = \text{const.}) \quad (61)$$

Erläuterungen zu 2): Der Impuls \mathbf{p} ist gegeben durch $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$. Es gilt

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (62)$$

Falls die Masse nicht zeitabhängig ist, ist die Kraft also proportional zur Beschleunigung \mathbf{a} :

$$\mathbf{F} = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{a}$$

Dabei ist m die träge Masse, eine skalare Eigenschaft des Körpers, die sein Beharrungsvermögen gegenüber Bewegungsänderungen beschreibt. Die physikalische Größe “Masse” hat außer der Eigenschaft *Trägheit* auch die Eigenschaft *Schwere*. Sowohl die auf einen Körper wirkenden als auch die von ihm verursachten Gravitationskräfte sind proportional zu seiner Masse. Diese doppelte Rolle der Masse ist der Inhalt des sogenannten *Äquivalenzprinzips* (Einstein 1907). Es drückt aus, dass die schwere und die träge Masse eines Körpers zwei äquivalente Größen sind. Diese Beobachtung war wichtig für die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie.

In manchen Situationen ändert sich die Masse, zum Beispiel

a) Relativitätstheorie

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

b) Verbrennungsprozesse, z.B. Rakete.

Wenn die Masse bekannt ist, kann man also aus der Beschleunigung (Kinematik) auf die Kräfte schließen (Dynamik). Mathematisch gesehen haben wir es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun (wird später im Detail behandelt).

Erläuterungen zu 3): Die zwei Kraftvektoren sind also anti-parallel zueinander:



Abbildung 24: Wirkungen zweier Körper aufeinander

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad \text{actio} = \text{reactio}$$

Als Krafteinheit verwenden wir “Newton” (N):

$$N = \frac{\text{kg} \cdot m}{s^2} .$$

Wenn ein kg in einer Sekunde gleichmässig um die Geschwindigkeit 1 m/s beschleunigt wird, dann wirkt eine konstante Kraft von 1 N .

Das **Superpositionsprinzip** wird oft als Newton’sches 4. Gesetz bezeichnet. Verschiedene Kräfte addieren sich linear:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i .$$

3.2 Beispiele

3.2.1 Freier Fall

Hierbei handelt es sich um den einfachsten Fall.

$$\mathbf{F}_s = m_s \mathbf{g} = \text{const.} \tag{63}$$

Experimentelle Beobachtung: träge Masse = schwere Masse, $m_s = m \Rightarrow m \mathbf{a} = m_s \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g}$, d.h. alle Körper fallen gleich schnell (in einem Inertialsystem und im Vakuum).

3.2.2 Zentralkräfte

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{e}_r$$

Gravitationskraft

$$f(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \quad ; \quad \gamma = 6.667 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2 \text{ (Gravitationskonstante)}$$

Da Massen nur positiv sein können, ist die Gravitation immer anziehend. Dies wird durch das Minuszeichen im Kraftgesetz ausgedrückt.

Coulombkraft

$$f(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad ; \quad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2) \text{ (elektrische Feldkonstante)}$$

Die Coulombkraft ist anziehend oder abstossend je nach Vorzeichen der Ladungen. Im Gegensatz zur Gravitationskraft können sich Ladungen gegenseitig ausgleichen.

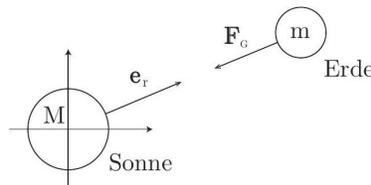


Abbildung 25: Gravitationskraft

Die zwei wichtigsten Fälle von Kraftgesetzen der klassischen Physik sind also vom Typ

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha \mathbf{e}_r}{r^2} .$$

Die $1/r^2$ -Abhängigkeit hat wichtige Konsequenzen für den Charakter der resultierenden Gesetze und Strukturen.

3.2.3 Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (64)$$

\mathbf{E} elektrische Feldstärke , \mathbf{B} magnetisches Feld

Die Lorentzkraft wirkt auf geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern und ist eines der wenigen Beispiele für eine Kraft, die von der Geschwindigkeit abhängt (ein weiteres Beispiel ist die Reibungskraft).

Das Grundschema der Dynamik hat also zum Ziel, die Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \ddot{\mathbf{r}}$ dem Problem angepasst aufzustellen. Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um ein dreidimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$m\ddot{x}_i - F_i(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, x_1, x_2, x_3, t) = 0, \quad i = 1, \dots, 3.$$

3.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Um solche Bewegungsgleichungen lösen zu können, sollten wir also etwas mehr wissen über gewöhnliche Differentialgleichungen.

Sei $x(t)$ eine Funktion von t . Dann bezeichnen wir die n -te Ableitung nach t mit $x^{(n)}(t)$: $x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$. Eine gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung ist eine Beziehung

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), t) = 0.$$

Beispiel: $x^{(5)}(t) + 3\dot{x}(t)x(t) + 3t = 0$.

Wir verwenden die Abkürzung DE (“Differential Equation”). Dabei bedeutet “gewöhnlich”, dass es nur eine unabhängige Variable gibt (im Beispiel hier t), im Gegensatz zu “partiellen” Differentialgleichungen, wo es mehrere unabhängige Variablen gibt, nach denen abgeleitet werden kann. Beispiel für eine partielle Differentialgleichung:

$$\Delta\phi(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = g(x_1, x_2, x_3),$$

z.B. $\Delta\phi = 0$ oder $\Delta\phi = \alpha^2\phi$. Viele zentrale Gleichungen der Physik sind partielle Differentialgleichungen: Maxwell-Gleichungen, Schrödinger-Gleichung, Navier-Stokes-Gleichung.

Eine Differentialgleichung ist *linear*, wenn f linear ist (also keine Terme x^α mit $\alpha > 1$ und auch keine Produkte von Ableitungen vorkommen). In Operatorschreibweise:

$$L^{(n)}(t) x(t) = h(t), \quad L^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$$

Beispiel:

$$x^{(5)}(t) + 3x(t) + 3t = 0 \Rightarrow L^{(5)} = \frac{d^5}{dt^5} + 3, \quad h(t) = -3t.$$

Gegenbeispiel zu “linear”: $x^{(5)}(t) + 3\dot{x}(t)x(t) + 3t = 0$ ist eine nicht-lineare Differentialgleichung.

Homogene Differentialgleichungen

Eine lineare Differentialgleichung heißt *homogen*, wenn außerdem $h(t) = 0$. Ein Beispiel für eine homogene lineare DE mit konstanten Koeffizienten ist der freie harmonische Oszillator, den wir später noch behandeln werden. Der Lösungsansatz für homogene DE ist ein Exponentialansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Einsetzen dieses Ansatzes in die DE

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) = 0$$

liefert

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) e^{\lambda t} = 0.$$

Man erhält nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn der Term in der Klammer null wird. Die Aufgabe reduziert sich also auf die Suche nach den Nullstellen eines Polynoms n -ten Grades (“charakteristisches Polynom”). Man erhält n Lösungen $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$. Die allgemeine Lösung der DE ergibt sich dann zu

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}$$

Die unbekanntenen Koeffizienten c_i werden aus den Anfangsbedingungen der Differentialgleichung bestimmt. Man benötigt also zur Lösung einer DE n -ter Ordnung n Anfangswerte. Die allgemeine Lösung kann auch geschrieben werden als eine Lösungsschar $x(t | c_1, \dots, c_n)$, die von den n Integrationskonstanten c_i abhängt.

Für lineare DE gilt das *Superpositionsprinzip*: sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen, so ist auch $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ eine Lösung.

Lösung inhomogener Differentialgleichungen

Im inhomogenen Fall hat die Gleichung die Form

$$L^{(n)}(t)x(t) = h(t) \text{ mit } h(t) \neq 0 .$$

Es gilt: Sei $x(t | c_1, \dots, c_n)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $L^{(n)}(t)x(t) = 0$ und sei $x_0(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, also $L^{(n)}(t)x_0(t) = h(t)$. Dann ist $\bar{x}(t | c_1, \dots, c_n) = x(t | c_1, \dots, c_n) + x_0(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beweis durch Einsetzen:

$$L^{(n)}\bar{x}(t) = \underbrace{L^{(n)}x(t)}_0 + \underbrace{L^{(n)}x_0(t)}_{h(t)} = h(t) . \quad (65)$$

Die Vorgehensweise ist also:

1. finde n linear unabhängige Lösungen für die homogene Gleichung
2. eine spezielle Lösung für die inhomogene DE.

Beispiel Stokes-Reibung

Die Stokes-sche Reibungskraft F_s ist eine Reibungskraft, welche für sich langsam bewegende Objekte gilt; sie ist proportional zur Geschwindigkeit v . Ein Beispiel ist die Reibungskraft, die eine Flüssigkeit auf eine Kugel ausübt, die sich mit einer Geschwindigkeit v bewegt. (im Gegensatz zur Newtonschen Reibung für typischerweise schnelle Objekte, diese ist proportional zu v^2 , z.B. Luftwiderstand).

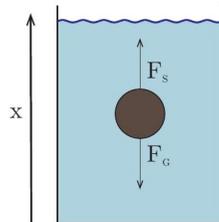


Abbildung 26: Kräfte, die auf eine fallende Kugel in einer Flüssigkeit wirken.

Die Stokes-Reibung wird in der Hydrodynamik aus der Navier-Stokes-Gleichung berechnet:

$$F_s = 6\pi\eta Rv = \zeta v ; \zeta = 6\pi\eta R, \quad R \text{ Kugelradius, } \eta \text{ Viskosität .}$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg - \zeta\dot{x} \Rightarrow m\dot{v} = -mg - \zeta v \\ \Rightarrow \dot{v} &= -g - \frac{\zeta}{m}v \end{aligned} \quad (66)$$

Homogener Fall:

$$g = 0 \Rightarrow v(t) = Ce^{-\frac{\zeta}{m}t}, \quad C \text{ Integrationskonstante .}$$

Inhomogener Fall: eine spezielle Lösung ist gegeben durch den stationären Zustand

$$\dot{v} = 0 \Rightarrow v(t) = -\frac{mg}{\zeta} =: -v_\infty$$

\Rightarrow Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} v(t) &= Ce^{-\frac{\zeta}{m}t} - v_\infty \\ t = 0 \Rightarrow v_0 &= C - v_\infty \quad \Rightarrow v(t) = (v_0 + v_\infty)e^{-\frac{\zeta}{m}t} - v_\infty \end{aligned} \quad (67)$$

Beispiel freier Fall

Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x}(t) = -g$$

“Verdoppelung der Variablen”: wir betrachten x und $v = \dot{x}$ als Variablen. Die Gleichung für v lautet

$$\dot{v} = -g ,$$

die Differentialgleichung 2. Ordnung für x wurde also durch Verdoppelung der Variablen $x \rightarrow (x, v)$ in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt. In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{lineare Abb.}} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}_{\text{inhomogen}}$$

Wir lösen zuerst die Gleichung für v :

$$\frac{dv}{dt} = -g \Rightarrow dv = -g dt \Rightarrow \int dv = -g \int dt + c_1 \quad (68)$$

$$\Rightarrow v = -gt + c_1 \quad (69)$$

Damit lösen wir die Gleichung für x :

$$\dot{x} = v = -gt + c_1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$$

Definiert man nun $v(0) =: v_0 \Rightarrow c_1 = v_0$, $x(0) =: x_0 \Rightarrow c_2 = x_0$, so folgt:

$$x = x_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Das Ergebnis ist die Wurfparabel ohne Horizontalgeschwindigkeit.

3.4 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Durch die Newtonschen Axiome wird die Bewegung von Körpern nur als Bewegung relativ zu einem Bezugssystem definiert. Wird das Bezugssystem ohne Beschleunigung verschoben, so bleibt die Art der Bewegung gleichwertig. Dies kann bei bewegten Bezugssystemen anders sein. So erfährt ein Massepunkt, der sich in einem Bezugssystem geradlinig und gleichförmig bewegt, in einem rotierenden System eine Beschleunigung. Die Newtonschen Axiome sind nur dann sinnvoll, wenn sie sich auf eine Klasse von Bezugssystemen beziehen, die man als Inertialsysteme bezeichnet. Es gilt also:

1. Nicht alle Koordinatensysteme sind Inertialsysteme. So sind etwa rotierende Systeme keine Inertialsysteme.
2. Es gibt mindestens ein Inertialsystem, z.B. bezogen auf die Fixsterne. Daraus folgt, dass es Koordinatensysteme gibt, in denen die Newtonschen Axiome gelten.

Welche Koordinatentransformation überführen ein Inertialsystem Σ in ein anderes Inertialsystem Σ' ? Die Forderung muss sein, dass bei der Transformation keine Kraft auf den Massepunkt ausgeübt werden darf. Mit den Ortsvektoren \vec{r} und \vec{r}' in Σ und Σ' muss also gelten

$$m\ddot{\vec{r}} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}}' = 0 .$$

Mögliche Transformationen, um ein Inertialsystem in ein anderes zu überführen, sind durch die Translation, die geradlinig-gleichförmige Bewegung und/oder die Drehung um einen festen Winkel gegeben. Mathematisch bedeutet dies, dass folgende Transformationen bzw. eine Verkettung davon erlaubt sind:

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{b}, \quad (70)$$

$$\vec{r}(t) \rightarrow O(\varphi, \theta, \psi) \vec{r}(t), \quad (71)$$

wobei \vec{v}_0 und \vec{b} konstant sind. Der Zeit-Nullpunkt kann ebenfalls verschoben werden, $t' = t_0 + t$. Diese Klasse von Transformationen der Inertialsysteme wird als **Galilei-Transformation** bezeichnet.

Die Forderung von Invarianz der Newtonschen Gesetze unter Galilei-Transformationen wird als Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik bzw. als Galileisches Relativitätsprinzip bezeichnet:

Bezugssysteme, die relativ zu einem Inertialsystem eine unbeschleunigte Translationsbewegung ausführen, oder um einen starren Winkel gedreht wurden, sind ebenfalls Inertialsysteme und für die Beschreibung mechanischer Vorgänge gleichwertig.

Jede Galilei-Transformation kann also durch maximal 10 Parameter beschrieben werden: 3 Drehwinkel (φ, θ, ψ), 3 Ortskoordinaten (\vec{b}), 3 Geschwindigkeitskoordinaten (\vec{v}_0), eine Zeitkoordinate.

Die Invarianz unter Galilei-Transformationen gilt nicht mehr im Rahmen der Relativitätstheorie. Galilei-Transformationen werden dort durch Lorentz- bzw. Poincaré-Transformationen ersetzt, wo Zeit und Ort nicht mehr unabhängig voneinander transformiert werden.

4 Beschleunigte Bezugssysteme

4.1 Allgemeine Betrachtung von Scheinkräften

Die Newtonschen Axiome gelten für Inertialsysteme. Können wir auch die Bewegungen in einem Bezugssystem Σ' berechnen, welche sich nicht geradlinig und gleichförmig relativ zu einem anderen Bezugssystem Σ bewegt? Die Antwort ist "Ja", wenn wir sogenannte Scheinkräfte betrachten. Diese hängen von der Bewegung des Bezugssystems ab. Beispiele sind die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft in rotierenden Systemen.

Kräfte in Inertialsystemen sind objektive physikalische Realität und beschreiben die an einen Massepunkt angreifende Kraft, verursacht durch die Wechselwirkung mit anderen physikalischen Objekten. Diese sind unabhängig von der Wahl des Bezugssystems. Scheinkräfte hingegen sind verursacht durch die Bewegung des Bezugssystems. Sie können aber gemessen werden. Deren Betrachtung ist daher sinnvoll, da sie im beschleunigten System wie die echten Kräfte im Inertialsystem wirken.

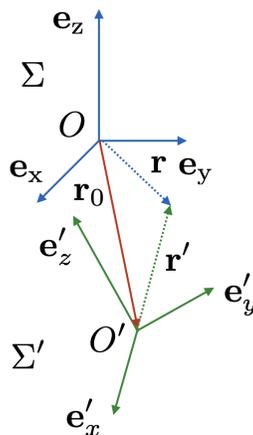


Abbildung 27: Die Bezugssysteme Σ und Σ' .

Die Bewegung eines Massepunktes wird in den zwei verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich beschrieben. Wir definieren den Ort des Massepunktes im ungestrichenen Bezugssystem Σ als $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Im gestrichenen Bezugssystem Σ' wird der Ort des Massepunktes definiert als $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$ (siehe Abb. 27). Es gilt die Beziehung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t)$$

mit

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{e}'_x(t) + y'(t)\mathbf{e}'_y(t) + z'(t)\mathbf{e}'_z(t) .$$

Wichtig: die Einheitsvektoren im gestrichenen Koordinatensystem sind abhängig von der Zeit. Dies wird die Berücksichtigung einer Rotation ermöglichen.

Die Geschwindigkeit des Massepunktes, beschrieben von einem Beobachter im ungestrichenen Koordinatensystem, berechnet sich zu

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{x}'\mathbf{e}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + x'\dot{\mathbf{e}}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z + z'\dot{\mathbf{e}}'_z \quad (72)$$

Im gestrichenen Koordinatensystem, in dem sich die Achsenrichtung für einen (mitbewegten) Beobachter nicht ändert, besitzt der Massepunkt die Geschwindigkeit

$$\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \dot{\mathbf{r}}'(t) = \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z$$

Die gestrichene Ableitung $\frac{d'}{dt}$ bedeutet, dass sich die Ableitung auf eine gestrichene Größe bezieht. Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_0 && \text{Translationsgeschwindigkeit ,} \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} && \text{Absolutgeschwindigkeit ,} \\ \mathbf{v}' &= \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \dot{\mathbf{r}}' && \text{Relativgeschwindigkeit .} \end{aligned} \quad (73)$$

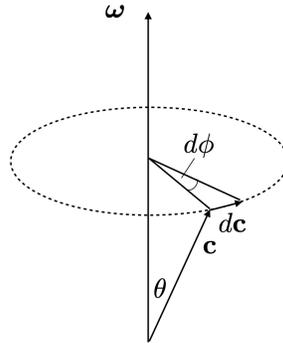


Abbildung 28: Änderung des Vektors \mathbf{c} bei Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Der Radius R des Kreises ist $R = |\mathbf{c}| \sin \theta$.

Nun betrachten wir die zeitliche Änderung der Basisvektoren. Sie kann durch die Rotation des Systems um eine Achse mit Richtung $\boldsymbol{\omega}/\omega$ beschrieben werden. Dabei ist ω der Betrag der Winkelgeschwindigkeit, $\omega = \frac{d\phi}{dt}$. Aus Abb. 28 erkennen wir, dass

$$|d\mathbf{c}| = |\mathbf{c}| \sin \theta d\phi \Rightarrow \frac{|d\mathbf{c}|}{dt} = |\mathbf{c}| \sin \theta \frac{d\phi}{dt} = |\mathbf{c}| \sin \theta \omega$$

Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ der momentanen Winkelgeschwindigkeit zeigt in die Richtung der Drehachse, durch ihn kann die Drehung allgemein beschreiben werden

als

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c} .$$

Dieser Zusammenhang gilt für alle Vektoren, insbesondere auch für die vorher betrachteten Einheitsvektoren, z.B.

$$\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x$$

Damit gilt für die letzten drei Terme in der Absolutgeschwindigkeit, Glg. (72):

$$x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

und somit

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (74)$$

Die sich ergebende Geschwindigkeit für eine verschwindende Relativgeschwindigkeit, $\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = 0$, wird als **Führungsgeschwindigkeit** \mathbf{v}_f bezeichnet:

$$\mathbf{v}_f(t) = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' .$$

Verwenden wir $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'$ und Glg. (74), ergibt sich die folgende zeitliche Ableitung für einen gestrichenen Vektor:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

Aus dieser Herleitung für den Ortsvektor, die aber allgemein gültig ist für beliebige Vektoren, kann man eine Vorschrift ableiten, wie man in einem Inertialsystem einen beliebigen Vektor ableitet, der in einem rotierenden Bezugssystem dargestellt wird: Für einen beliebigen Vektor im Bezugssystem Σ' , $\mathbf{A} = A'_x(t)\mathbf{e}'_x + A'_y(t)\mathbf{e}'_y + A'_z(t)\mathbf{e}'_z$, gilt

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} . \quad (75)$$

Hierbei beschreibt der erste Term auf der rechten Seite nur die Komponenten des Vektors im gestrichenen Koordinatensystem und der zweite Term eine Rotation. Für $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$ erhalten wir insbesondere

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} .$$

Die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit ist offensichtlich in beiden Koordinatensystemen gleich.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung berechnen. Im Inertialsystem gilt $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$. Wir benötigen also die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ und verwenden Glg. (74), somit

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{d}{dt} \left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) . \quad (76)$$

Dies lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0) &= \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}' = \frac{d}{dt} \left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) \\ &= \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \end{aligned} \quad (77)$$

Der erste Term auf der rechten Seite lässt sich schreiben als

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (78)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite lässt sich schreiben als

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (79)$$

Der letzte Ausdruck in Gleichung (79) ist gemäss Glg. (75):

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')) . \quad (80)$$

Wenn wir all diese Ausdrücke kombinieren und nach der Beschleunigung $\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}$ umstellen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} &= \frac{d\dot{\mathbf{r}}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \end{aligned} \quad (81)$$

Der erste Ausdruck, $\ddot{\mathbf{r}}_0$, wird auch als **Translationsbeschleunigung** bezeichnet. Für eine verschwindende Relativgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}'$ und damit auch für eine verschwindende Relativbeschleunigung $\dot{\mathbf{r}}'$, wird die verbleibende Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') ,$$

auch **Führungsbeschleunigung** genannt. Sie entspricht genau der zeitlichen Ableitung der früher definierten Führungsgeschwindigkeit. Damit wird aus der Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ im Nichtinertialsystem

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} \underbrace{-m\ddot{\mathbf{r}}_0}_{\mathbf{F}_{\text{Trans}}} \underbrace{-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'}_{\mathbf{F}_E} \underbrace{-m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] }_{\mathbf{F}_z} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'}_{\mathbf{F}_c} . \quad (82)$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis: das klassische Grundgesetz der Mechanik wird modifiziert im Bezugssystem Σ' . Neben der auch im Inertialsystem wirkenden Kraft \mathbf{F} treten vier weitere Kräfte auf in beschleunigten Bezugssystemen. Sie werden auch **Trägheitskräfte** oder **Scheinkräfte** genannt. Dies sind zusätzlich auftretende Kräfte im Nichtinertialsystem, die erforderlich sind, um die gleichförmige Bewegung eines kräftefreien Massepunkt im Inertialsystem zu garantieren. Gleichung (82) kann als eine Verallgemeinerung des Grundgesetzes der Mechanik verstanden werden, welche in einem beliebigen Bezugssystem angewandt werden kann.

Der erste Term ist die aus der Translationsbeschleunigung resultierende **Translationskraft**. Der zweite Term wird auch als **Eulersche Kraft** bezeichnet. Sie tritt nur auf, wenn sich die Winkelgeschwindigkeit des Bezugssystems zeitlich ändert. Die dritten und vierten Terme sind bekannt unter den Namen Zentrifugalkraft \mathbf{F}_z und Corioliskraft \mathbf{F}_c .

4.2 Die Zentrifugalkraft

Die Zentrifugalkraft \mathbf{F}_z (fugere - lateinisch: fliehen)

$$\mathbf{F}_z = -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]$$

zeigt radial nach aussen, Beispiel Kettenkarussell.

4.3 Die Corioliskraft

Die Corioliskraft \mathbf{F}_c ist gegeben durch

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' .$$

Sie tritt dann auf, wenn ein Körper sich in einem rotierenden Bezugssystem bewegt und wenn diese Bewegung nicht parallel zur Rotationsachse bzw. zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit verläuft. Die Corioliskraft ist

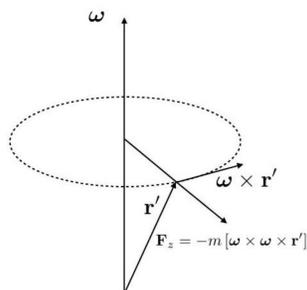


Abbildung 29: Zentrifugalkraft

maximal, wenn Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit senkrecht aufeinander stehen. Beispiele aus der Meteorologie sind die Drehrichtungen der Windfelder um Hoch- und Tiefdruckgebiete. In der Ozeanographie beeinflusst die Corioliskraft die Meeres-Strömungen.

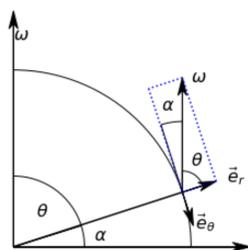


Abb. 5.5 Erde mit Polarkoordinaten und Breitengrad α .

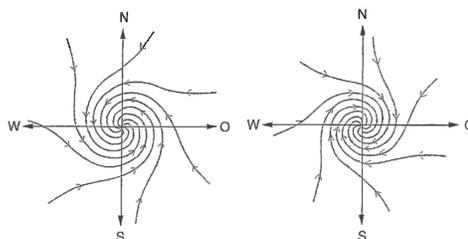


Abb. 5.6 Coriolis-Kraft auf der Nordhalbkugel (links) und Südhalbkugel (rechts).

Abbildung 30: Die Corioliskraft bewirkt, dass sich Winde, die sich in ein Tiefdruckgebiet bewegen, auf der Nordhalbkugel im Gegenuhrzeigersinn um das Tiefdruckzentrum drehen, auf der Südhalbkugel im Uhrzeigersinn.

5 Erhaltungssätze

Das zweite Newtonsche Gesetz ermöglicht die Lösung von Problemen bei denen wir bei vorgegebener Kraft, die im allgemeinen eine Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit ist, die Bahnkurve eines im Raum frei

beweglichen Massepunktes berechnen möchten. Wir müssen also folgende Gleichung lösen

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad (83)$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y}(t) &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z}(t) &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) . \end{aligned} \quad (84)$$

Unter Berücksichtigung von sechs möglichen Integrationskonstanten beschreiben diese Gleichungen die Gesamtheit der Bewegungen, die durch das Kraftgesetz ermöglicht werden. Um zu einer konkreten Lösung zu gelangen, müssen wir diese sechs Integrationskonstanten aus Anfangswerten bestimmen. Man verwendet normalerweise als Anfangswerte den Ort und die Geschwindigkeit zu einem Referenzzeitpunkt t_0 , gegeben als

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) \text{ und } \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0) .$$

Mit der Angabe dieser Anfangswerte und dem bekannten funktionellen Zusammenhang der Kraft ist die mechanische Bewegung komplett determiniert, im Prinzip können alle dynamischen Größen des Massepunktes in der Zukunft vorhergesagt werden. Das Finden der Lösung dieser Gleichung ist ein rein mathematisches Problem, es ist jedoch oft sehr kompliziert, denn es müssen viele gekoppelte Differentialgleichungen gelöst werden.

Die Lösung der Bewegungsgleichungen kann aber bei bestimmten Arten von Kräften aufgrund von Bilanzgleichungen oder Erhaltungssätzen einfach werden. Erhaltungsgrößen sind Größen, welche invariant sind unter zeitlicher Entwicklung. Für eine Erhaltungsgröße G gilt also

$$\frac{d}{dt}G(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0 ,$$

G wird auch als *Integral der Bewegung* bezeichnet.

Beispiel Impulsbilanz: Aus dem zweiten Newtonschen Axiom ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \text{ mit } \mathbf{p}(t) = m(t)\dot{\mathbf{r}}(t) \quad (85)$$

Die zeitliche Änderung des Impulses eines Massepunktes ist also gleich der einwirkenden Gesamtkraft. Für den speziellen Fall, dass keine Kraft wirkt

($\mathbf{F} = 0$), folgt die Impulserhaltung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{p}(t) = \text{const.} \quad (86)$$

Um Erhaltungssätze detaillierter zu diskutieren, brauchen wir zunächst noch mathematische Grundlagen zur Vektoralgebra.

5.1 Mathematischer Einschub: Vektoralgebra

5.1.1 Der Gradient

Der **Gradient** einer skalaren Funktion $\phi(x, y, z)$ ist das multi-dimensionale Analogon zur Steigung bzw. Ableitung einer Kurve. Der Gradient ist ein Vektor, er zeigt in die Richtung maximaler Änderung (“Steigung”) der skalaren Größe. Der Betrag gibt die entsprechende Stärke der Änderung an. Der Gradient wird beschrieben durch

$$\text{grad } \phi(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (87)$$

Als Beispiel für eine Funktion $z = \phi(x, y)$ kann ein Berg dienen (Abb. 31), die Höhenlinien werden beschrieben durch $\phi(x, y) = \text{const.}$ Dann zeigt der Gradient in die Richtung des maximalen Anstieges am Berg und der Betrag gibt an, welchen Höhenunterschied man in dieser Richtung zurücklegen würde. In Komponentenschreibweise wird die Ableitung nach der i -ten Komponente auch häufig ausgedrückt als

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x})_{,i} .$$

Ausserdem wird oft die Abkürzung $\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i$ verwendet. Der Gradient wird meist durch den Nabla-Operator ∇ ausgedrückt. Der Nabla-Operator ist ein vektorieller Differentialoperator, der auf skalare oder vektorielle Funktionen angewandt wird. Seine Komponenten entsprechen den partiellen räumlichen Ableitungen in den entsprechenden Koordinaten:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (88)$$

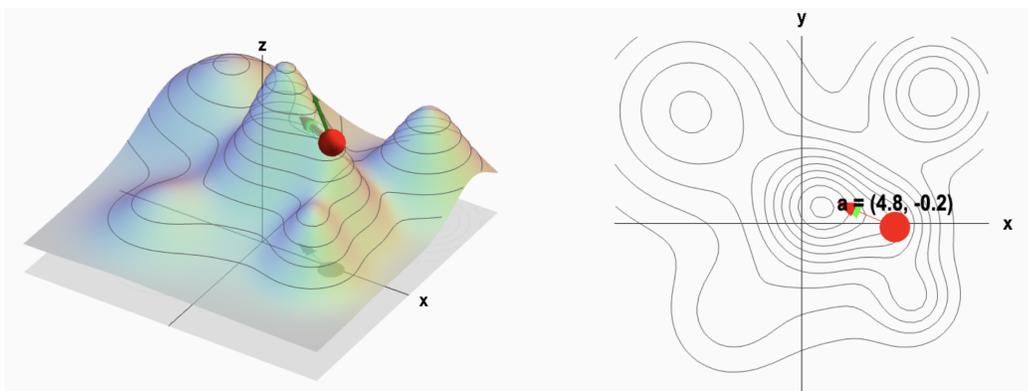


Abbildung 31: Der Gradient zeigt in die Richtung maximaler Steigung und steht senkrecht auf den Höhenlinien (roter Pfeil im rechten Bild, grauer Pfeil im linken Bild). Die Steilheit des dunkelgrünen Pfeils im linken Bild ist ein Maß für die Größe der Richtungsableitung. *Image credit: D. Q. Nykam, mathinsight.org*

Die Richtung von $\nabla\phi$ bezeichnet die Richtung der größten Änderung des Wertes von ϕ . Die Änderung der skalaren Funktion $d\phi$ in einer bestimmten Richtung, gegeben durch einen infinitesimal kleinen Vektor mit einer bestimmten Richtung $d\mathbf{r}$, wird berechnet als

$$d\phi = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r} \quad (89)$$

oder

$$d\phi = \phi_{,i} dx_i$$

wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention angewandt wird. Die Größe

$$D_{\mathbf{u}}\phi(\mathbf{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{r} + h\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{r})}{h} \quad (90)$$

wird auch als **Richtungsableitung** in Richtung des Vektors \mathbf{u} genannt. Es gilt

$$D_{\mathbf{u}}\phi(\mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot \mathbf{u} \quad (91)$$

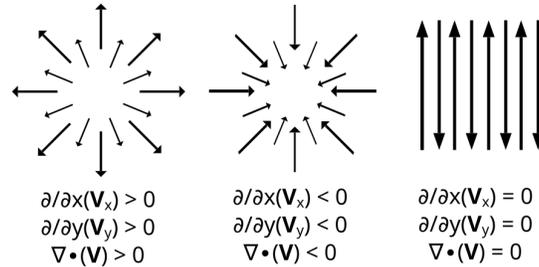


Abbildung 32: Visualisierung der Divergenz einer 2-dimensionalen Vektorfunktion \mathbf{V} . *Image credit: Wikipedia*

5.1.2 Die Divergenz

Das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit einer Vektorfunktion $\mathbf{V}(x, y, z)$ ergibt eine skalare Funktion, die **Divergenz** der Vektorfunktion.

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(x, y, z) = \operatorname{div} \mathbf{V}(x, y, z) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (92)$$

Die Divergenz beschreibt z.B. den Fluss der durch $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ beschriebenen Größe durch eine bestimmte Fläche. Sie wird auch als **Quelldichte** bezeichnet. Ist die Divergenz eines Vektorfeldes an einem bestimmten Raumpunkt positiv, muss sich dort eine **Quelle** befinden. Ist die Divergenz eines Vektorfeldes an einem bestimmten Raumpunkt negativ, bezeichnet man dies als eine **Senke**. Für eine verschwindende Divergenz muss das Vektorfeld an diesem Raumpunkt entsprechend **quellfrei** sein. (Paradebeispiele aus der Elektrodynamik).

5.1.3 Die Rotation

Wird der Nabla-Operator auf eine Vektorfunktion $\mathbf{V}(x, y, z)$ mit einem Kreuzprodukt angewandt, erhält man die **Rotation** der Vektorfunktion (englisch: **curl**).

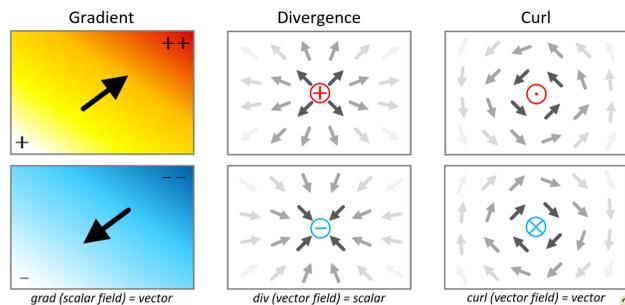


Abbildung 33: Visualisierung von Gradient, Divergenz und Rotation.
Image credit: S. Zurek, Encyclopedia Magnetica

$$\nabla \times \mathbf{V}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (93)$$

In Komponenten:

$$(\nabla \times \mathbf{V})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j V_k . \quad (94)$$

Die Rotation einer Vektorfunktion ist wieder eine Vektorfunktion, deren Betrag der maximalen Rotation an diesem Punkt entspricht und deren Richtung senkrecht auf der Ebene der Rotation steht. Man sagt, die Rotation ist ein Maß für die “Verwirbelung” einer Vektorfunktion (siehe Abb. (33), rechts).

Die Rotation findet z.B. Verwendung im **Satz von Stokes**. Dieser besagt: Sei \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet Ω . Sei $\Sigma \subset \Omega$ eine Fläche mit Rand $\partial\Sigma$ (siehe Abb. 34), so gilt

$$\iint_{\Sigma} d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (95)$$

Damit wird also ein Flächenintegral in ein Linienintegral überführt, was leichter zu berechnen ist. Bemerkungen:

(i) $d\mathbf{A}$ zeigt in Richtung des Normalenvektors \mathbf{n} der Fläche. Die Fläche ist orientiert, d.h. wenn man den Rand der Fläche entgegen dem Uhrzeiger

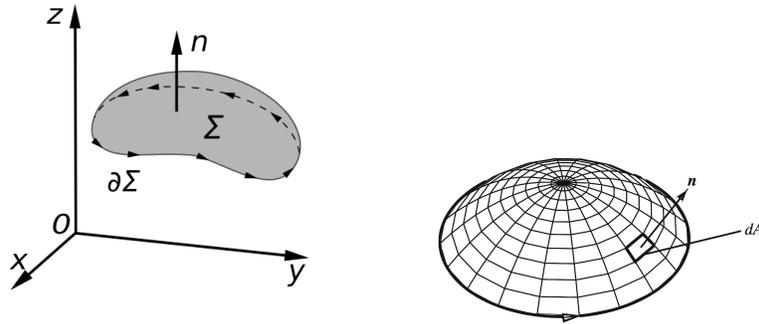


Abbildung 34: Links: Gekrümmte Fläche Σ mit Rand $\partial\Sigma$ und Normalenvektor \mathbf{n} . *Image credit: Wikipedia.* Rechts: Illustration der orientierten Fläche mit Normalenvektor. *Image credit: C.B. Lang, N. Pucker, Mathematische Methoden in der Physik, Springer Verlag.*

durchläuft, so ist die Richtung “oben” im Sinne einer Rechtsschraube definiert.

(ii) \mathbf{r} ist eine Parametrisierung der Randkurve $\partial\Sigma$, die Durchlaufrichtung ist gegen den Uhrzeigersinn.

(iii) Es gibt noch weitere wichtige Integralsätze wie etwa den Satz von Gauß:

$$\iiint_V dV \nabla \cdot \mathbf{F} = \iint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} .$$

Der Gauß’sche Satz erlaubt uns also, ein Volumenintegral in ein Flächenintegral umzuwandeln.

5.2 Impuls- und Drehimpulserhaltung

Zurück zur Impulserhaltung, welche aus dem zweiten Newtonschen Axiom folgt, falls keine Kraft wirkt (Glg. (85)):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{p}(t) = \text{const.}$$

Die Impulserhaltung drückt den uns bereits bekannten Sachverhalt aus, dass sich ein kräftefreier Massepunkt geradlinig gleichförmig bewegt.

Drehimpulserhaltung

Ausgangspunkt ist wieder das 2. Newtonsche Axiom, $m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$. Wir multiplizieren von links vektoriell mit \mathbf{r} , dann folgt

$$m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (96)$$

Auf der linken Seite haben wir

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

Definieren wir den **Drehimpuls** \mathbf{L} durch

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (97)$$

dann erhalten wir aus Glg. (96)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} =: \mathbf{M} . \quad (98)$$

Auf der rechten Seite steht das **Drehmoment** \mathbf{M} , definiert durch

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (99)$$

Glg. (98) für die Drehimpulserhaltung besagt also, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich dem einwirkenden Gesamtdrehmoment ist. Ist das Gesamtdrehmoment Null, so ist der Drehimpuls erhalten. Insbesondere gilt, dass \mathbf{L} erhalten ist, falls \mathbf{F} eine Zentralkraft ist, also in Richtung des Ortsvektors wirkt, $\mathbf{F} \sim \mathbf{r}$ (also $\mathbf{M} = 0$). In Glg. (98) kann der Drehimpuls in Analogie zum Impuls und das Drehmoment in Analogie zur Kraft gesehen werden.

5.3 Energiebilanz

Wir beginnen zunächst mit der Definition der Arbeit. Die Kraft, die am Masspunkt angreift, um ihn von einem Punkt P_1 nach P_2 zu bewegen, verrichtet eine Arbeit. Für eine infinitesimale Verschiebung beträgt die infinitesimale Arbeit

$$\delta W = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -|\mathbf{F}| \cos \phi |d\mathbf{r}| = -F_s ds . \quad (100)$$

Hierbei ist $ds = |d\mathbf{r}|$ das Linienelement und ϕ der Winkel zwischen der

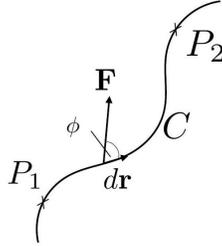


Abbildung 35: Kraft entlang eines Weges C und infinitesimales Wegelement $d\mathbf{r}$.

Kraft und dem Weg. F_s ist die Kraftkomponente entlang der Richtung des Weges C , siehe Abb. 35. Das Vorzeichen in Glg. (100) ist Konvention. Wir verwenden hier ein negatives Vorzeichen, wenn am Massepunkt Arbeit in Richtung des Weges geleistet wird.

Die gesamte Arbeit, die geleistet wird, um den Massepunkt zwischen zwei Punkten P_1 (Ortsvektor \mathbf{r}_1) und P_2 (Ortsvektor \mathbf{r}_2) zu verschieben, beträgt demnach

$$W = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (101)$$

Sie ist demnach im allgemeinen eine Funktion der Kraft, der Punkte P_1 und P_2 , **des gewählten Weges** und des zeitlichen Bewegungsablaufes (letzteres nur falls \mathbf{F} zeitabhängig ist).

Glg. (101) stellt ein sogenanntes *Wegintegral* (auch *Linienintegral* genannt) dar. Man parametrisiert die Raumkurve C durch einen Parameter α (oft bietet sich $\alpha = t$ (Zeit) an):

$$\begin{aligned} C : \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\alpha) ; \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\alpha_1), \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\alpha_2) \\ d\mathbf{r} &= \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} d\alpha \end{aligned} \quad (102)$$

Die Leistung P ist definiert als die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\delta W}{\delta t} = - \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \dot{\mathbf{r}}(t'), t') \cdot \dot{\mathbf{r}}(t') \\ \Rightarrow P &= -\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (103)$$

Zur weiteren Herleitung einer Bilanzgleichung beginnen wir mit der allgemeinen, vektoriellen Bewegungsgleichung und multiplizieren diese mit $\dot{\mathbf{r}}$. Wir

erhalten

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \mid \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ m\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (104)$$

Den Term in der Klammer bezeichnet man als die kinetische Energie T (Bewegungsenergie):

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{m}{2} v^2$$

Wir erkennen an der obigen Gleichung, dass die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Massepunktes proportional zur Leistung der einwirkenden Kraft am Massepunkt ist,

$$\frac{dT}{dt} = -P. \quad (105)$$

Für eine verschwindende Leistung muss die kinetische Energie also konstant sein:

$$P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \text{const.}$$

Dies stellt ein weiteres Integral Bewegung dar und drückt die **Erhaltung der kinetischen Energie** aus.

Wir können die differentielle Gleichung (105) auch integrieren und erhalten

$$\int_1^2 dT = - \int_1^2 P dt = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad T_2 - T_1 = W$$

Die Änderung der kinetischen Energie des Massepunktes zwischen zwei Punkten auf seiner Bahnkurve entspricht also genau der geleisteten Arbeit durch die Kraft am Massepunkt.

Das Kraftfeld kann unterschiedliche Eigenschaften besitzen. Allgemein unterscheiden wir zwischen konservativen und nicht-konservativen Kraftfeldern. Letztere werden auch *dissipative* Kraftfelder genannt. Beide Arten von Kraftfeldern wollen wir im Folgenden diskutieren.

5.3.1 Konservative Kraftfelder

Allgemein gilt: wenn man eine Funktion U finden kann, so dass

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

dann nennt man \mathbf{F} eine **konservative** Kraft. Die Funktion U bezeichnet man als das **Potential** oder die **potentielle Energie**. Im allgemeinen besteht aber das Kraftfeld aus einem konservativen und einem dissipativen Anteil:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{kons.}} + \mathbf{F}_{\text{diss.}} \quad (106)$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} + \mathbf{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \\ \frac{d}{dt}[T + U(\mathbf{r})] &= \mathbf{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (107)$$

Dieser Zusammenhang wird als **Energiebilanz** bezeichnet. Er besagt, dass die zeitliche Änderung der mechanischen Energie der Leistung der dissipativen Kräfte entspricht. Die Energie E ist eine Erhaltungsgröße, wenn die dissipativen Kräfte verschwinden.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{diss.}} = 0 &\Rightarrow E = T + U(\mathbf{r}) = \text{const.} \\ \Leftrightarrow E &= \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = \text{const.} \end{aligned} \quad (108)$$

Die Größe E bezeichnet hier die Gesamtenergie des Massepunktes. Diese besteht aus potentieller und kinetischer Energie.

Wir wollen im Folgenden genauer diskutieren, unter welchen Voraussetzungen ein Kraftfeld konservativ ist, bzw. welche weiteren Aussagen wir über das Potential gewinnen können. Ausgangspunkt war die Forderung, dass

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (109)$$

Für den Fall, dass die Kraft senkrecht auf der Geschwindigkeit des Massepunktes steht, muss das Potential konstant sein:

$$\mathbf{F} \perp \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow U = \text{const.} \quad (110)$$

Falls $\mathbf{F}_{\text{diss.}} = 0$ (oder ebenfalls senkrecht zu $\dot{\mathbf{r}}$) folgt dann auch $\frac{dT}{dt} = 0$. Hier wird keine Arbeit verrichtet, die kinetische Energie muss dann für ein konservatives System zeitlich konstant sein.

Wir können Gleichung (109) noch expliziter ausformulieren und finden

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \text{grad } U \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (111)$$

Daraus folgt

$$(\text{grad } U + \mathbf{F}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 . \quad (112)$$

Neben der Möglichkeit, dass das Skalarprodukt insgesamt verschwindet, kann diese Gleichung erfüllt werden, wenn

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U . \quad (113)$$

Dies ist der für uns interessante Fall. Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn wir es als den negativen Gradienten einer skalaren Funktion des Ortes ausdrücken können. Es gilt

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} . \quad (114)$$

Eine Kraft wird also **konservativ** genannt, wenn sie als **Gradient eines zeitunabhängigen skalaren Potentials** darstellbar ist. Das Potential ist dabei nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Zusammenhang mit der Rotation

Ein Elementarsatz der Vektoralgebra besagt, dass die Rotation eines Gradientenfeldes $\text{grad } \phi(\mathbf{r})$ immer verschwindet, also $\text{rot grad } \phi(\mathbf{r}) = 0$. Dies gilt natürlich im speziellen auch für das Potential. Daher muss ein konservatives Kraftfeld auch wirbelfrei sein

$$\mathbf{F} \text{ konservativ} \Rightarrow \mathbf{F} = -\text{grad } U(\mathbf{r}) \Rightarrow \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 . \quad (115)$$

Auf einfach zusammenhängenden Gebieten (jede geschlossene Kurve lässt sich zu einem Punkt zusammenziehen), gilt auch das Äquivalenzzeichen, d.h. die Kraft hat dann ein Potential, wenn sie wirbelfrei ist.

Es ist jedoch nicht jedes wirbelfreie Kraftfeld konservativ. Auch dissipative Kraftfelder können wirbelfrei sein.

Zusammenhang mit dem Wegintegral

Wir können auch die integrale Formulierung dieses Zusammenhanges untersuchen. Wir betrachten dazu als erstes die geleistete Arbeit entlang eines geschlossenen Weges.

$$W = - \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint \text{grad } U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint dU(\mathbf{r}) = U_{\text{Ende}} - U_{\text{Anf}} = 0$$

Wir erkennen also, dass konservative Kräfte auf geschlossenen Wegen keine Arbeit leisten. Die Arbeit hängt dabei nicht vom Weg ab.

Wir können dies auch mathematisch abstrakter formulieren, in dem wir den Stokeschen Satz anwenden

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (116)$$

Obige Gleichung suggeriert, dass die Bedingungen “Arbeit entlang jeder beliebigen geschlossenen Kurve gleich Null” und “Rotation des Kraftfeldes verschwindet” äquivalente Bedingungen für das Vorliegen einer konservativen Kraft sind. Tatsächlich ist dies richtig, solange \mathbf{F} und dessen Ableitungen auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet überall definiert sind. Wenn der Bereich, auf dem \mathbf{F} definiert ist, nicht einfach zusammenhängend ist, kann die Rotation des Feldes fast überall Null sein; ein Integral über einen geschlossenen Weg, welcher den ausgeschlossenen Bereich enthält, kann jedoch trotzdem ungleich Null sein. Falls die Kraft dann ausserhalb des ausgeschlossenen Bereichs als Gradient eines Potentials geschrieben werden kann, nennt man eine solche Kraft *lokal* konservativ.

Beispiel für ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet: Ein Magnetfeld \mathbf{B} , welches in einem Gebiet um einen stromdurchflossenen Leiter definiert ist. Der Leiter sei ein Draht in z -Richtung. Das Gebiet um den Leiter ist nicht einfach zusammenhängend, da es den Leiter ausschliesst. Bei $(0, 0, z)$ ist \mathbf{B} nicht definiert. Mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x, 0)^T \quad (117)$$

gilt zwar außerhalb des Leiters $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$, doch das Integral eines geschlossenen Weges um die z -Achse verschwindet nicht.

Zur Berechnung des Potentials müssen wir zunächst aus der Überprüfung der Forderung $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ sicherstellen, dass überhaupt ein Potential existiert. Anschliessend können wir das Potential berechnen mittels

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} dU = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

Hier taucht das Potential $U(\mathbf{r}_0)$ an einem Referenzpunkt \mathbf{r}_0 auf, welchen wir geeignet festlegen können. Das Potential ist nur bestimmt bis auf eine Konstante. Man kann einen beliebigen Wert addieren oder subtrahieren, ohne die resultierende Kraft zu verändern, so dass das Referenzpotential geeignet

gewählt werden kann. Weiterhin ist das obige Integral wegunabhängig, da die Kraft konservativ ist. Daher kann man sich auch einen geeigneten Integrationsweg aussuchen, um die Rechnung möglichst einfach zu machen. Das Potential entspricht hier der Arbeit, die gegen die Kraft verrichtet werden muss, um den Massepunkt von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} zu bringen. Wegen der Unbestimmtheit des Potentials kann dieses in dem beliebig gewählten Bezugspunkt zu Null gesetzt werden

$$U(\mathbf{r}_0) = 0 \Rightarrow U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' .$$

Das Potential kann man sich als eine Art Gebirge vorstellen. Hier wird jeder Koordinate ein spezifischer Funktionswert zugeordnet. Dies ist vergleichbar zu einem Höhenprofil, welches zweidimensionalen Koordinaten eine dritte skalare Größe, die Höhe zuordnet. In topographischen Karten gilt $dU = 0$ für die Linien konstanter Höhe (siehe Abb. 31). Im dreidimensionalen Raum sind dies Flächen mit einem konstanten Potential. Man spricht dann von Äquipotentialflächen. Für diese gilt

$$U = \text{const.} \Rightarrow dU = 0 \text{ auf Fläche.}$$

Es gib also keine Änderung des Potentials auf dieser Fläche. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} dU &= \text{grad } U \cdot d\mathbf{r} \\ dU = 0 &\Rightarrow d\mathbf{r} \perp \text{grad } U \Rightarrow d\mathbf{r} \perp \mathbf{F} \end{aligned} \quad (118)$$

wobei $d\mathbf{r}$ ein Linienelement in der Fläche ist. Wir erkennen daraus, dass die Kraft senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht. An einem Massepunkt, der sich auf einer Äquipotentialfläche bewegt, wird keine Arbeit verrichtet.

Beispiele für konservative Kräfte:

Gravitationskraft, Coulomb-Kraft: $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}$,
 harmonische Kraft $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2$ (s. harmonischer Oszillator).

Die Lorentzkraft, welche ein geladenes Teilchen in einem Magnetfeld erfährt, ist ein Spezialfall:

$$\mathbf{F} = q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F} = \dot{\mathbf{r}} \cdot q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = 0$$

Die Lorentzkraft leistet auf geschlossenen Wegen in einem zusammenhängenden Gebiet keine Arbeit, da $\mathbf{F} \perp \dot{\mathbf{r}}$. Wegen ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit lässt sie sich jedoch nicht als Gradient einer skalaren Funktion ausdrücken. Deshalb wird sie in der Literatur meist als nicht-konservativ bezeichnet.

5.3.2 Nichtkonservative (dissipative) Kräfte

Wir wollen im Folgenden kurz explizit zeitabhängige Kräfte diskutieren

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) .$$

Diese sind nur ein Beispiel für eine dissipative Kraft. Auch wenn für solche Kräfte die Rotation verschwindet

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0$$

und ein explizit zeitabhängiges Potential existiert,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = - \text{grad } U(\mathbf{r}, t) ,$$

gilt keine Energieerhaltung. Ein solches Kraftfeld ist nicht konservativ. Man spricht aber trotzdem von einer Potentialkraft. Dies kann man wie folgt begründen:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} = - \text{grad } U(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} , \end{aligned} \quad (119)$$

wobei wir von der Einsteinschen Summenkonvention ausgehen und eine virtuelle Null dazu addiert haben. Nun verwenden wir $-\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{dU}{dt}$, so dass wir schreiben können

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Wir sehen hier, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie bestimmt wird durch die partielle Zeitableitung des Potentials. Dem Massepunkt wird somit Energie zugeführt bzw. entzogen.

Dissipative Kräfte sind allgemein charakterisiert durch $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ oder rot $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$. Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{kons.}}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{diss.}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t); \mathbf{F}_{\text{kons.}}(\mathbf{r}) = -\text{grad } U(\mathbf{r}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}T &= -\text{grad } U \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dt} + \mathbf{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(T + U) &= \mathbf{F}_{\text{diss.}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = P_{\text{diss.}} \end{aligned} \quad (120)$$

Beim Vorgang der Dissipation wird mechanische Energie in andere Energieformen umgewandelt.

5.3.3 Energieerhaltung

Gleichung (120) besagt also: In Abwesenheit dissipativer Kräfte ist die mechanische Energie erhalten. Das ist *nicht* der 1. Hauptsatz der Thermodynamik, der auch nicht-mechanische Energieformen einschließt (Wärme), dann ist die Energie in jedem Fall erhalten. Energie, Arbeit und Potential haben die gleiche Einheit: $[E] = N \cdot m = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = J$ (Joule).

Die Energieerhaltung bedeutet eine starke Einschränkung der möglichen Teilchenbewegung, die man ohne Rechnung aus einer Skizze des Potentials erschliessen kann (Abb. 36, das Potential ist hier mit V bezeichnet). Wegen $T \geq 0$ sind Bereiche mit $> E$ (klassisch) verboten (in der Quantenmechanik kann es "Tunneleffekte" geben). Die Punkte mit $E = V$ sind Umkehrpunkte mit $T = 0$ und deshalb $v = \dot{x} = 0$. Die Extrema mit $V'(x) = 0$ sind mögliche Ruhepunkte. In einer Mulde um ein Minimum gibt es bei entsprechender kinetischer Energie Oszillationen. Wenn ein Teilchen gegen eine Potentialbarriere anläuft und dann umkehrt, spricht man von Streuung. Die Energieerhaltung erlaubt eine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - V(x) \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \quad (121)$$

Durch Separation der Variablen erhält man:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = dt \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} \quad (122)$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung des Integrals und Umkehrung von $t = t(x)$ nach $x = x(t)$.

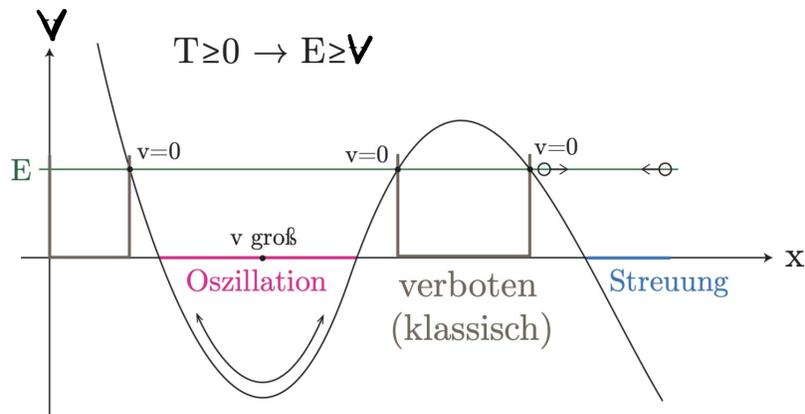


Abbildung 36: Aus der Form des Potentials $V(x)$ kann die Teilchenbewegung qualitativ vorhergesagt werden.

6 Schwingungen und harmonischer Oszillator

6.1 Harmonischer Oszillator

Der harmonische Oszillator ist ein Paradebeispiel der klassischen Mechanik. Er tritt im Zusammenhang mit einer rücktreibenden Kraft auf, die proportional zur Auslenkung ist, z.B. bei einem Massepunkt, der durch eine Feder mit Federkonstante k mit einem Fixpunkt verbunden ist (Abb. 37). Wird der Massepunkt unter Anwendung einer Kraft aus seiner Ruhelage bewegt, so sorgt die Rückstellkraft der Feder dafür, dass er bestrebt ist, in seine Ausgangslage zurückzukehren. Ein weiteres Beispiel ist das Fadenpendel (Abb. 38).

Auch in vielen anderen Teilgebieten der Physik werden dynamische Größen durch ähnliche Gleichungen beschrieben. Etwa der Strom in einem elektrischen Schwingkreis, der aus Kondensator und Spule besteht. In der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie spielt der harmonische Oszillator ebenfalls eine wichtige Rolle. Charakteristisch für den harmonischen Oszillator ist eine lineare Rückstellkraft bei hinreichend kleiner Auslenkung. Das zu der konservativen Kraft gehörende Potential ist dann quadratisch in der Auslenkung.

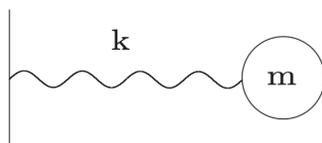


Abbildung 37: Massepunkt, der durch eine Feder mit Federkonstante k mit einem Fixpunkt verbunden ist.

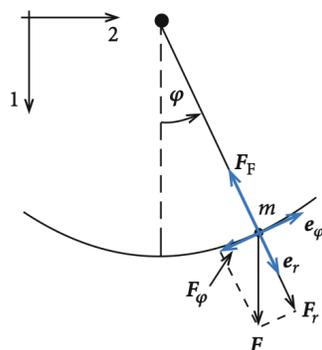


Abbildung 38: Fadenpendel in Polarkoordinaten. *Quelle: Nolting*

Für die Rückstellkraft der Anordnung in Abb. 37 gilt

$$F = -kx, \quad (123)$$

das zugehörige Potential ist dann

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (124)$$

Mit Hilfe des zweiten Newtonschen Axioms ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (125)$$

Für das Fadenpendel der Länge l in Abb. 38 mit $r = l = \text{const.}$ gilt für die Bewegung in Richtung \mathbf{e}_ϕ

$$ml\ddot{\phi} = -mg \sin \phi \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0. \quad (126)$$

Für kleine Auslenkungen des Pendels können wir die Näherung $\sin \phi \approx \phi$ verwenden. Dann lautet Glg. (126)

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (127)$$

Um Gleichungen der Form (125) oder (127) zu lösen, machen wir den Exponentialansatz

$$\begin{aligned} \phi(t) = Ae^{\alpha t} &\Rightarrow Ae^{\alpha t} (\alpha^2 + \omega_0^2) = 0 \\ \Rightarrow \alpha^2 = -\omega_0^2 &\Rightarrow \alpha = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_i \omega_0 \end{aligned} \quad (128)$$

Die imaginäre Zahl $i = \sqrt{-1}$ führt uns auf komplexen Zahlen.

6.1.1 Mathematischer Einschub: Komplexe Zahlen

Die imaginäre Einheit i ist definiert als

$$i = \sqrt{-1} \quad \rightarrow \quad i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ setzt sich zusammen aus einem Realteil und einem Imaginärteil:

$$z = x + iy$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. In der komplexen Zahlenebene, aufgespannt durch x und y , kann z als Vektor mit Betrag $|z|$ und Winkel φ verstanden werden, wie in Abb. 39 dargestellt.

Für den Betrag von z gilt:

$$|z|^2 = x^2 + y^2,$$

für den Winkel (auch *Argument* oder *Phase* genannt) gilt:

$$\varphi =: \arg(z) = \arctan \frac{y}{x} \quad (x > 0)$$

Für $e^{i\varphi}$ ergibt sich folgende Taylorreihe:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + (i\varphi) + \frac{1}{2}(i\varphi)^2 + \frac{1}{6}(i\varphi)^3 + \dots \\ &= 1 + i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{6}i\varphi^3 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots\right) + i \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots\right) \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned} \quad (129)$$

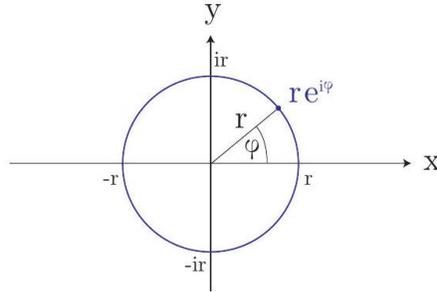


Abbildung 39: Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten

Gleichung (129) wird auch *Eulersche Formel* genannt. Setzt man in dieser $\varphi = \pi$, so findet man

$$e^{i\pi} = -1 .$$

Mit $|z| = r$ gilt

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$$

und mit der Eulerschen Formel erhält man dann die *Polardarstellung* einer komplexen Zahl (siehe Abb. 39):

$$z = re^{i\varphi} . \tag{130}$$

Für die komplex konjugierte Zahl $z^* = x - iy$ ergibt sich die Polardarstellung

$$\begin{aligned} z^* &= x - iy = r \cos \varphi - ir \sin \varphi = r \cos(-\varphi) + ir \sin(-\varphi) \\ &= re^{-i\varphi} \end{aligned} \tag{131}$$

Die Beträge stimmen also überein, aber die Winkel sind gegensätzlich. Die Zahlen $e^{i\varphi}$ liegen auf dem Einheitskreis, es gilt

$$\begin{aligned} zz^* &= re^{i\varphi} re^{-i\varphi} = r^2 e^{i\varphi - i\varphi} = r^2 , \\ |e^{i\varphi}| &= \sqrt{e^{i\varphi} e^{-i\varphi}} = 1 . \end{aligned} \tag{132}$$

Aus

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \tag{133}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \tag{134}$$

ergibt sich die “Umkehrung” der Euler-Formel

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\end{aligned}\quad (135)$$

Jede komplexe Zahl ist als Funktion von φ ist also periodisch mit der Periode 2π :

$$re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2k\pi)}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (136)$$

Es gelten folgende Rechenregeln für zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$:

- (i) Addition: $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$
- (ii) Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- (iii) Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(-x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Die n -te Potenz einer komplexen Zahl ist gegeben durch

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

Es gilt also

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi),$$

dies ist bekannt als Satz von Moivre.

Logarithmus einer komplexen Zahl:

$$w = \ln z = \ln |z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Der komplexe Logarithmus ist also nicht eindeutig, siehe Abb. 40, er enthält unendlich viele *Blätter*. Um Eindeutigkeit zu erreichen, schränkt man w auf einen Streifen in der komplexen Zahlenebene ein. Für den sogenannten *Hauptwert* des Logarithmus verwendet man den Streifen

$$\begin{aligned}S &= \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \Im(w) \leq \pi\}, \\ \Rightarrow w = \ln z &= \ln |z| + i \arg(z), \quad -\pi < \Im(w) \leq \pi.\end{aligned}\quad (137)$$

Dabei bezeichnet \Im den Imaginärteil. Dann gilt z.B.

$$\ln(-5) = \ln(5 \cdot e^{i\pi}) = \ln 5 + \ln e^{i\pi} = \ln 5 + i\pi.$$

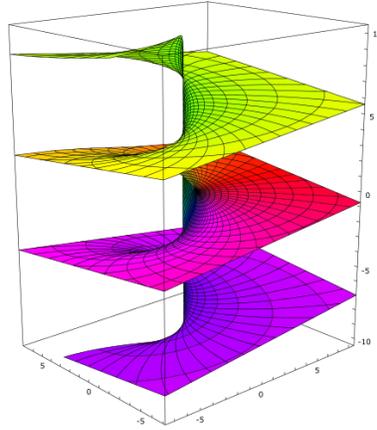


Abbildung 40: Darstellung des Imaginärteils der komplexen Logarithmusfunktion. *Image: mathpedia.*

6.1.2 Freier linearer harmonischer Oszillator

Wir kommen nun zurück zum eindimensionalen freien harmonischen Oszillator, wo sich der Massepunkt nur aufgrund der Rückstellkraft bewegt, die linear in der Auslenkung ist, beschrieben durch Gleichung (125):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (138)$$

Dabei ist ω_0 die *Eigenfrequenz* des Oszillators. Charakteristisch für den *harmonischen* Oszillator ist die Unabhängigkeit der Frequenz von der Amplitude der Schwingung.

Der Lösungsansatz

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \quad (139)$$

liefert

$$\alpha_{\pm} = \pm i \omega_0 . \quad (140)$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$x(t) = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t} \quad (141)$$

Da $x(t)$ reell sein muss, können die Koeffizienten A_{\pm} nicht beliebig sein. Aus der Forderung $x(t) \stackrel{!}{=} x^*(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t} &\stackrel{!}{=} A_+^* e^{-i\omega_0 t} + A_-^* e^{i\omega_0 t} \\ \Rightarrow A_+ &= A_-^* . \end{aligned} \quad (142)$$

Mit der Eulerschen Formel und der Substitution $A_+ = a + ib$ erhalten wir dann

$$x(t) = 2a \cos \omega_0 t - 2b \sin \omega_0 t . \quad (143)$$

Die Parameter a und b werden durch Anfangsbedingungen festgelegt. Beispiel: zur Zeit $t = 0$ sei der Oszillator um $x = x_0$ ausgelenkt und werde dann losgelassen. Dann gilt $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ und damit $2a = x_0, b = 0$, also $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$.

6.1.3 Harmonischer Oszillator mit Reibung

Wir berücksichtigen nun zusätzlich noch Reibung in Form von Stokes'scher Reibung (proportional zur Geschwindigkeit, $\alpha \dot{x}$). Man kann sich z.B. eine Anordnung wie in Abb. 42 vorstellen, aber ohne periodischen äusseren Antrieb). Die Reibungskraft wirkt der Beschleunigung entgegen, so dass die Bewegungsgleichung gegeben ist durch

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}. \quad (144)$$

Eine nicht-mechanische Realisierung dieser Situation ist ein elektrischer Schwingkreis, bestehend aus einer Spule mit der Selbstinduktion L , einem Kondensator der Kapazität C und einem Ohmschen Widerstand R . Der fließende Strom I genügt dann der Differentialgleichung

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0 . \quad (145)$$

Dividieren wir Glg. (144) durch m , erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \beta = \frac{\alpha}{2m} > 0 . \quad (146)$$

Mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

erhalten wir

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

und finden

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} . \quad (147)$$

Für $\beta^2 \neq \omega_0^2$ haben wir zwei linear unabhängige Lösungen. Die allgemeine Lösung ist also gegeben durch

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \quad (148)$$

wobei a_1 und a_2 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Zur genaueren Untersuchung der Lösung unterscheiden wir drei Fälle: schwache Dämpfung, starke Dämpfung und kritische Dämpfung.

(a) Schwache Dämpfung - Schwingfall

Bei schwacher Dämpfung ist die Dämpfung klein gegenüber der Frequenz ω_0 , also

$$\beta < \omega_0$$

Das Argument der Wurzel ist damit negativ, und wir erhalten eine komplexe Lösung,

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega, \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (149)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\beta t} (a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) \quad (150)$$

Es handelt sich also um eine Schwingung mit kleinerer Frequenz ($\omega < \omega_0$) und zeitlich exponentiell abklingender Amplitude.

Wir wählen die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Einsetzen der ersten Bedingung in die allgemeine Lösung Glg. (150) liefert

$$x_0 = a_1 + a_2, \quad v_0 = -\beta(a_1 + a_2) + i\omega(a_1 - a_2) = -\beta x_0 + i\omega(a_1 - a_2).$$

Dies liefert

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (151)$$

Diese Darstellung ist die Überlagerung von zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz, aber verschiedenen Amplituden $A_1 = x_0, A_2 = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}$. Sie kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t} \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \left(\frac{x_0}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \cos \omega t + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega \sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \sin \omega t \right) \\ &=: e^{-\beta t} A (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t). \end{aligned} \quad (152)$$

Dabei sind die maximale Amplitude A und die Phasenverschiebung φ definiert durch

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{x_0^2 \omega^2 + (v_0 + \beta x_0)^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{x_0}{A}, \quad \cos \varphi = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega A} \Rightarrow \varphi = \arctan \left(\frac{\omega x_0}{v_0 + \beta x_0} \right), \quad (153)$$

dann gilt unter Verwendung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$x(t) = A e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (154)$$

Die Amplitude der Schwingung (auch *Einhüllende* der gedämpften Schwingung genannt) ist gegeben durch

$$A e^{-\beta t}, \quad (155)$$

sie ist exponentiell gedämpft. Begriffe wie Frequenz und Schwingungsdauer sind deshalb nicht eindeutig definiert. Periodisch sind lediglich die Nulldurchgänge im zeitlichen Abstand $\tau/2$, wobei

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

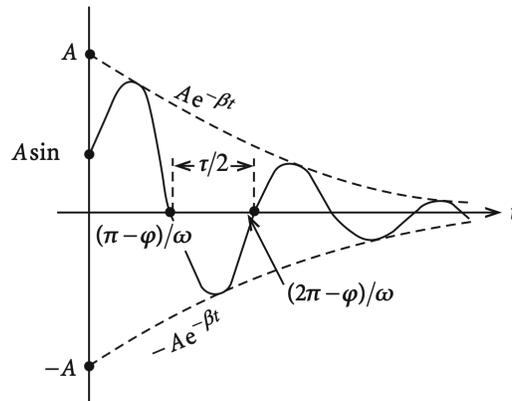


Abbildung 41: Zeitabhängigkeit der Amplitude beim schwach gedämpften harmonischen Oszillator. *Quelle: Nolting.*

(b) Starke Dämpfung - Kriechfall

Starke Dämpfung bedeutet, die Dämpfung ist groß gegenüber der Frequenz ω_0 , also

$$\beta > \omega_0 .$$

In diesem Fall ist das Argument der Wurzel positiv, und wir erhalten die zwei reellen Lösungen

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\beta \pm \omega', \quad \text{mit } \omega' = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta \\ x(t) &= e^{-\beta t} \left(a_1 e^{\omega' t} + a_2 e^{-\omega' t} \right) . \end{aligned} \quad (156)$$

Die Lösungen $\lambda_{1,2}$ sind beide negativ, deshalb ist das System wesentlich schneller gedämpft und nicht schwingungsfähig. Mit denselben Anfangsbedingungen wie im Fall (a) finden wir

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega'} \right) \\ a_2 &= \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega'} \right) . \end{aligned} \quad (157)$$

Es erfolgt ein Nulldurchgang zur Zeit t_N , wenn

$$\frac{a_1}{a_2} = -e^{-2\omega' t_N} \Rightarrow t_N = -\frac{1}{2\omega'} \ln \left(-\frac{a_1}{a_2} \right) \quad (158)$$

Da $t_N > 0$ sein muss, müssen für einen Nulldurchgang die Anfangsbedingungen also so sein, dass

$$\frac{a_1}{a_2} < 0, \quad \left| \frac{a_1}{a_2} \right| < 1$$

erfüllt werden kann.

(c) Kritische Dämpfung - Aperiodischer Grenzfall

Dies ist der Fall, für welchen gilt

$$\beta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0 ,$$

so dass wir nur eine Lösung für die Gleichung (147) erhalten,

$$\lambda_{1,2} = -\beta .$$

Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung benötigen wir jedoch zwei Lösungen. Der Ansatz

$$x(t) = \mathcal{A}(t)e^{-\beta t} \quad (159)$$

führt zu $\mathcal{A}(t) = a_1 + a_2 t$ und nach Einsetzen der Anfangsbedingungen zu

$$x(t) = e^{-\beta t} (x_0 + (v_0 + \beta x_0) t) \quad (160)$$

Ein Nulldurchgang findet noch statt, wenn die Anfangsbedingungen so gewählt werden, dass

$$t_N = -\frac{x_0}{v_0 + \beta x_0} \quad (161)$$

mit $t_N > 0$ realisiert werden kann.

6.2 Erzwungene Schwingungen

Wir betrachten nun den Fall, dass wir zusätzlich eine äußere zeitabhängige Kraft $\mathbf{F}(t)$ haben. Diese soll in x -Richtung wirken. Wir haben dann die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\alpha\dot{x} - kx + F(t) \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{1}{m}F(t) . \end{aligned} \quad (162)$$

6.2.1 Harmonische Anregung

Wir untersuchen zunächst den Fall, in dem die äußere Kraft eine periodische Kraft ist:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) . \quad (163)$$

Sie ist charakterisiert durch ihre Amplitude F_0 und die Kreisfrequenz ω . Eine entsprechende Anordnung ist skizziert in Abb. 42. Ein reales Beispiel ist ein Elektron in einem Festkörper, das durch ein elektrisches Feld zu harmonischen Oszillationen angeregt wird (Resonanzfluoreszenz für $\omega \approx \omega_0$). Um die Differentialgleichung für den getriebenen harmonischen Oszillator mit einem Exponentialansatz lösen zu können, setzen wir die Lösung ins Komplexe fort:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (164)$$

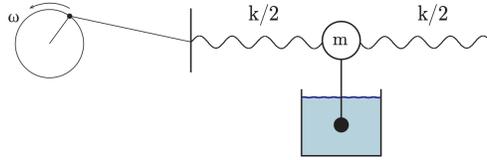


Abbildung 42: Oszillator mit Reibung und harmonischem Antrieb. *Quelle: Schwarz.*

Als reelle Lösung nehmen wir dann $x(t) = \Re(z(t))$ (\Re bezeichnet den Realteil der komplexen Zahl z).

Die allgemeine Lösung ist die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_0(t)$$

$x_{\text{hom}}(t)$ entspricht $F_0 = 0$, also dem gedämpften harmonischen Oszillator ohne Anregung aus Kapitel 6.1.3. Diese zerfällt exponentiell, also wird nach einem Einschwingvorgang der getriebene Teil $x_0(t)$ dominieren. Mit dem Exponentialansatz

$$z(t) = Ae^{i\omega t} = |A|e^{i\varphi}e^{i\omega t} \quad (165)$$

bekommen wir also für die reelle Lösung nach langer Zeit:

$$x(t) \approx x_0(t) = |A| \Re(e^{i\varphi}e^{i\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \varphi) \quad (166)$$

Wir benötigen also den Betrag $|A|$ und die Phase φ von A . Wir setzen den

Exponentialansatz (165) in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left[A \left(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2 \right) - \frac{F_0}{m} \right]}_{=0} e^{i\omega t} = 0 \\
 \Rightarrow A &= -\frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) - 2i\beta\omega} = -\frac{F_0}{m} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\beta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \\
 \Rightarrow |A| &= \sqrt{AA^*} = \frac{F_0}{m} \left(\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}{\left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \right)^2} \right)^{1/2} \\
 \Leftrightarrow |A| &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} . \tag{167}
 \end{aligned}$$

Grenzfälle:

$$|A| \rightarrow \begin{cases} \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} & \omega \rightarrow 0 \\ \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2} & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \tag{168}$$

Im Limes $\beta \rightarrow 0$ kommt es zur *Resonanzkatastrophe*, wenn die treibende Frequenz ω der Eigenfrequenz ω_0 entspricht. Dieses Phänomen wird z.B. für grosse Schwingungen von Brücken verantwortlich gemacht, u.a. auch für den Einsturz der Tacoma-Narrows Brücke 1940 in Washington State (durch Windeinfluss als treibende Kraft).

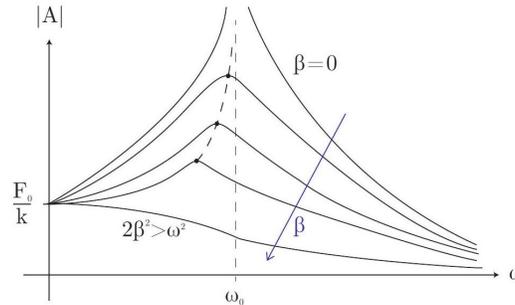


Abbildung 43: Amplitude des getriebenen harmonischen Oszillators.

Nun betrachten wir noch die Phasenverschiebung φ der Schwingungsampli-

tude relativ zur treibenden Kraft. Wir haben

$$\begin{aligned}\Re(A) &= -\frac{m}{F_0}|A|^2(\omega^2 - \omega_0^2) \\ \Im(A) &= -2\frac{m}{F_0}|A|^2\beta\omega < 0 \\ \varphi &= \arctan \frac{\Im(A)}{\Re(A)} = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \Rightarrow -\pi \leq \varphi \leq 0, \quad (169)\end{aligned}$$

wobei in der letzten Umformung verwendet wurde, dass $\Im(A)$ negativ ist.

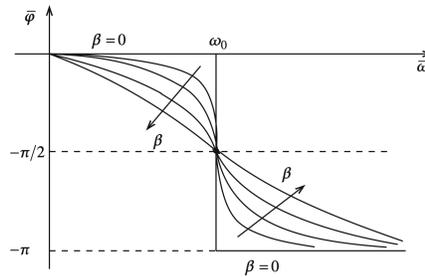


Abbildung 44: Phasenverschiebung zwischen der Schwingungsamplitude des getriebenen harmonischen Oszillators und der erregenden Kraft als Funktion der Frequenz der äußeren Kraft. *Quelle: Nolting.*

Die Amplitude hinkt also hinter der Kraft her: das Maximum der Auslenkung wird erst nach dem Maximum der Kraft erreicht. Für $\omega = \omega_0$ ist $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, unabhängig von β . Beim ungedämpften Oszillator springt φ an der Stelle $\omega = \omega_0$ unstetig von 0 auf $-\pi$, siehe Abb. 44.

6.2.2 Beliebige Anregung

Im folgenden soll der harmonische Oszillator für eine externe Kraft mit beliebiger zeitlicher Abhängigkeit kurz diskutiert werden, was uns zum Konzept der Fourier-Reihe bringt.

Lösung durch Fourierzerlegung

Um die Reaktion des Systems auf eine treibende Kraft mit beliebiger Zeitabhängigkeit zu beschreiben, zerlegen wir die Kraft in eine *Fourier-Reihe* und

schreiben sie somit als eine Summe von Kräften, die jeweils zeitharmonisch sind:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t} \quad (170)$$

Da das Superpositionsprinzip gilt, kann die Reaktion des Systems auf zeitharmonischen Kräfte, die wir schon berechnet haben, verwendet werden, um so die Lösung für den harmonischen Oszillator in Antwort auf eine beliebige zeithabhängige Kraft zu erhalten. Der Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich ist auch in anderen Zusammenhängen nützlich und wird **Fouriertransformation** genannt.

Mathematischer Einschub: Fouriertransformation

Mit Hilfe der Fouriertransformation kann eine beliebige Funktion in ein Spektrum harmonischer Schwingungen zerlegt werden. Man geht dabei von der Fourierreihenentwicklung einer periodischen Funktion $f(t)$ mit der Periode T aus. Diese lässt sich schreiben als

$$f(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \quad (171)$$

Die Fourierkoeffizienten A_n und B_n lassen sich berechnen durch

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned} \quad (172)$$

Abb. 45 zeigt die Entwicklung einer Stufenfunktion in eine Fourier-Reihe. Man kann diese Funktion also durch unendliche viele harmonische Schwingungen darstellen.

Die Fourierreihenentwicklung kann auch mit Hilfe der Exponentialfunktion beschrieben werden:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = n\frac{2\pi}{T} \\ f_n &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega_n t} \end{aligned} \quad (173)$$

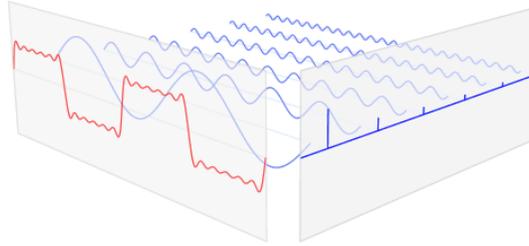


Abbildung 45: Darstellung einer Stufenfunktion durch eine Fourier-Reihe.
Quelle: Wikipedia

Durch den Grenzübergang zu einer unendlich ausgedehnten Periode, $T \rightarrow \infty$, kann dieser Formalismus auf beliebige nichtperiodische Funktionen erweitert werden. In diesem Fall sind die harmonischen Schwingungen, durch welche die Funktion beschrieben wird, nicht mehr diskret, sondern gehen in ein kontinuierliches Spektrum über, das *Fourier-Spektrum*. Wir schreiben im Limes $T \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \longrightarrow \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega, \quad f_n \longrightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \tilde{f}(\omega)$$

und damit

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \\ \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (174)$$

Dabei ist $\tilde{f}(\omega)$ die **Fouriertransformierte** von $f(t)$. Die Wahl des Vorfaktors der Fouriertransformierten ist nicht einheitlich in der Literatur, man findet auch eine symmetrische Aufteilung in zwei Vorfaktoren $1/\sqrt{2\pi}$.

Beispiel: Stufenfunktion

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases} \\ 2\pi \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-a}^{t=a} = -\frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}] \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega a) & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2a & \text{für } \omega = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (175)$$

Es gilt also z.B. (links steht die Funktion, rechts ihre Fouriertransformierte):

$$\begin{aligned} \frac{d^n f(t)}{dt^n} &\triangleq (i\omega)^n \tilde{f}(\omega) \\ f(t - t_0) &\triangleq e^{-i\omega t_0} \tilde{f}(\omega) \\ f(at) &\triangleq \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ \delta(t - t_0) &\triangleq \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t_0} \end{aligned} \quad (176)$$

Die erste der obigen Beziehungen macht deutlich, dass die Fouriertransformation es erlaubt, Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen zu überführen und im Fourierraum zu lösen.

Die δ -Distribution

In Glg. (176) kommt die sogenannte δ -Distribution vor. Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen ("Funktionale"), welche nur zusammen mit sogenannten *Testfunktionen* definiert sind. Die Delta-Distribution ordnet jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion f ("Testfunktion") eine reelle oder komplexe Zahl $\delta(f) = f(0)$ zu, also die Auswertung der Funktion an der Stelle Null:

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) . \quad (177)$$

Die δ -Distribution hat folgende Eigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx' = 1, \quad \delta(x) = \delta(-x),$$

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right|_{x_i}} \delta(x - x_i), \quad (178)$$

dabei sind die x_i die Nullstellen der Funktion $g(x)$: $g(x_i) = 0$. Damit gilt insbesondere

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Es gilt also allgemein:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' \quad (179)$$

Fortsetzung der Lösung des Oszillators bei beliebiger Anregung

Mit der Zerlegung der Kraft in eine Fourierreihe erhalten wir also folgende Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}$$

Analog wird die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch eine Reihe dargestellt,

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i\omega_n t}$$

Die Amplituden b_n lassen sich dann berechnen durch

$$(-\omega_n^2 + 2i\beta\omega_n + \omega_0^2) b_n = f_n. \quad (180)$$

Wir haben also eine beliebige zeitabhängige Funktion in harmonische Oszillationen zerlegt. Da wir ein lineares System haben, in dem Superposition gilt, kann die Antwort dieses Systems auf jede dieser zeitharmonischen Oszillationen berechnet werden. Die Gesamtantwort des Systems ist dann die Summe dieser jeweiligen Lösungen.

6.2.3 Kraftstoß, Greensche Funktionen

Eine alternative Art der Zerlegung besteht in der Beschreibung durch eine Sequenz von impulsförmigen Anregungen. Jeder Impuls entspricht dabei einem Kraftstoß, welcher in einem unendlich kleinen Zeitintervall eine Kraft ausübt. In der Gesamtheit betrachtet entspricht dies gerade der Kraft zu einer bestimmten Zeit t .

Die Antwort des Systems auf diese impulsförmige (δ -förmige) Anregung wird als die **Greensche Funktion** bezeichnet. Ähnlich wie die Fouriertransformation findet die Idee der Greenschen Funktion eine weit verbreitete Anwendung in der Physik.

Zur Bestimmung der Greenschen Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators betrachten wir einen Kraftstoß, der zunächst mit Hilfe einer die δ -Distribution approximierenden Funktion beschrieben wird. Dazu wählen wir eine Kastenfunktion $\delta_\epsilon(t)$ definiert als

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } |t| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ strebt diese Funktion zu einer δ -Distribution,

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$$

Für einen Stoß zum Zeitpunkt $t = t'$ lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = \delta(t - t') . \quad (181)$$

Diese Gleichung soll gelöst werden mit den Anfangsbedingungen

$$x(t'_-) = 0 \text{ und } \dot{x}(t'_-) = 0 ,$$

wobei $t'_- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t' - \epsilon)$ ist. Dieser Zeitpunkt bezeichnet also die Zeit unmittelbar vor dem Stoß. Der Massepunkt soll in Ruhe sein und sich am Gleichgewichtspunkt befinden, er wird dann angestoßen durch den Impuls zum Zeitpunkt $t = t'$. Die Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch die gesuchte Greensche Funktion. Die Greensche Funktion ist eine Funktion der Zeit t und hängt parametrisch vom Zeitpunkt t' des Stosses ab. Deshalb muss sie verschwinden zu allen Zeiten vor dem eigentlichen Stoß,

$$G(t; t') = 0 \text{ für } t < t' ,$$

denn der Massepunkt kann nicht in Bewegung sein, bevor er angestoßen wird (Kausalität). Weiterhin gilt im von uns betrachteten Fall das Prinzip der Translationsinvarianz unter Zeittranslation. Die Greensche Funktion hängt nicht von der absoluten Zeit ab, sondern nur von der Zeitdifferenz zwischen t und t' . Während Kausalität für die Greensche Funktion jedweder Art gilt, muss diese Translationsinvarianz nicht immer gelten. Weiterhin gilt, dass die Greensche Funktion eine reell-wertige Funktion sein muss, da die physikalische Größe, die sie beschreibt, die Auslenkung, ebenfalls reell ist. Allgemein gilt

$$D_t G(t - t') = \delta(t - t')$$

mit D_t einem beliebigen linearen Differentialoperator in der Zeit. Zu jedem linearen Differentialoperator gibt es eine eine Greensche Funktion.

In unserem speziellen Beispiel betrachten wir also:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 + 2\beta \frac{d}{dt} \right] G(t - t') = \delta(t - t')$$

Für $t > t'$ gilt dann

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 + 2\beta \frac{d}{dt} \right] G(t - t') = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung haben wir früher diskutiert (freier, gedämpfter, harmonischer Oszillator im Schwingfall hier jetzt ohne explizite Anfangsbedingungen) und sie lautet

$$G(t - t') = e^{-\beta(t-t')} \left(a_1 \cos[\omega(t - t')] + a_2 \sin[\omega(t - t')] \right)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Um die Konstanten der Anfangsbedingungen zu bestimmen, integrieren wir als nächstes die Bewegungsgleichung über ein infinitesimales Intervall um der Zeitpunkt $t = t'$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 + 2\beta \frac{d}{dt} \right] G(t - t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t - t') \quad (182)$$

Nutzen wir aus, dass $G(t)$ für $t \rightarrow t'$ stetig und beschränkt sein muss, und dass $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(-\epsilon) = 0$, so finden wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dt} G(t - t') \right]_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} = 1 \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(\epsilon) = 1. \quad (183)$$

Als zweite Anfangsbedingung erhalten wir aus der Stetigkeit der Greenschen Funktion

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\epsilon) = 0 .$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten zu

$$a_1 = 0 \text{ und } a_2 = \frac{1}{\omega}$$

Die gesamte Greensche Funktion lautet damit

$$G(t - t') = \begin{cases} \frac{1}{\omega} e^{-\beta(t-t')} \sin[\omega(t-t')] & \text{für } t > t' \\ 0 & \text{für } t < t' \end{cases} \quad (184)$$

Die Auslenkung des Massepunktes in Folge einer beliebigen zeitlich abhängigen Kraft berechnet sich damit zu

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t') \quad (185)$$

Die Greensche Funktion beschreibt also die zeitlich abhängige Auslenkung nach einer impulsförmigen Anregung. Zu jedem Zeitpunkt wird diese Anregung durch die Kraft $f(t)$ beschrieben. Die Stärke ist gerade in dieser Funktion codiert, so dass die Greensche Funktion mit der entsprechenden Kraftamplitude gewichtet werden muss, um auf die Gesamtantwort zu kommen.

7 Zweiteilchensysteme (Zentralkraft)

Nun wollen wir uns mit Zweiteilchensystemen mit Zentralkraft beschäftigen. Unter einer Zentralkraft versteht man eine Kraft, die in jedem Punkt des Raumes nach einem festen Zentrum hin oder von diesem weg gerichtet ist. Zentralkräfte sind meistens konservative Gradientenfelder zu einem Zentralpotential, welches nur vom Betrag des Abstandes abhängt. Beispiele sind die Newton'sche Gravitationskraft im Schwerpunktsystem oder die Coulombkraft.

Wir betrachten ein sogenanntes Zweikörperproblem, man versteht darunter die Berechnung der Bewegung zweier Körper, die ohne zusätzliche äußere Einflüsse nur miteinander wechselwirken. Typische Beispiele sind zwei astronomische Objekte wie Doppelsterne oder Planet und Sonne, die durch das

gegenseitige Schwerefeld wechselwirken, oder zwei geladene Teilchen, die sich im gegenseitigen elektrostatischen Feld anziehen oder abstoßen. Die Kraft ist in diesen Beispielen umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Körper.

Bei Planetenbewegungen wird das Zweikörperproblem auch als *Keplerproblem* bezeichnet. Johannes Kepler hat mit den drei nach ihm benannten Gesetzen als erster die genaue Form der Bewegung für durch Gravitation gebundene Zweikörpersysteme angegeben. Die mathematische Herleitung der Keplerschen Gesetze aus dem Gravitationsgesetz wurde erstmals von Isaac Newton gefunden.

7.1 Zentralkräfte

Zentralkräfte sind Kräfte der Form

$$\mathbf{F} = f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \cdot \mathbf{e}_r \quad (186)$$

Für diese Kräfte ist das Drehmoment $\mathbf{M}=0$ und deshalb ist der Drehimpuls (bezogen auf das Kraftzentrum) konstant. Zentralkräfte in der allgemeinen Form (186) sind nicht notwendigerweise konservativ. Dass eine konservative Kraft \mathbf{F} nicht von $\dot{\mathbf{r}}$ und t abhängen darf, haben wir schon in Kapitel 5.3.1 besprochen. Wenn $f(\mathbf{r}) = f(r)$, also nur vom Betrag $|\mathbf{r}| = r$ abhängt, gilt immer

$$\mathbf{F} = f(r) \cdot \mathbf{e}_r \Rightarrow \mathbf{F} \text{ konservativ} \quad , \quad (187)$$

denn man kann dann zu $f(r)$ immer eine Stammfunktion finden, so dass

$$V(r) = - \int_{r_0}^r f(r') dr' \quad (188)$$

und damit

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = - \underbrace{\frac{dV}{dr}}_{-f(r)} \underbrace{\nabla_r}_{\mathbf{e}_r} = f(r) \mathbf{e}_r .$$

7.2 Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

Wir betrachten zwei Körper der Massen m_1 und m_2 an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 , siehe Abb. 46. Körper 2 übt auf Körper 1 die Kraft \mathbf{F}_{21} aus. Die Kraft wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Massen.

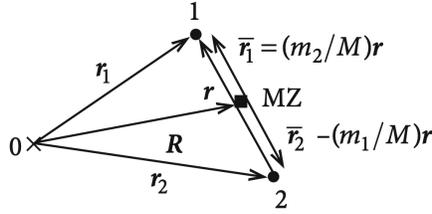


Abbildung 46: Definition von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. *Quelle: Nolting.*

Wir definieren die *Relativkoordinate* \mathbf{r} durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (189)$$

und die *Schwerpunktskoordinate* \mathbf{R} durch

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} . \quad (190)$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{r}_1 = \underbrace{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{r}}_1} + \underbrace{\frac{m_2}{M} \mathbf{r}}_{\bar{\mathbf{r}}_1}, \quad \mathbf{r}_2 = \underbrace{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{r}}_2} - \underbrace{\frac{m_1}{M} \mathbf{r}}_{\bar{\mathbf{r}}_2}, \quad M = m_1 + m_2 .$$

Zur Positionsbeschreibung der Massenpunkte sind $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ und (\mathbf{R}, \mathbf{r}) also äquivalent. Die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ sind jedoch gekoppelt, mit Hilfe der Relativ- und Schwerpunktskoordinaten können wir sie in einem abgeschlossenen System entkoppeln. Wir verwenden den *Schwerpunktsatz*:

Der Schwerpunkt eines Massenpunktsystems bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt sei und alle äußeren Kräfte nur auf ihn wirken.

Damit lautet die Bewegungsgleichung für \mathbf{R}

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext} \quad (191)$$

Für abgeschlossene Systeme gilt $\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}$.

Für die Relativbewegung gilt:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{ext}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} \\ &= \frac{\mathbf{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{ext}}{m_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{=:\frac{1}{\mu}} \mathbf{F}_{12} .\end{aligned}\quad (192)$$

Dabei ist

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (193)$$

die sogenannte *reduzierte Masse*.

In einem abgeschlossenen System ($\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}$) gilt für die Relativkoordinate \mathbf{r}

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12} \quad (194)$$

Die zwei Bewegungsgleichungen sind also entkoppelt, die Relativbewegung erfolgt so, als ob sich die reduzierte Masse μ im Zentralfeld \mathbf{F}_{12} bewegt. Man erhält effektiv ein Ein-Teilchen-System. Die Erhaltungssätze sind demnach wie für einen Massenpunkt.

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}T &= \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2}_{T_s} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2}_{T_r}\end{aligned}\quad (195)$$

Drehimpuls:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_r \\ \mathbf{L}_s &= M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{L}_r &= \sum_{i=1,2} m_i (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\end{aligned}\quad (196)$$

Potentielle Energie: In einem abgeschlossenen System $V_s = 0$, $V_r = V_{12}$, dann gilt für die Gesamtenergie $E = E_s + E_r$, $E_s = T_s$, $E_r = T_r + V_{12}$.

Systeme, die sich durch Erhaltungssätze auf eindimensionale Integrale reduzieren lassen, heißen *vollständig integrabel*. Das Drei-Körper-Problem ist i.a. nicht vollständig integrabel.

7.3 Die Keplerschen Gesetze

Die Keplerschen Gesetze folgen aus der Lösung eines Zwei-Körper-Problems mit der Gravitationskraft als Kraft zwischen den zwei massiven Objekten:

$$\begin{aligned}
 V_{12}(r) &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}, \quad \gamma \text{ Gravitationskonstante} \\
 \Rightarrow \mathbf{F}_{12} &= -\nabla V_{12} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\
 \Rightarrow \mu \ddot{\mathbf{r}} &= -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\gamma \mu M \frac{\mathbf{r}}{r^3}
 \end{aligned} \tag{197}$$

Es handelt sich also effektiv um ein Teilchen der Masse μ im Gravitationspotential von M , das sich mit dem Ortsvektor \mathbf{r} um den Ursprung bewegt. Wir verwenden m_2 =Sonnenmasse, m_1 =Planetenmasse. Für $m_1 \ll m_2$ gilt $\mu \simeq m_1, M \simeq m_2$. Wir verwenden im folgenden $\mu \equiv m$.

Die drei folgenden Gesetze sind nach dem Astronomen Johannes Kepler (1571–1630) benannt und waren einer der Ausgangspunkte für Newtons Entdeckung des Gravitationsgesetzes:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte.
2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

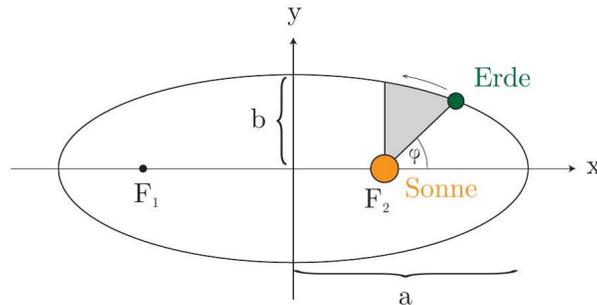


Abbildung 47: Kepler'sche Planetenbahnen. F_1 und F_2 sind die beiden Fokuspunkte der Ellipse. *Quelle: Schwarz.*

Wie wir sehen werden, sind diese drei Gesetze eine Konsequenz von Energie- und Drehimpulserhaltung, die für die Gravitationskraft gilt.

$$\mathbf{F}_G = -\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (198)$$

Dieses Kraftfeld besitzt das Potential

$$\mathbf{F}_G = -\nabla V(r) \text{ mit } V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (199)$$

Es handelt sich also um ein konservatives System, deshalb gilt Energieerhaltung, $T + V = E = \text{const.}$ Da die Gravitationskraft ausserdem eine Zentralkraft ist, gilt mit $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ auch Drehimpulserhaltung, $\mathbf{L} = \text{const.}$ Eine unmittelbare Konsequenz der Drehimpulserhaltung ist es, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = m \mathbf{r} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für eine Ebene. Da \mathbf{L} konstant ist, ändert sich diese Ebene nicht.

2. Kepler'sches Gesetz (Flächensatz)

Eine unmittelbare Konsequenz der Drehimpulserhaltung ist das 2. Kepler'sche Gesetz. Für die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche gilt:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + dt)| = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t) dt)| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)| dt \end{aligned} \quad (200)$$

Daraus folgt:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\mathbf{L}| = \text{const.}$$

Damit überstreicht der Radiusvektor (Fahrstrahl) des Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

1. Kepler'sches Gesetz (Ellipsensatz)

Wir betrachten nun die Bewegungsgleichung in der Ebene. Dazu bieten sich Polarkoordinaten an:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (201)$$

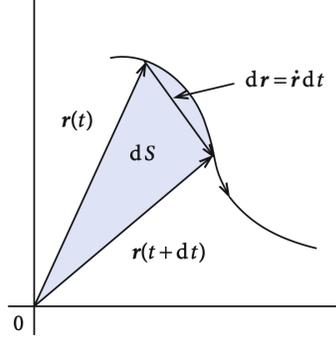


Abbildung 48: Vom Fahrstrahl überstrichenes Flächenelement dS . *Quelle: Nolting.*

Damit folgt für den Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m(r\mathbf{e}_r \times r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z \\ \Rightarrow L^2 &= m^2r^4\dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (202)$$

Unter Verwendung dieser Beziehung ergibt sich für die Energie:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \\ \text{mit } V_{\text{eff}}(r) &= V(r) + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \end{aligned} \quad (203)$$

Damit haben wir effektiv ein eindimensionales Problem erhalten, die Winkelanteile sind aufgrund der Drehimpulserhaltung eliminiert. Der dadurch entstehende Term $\frac{L^2}{2mr^2}$ heisst *Zentrifugalbarriere*, da er das Teilchen vom Ursprung fern hält.

Für negative Energien (“gebundene Zustände”) ist nur ein endlicher Wertebereich für den Betrag des Ortsvektors zugelassen. Dies ist z.B. zu berücksichtigen, wenn ein Satellit stets im Anziehungsbereich der Erde bleiben soll. Die Lösung erfolgt formal wie im eindimensionalen Fall, siehe Glg. (122):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))} = \frac{dr}{dt} \\ \Rightarrow t - t_0 &= \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} \Rightarrow r = r(t) \text{ nach Umkehrung.} \end{aligned} \quad (204)$$

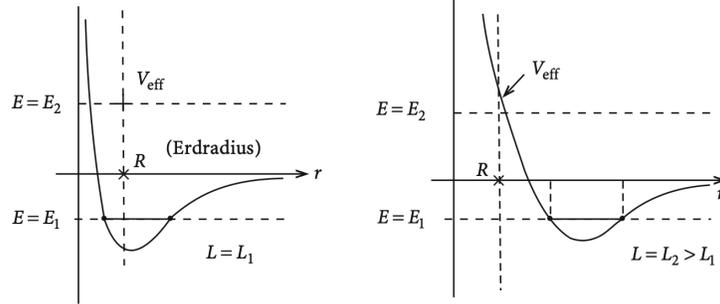


Abbildung 49: Das zum Gravitationspotential gehörige effektive Potential für zwei verschiedene Werte des Drehimpulses L . *Quelle: Nolting.*

Für $\varphi = \varphi(t)$ gibt es eine analoge Formel. Allerdings sind dies aufgrund der Form von $V_{\text{eff}}(r)$ komplizierte Integrale.

Der Lösungsweg ist einfacher mit folgendem Vorgehen:

- Wir betrachten $r = r(\varphi)$ statt $r = r(t)$. Damit wird der Fokus weniger auf die Dynamik als vielmehr auf die Geometrie der Bahnkurve gelegt.
- Wir definieren eine neue Variable $s = \frac{1}{r} = s(\varphi)$. Das effektive Potential wird dann ein Polynom in s .

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{mr^2}{L} = -\dot{r} \frac{m}{L} \quad (205)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s \quad (206)$$

Wir differenzieren nun obige Gleichung auf beiden Seiten nach φ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{L^2}{2m} \left[2 \frac{ds}{d\varphi} \frac{d^2s}{d\varphi^2} + 2s \frac{ds}{d\varphi} \right] - \alpha \frac{ds}{d\varphi} \\ \Rightarrow \frac{d^2s}{d\varphi^2} + s &= \frac{\alpha m}{L^2} =: \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (207)$$

Dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit konstanter äußerer Kraft. Die allgemeine Lösung ist uns also schon bekannt:

$$s(\varphi) = \underbrace{A \sin \varphi + B \cos \varphi}_{\text{Lsg. der homogenen DE}} + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{spez. Lsg. der inhom. DE}}$$

Die Konstanten A und B folgen aus den Anfangsbedingungen. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der sonnennächste Punkt (r minimal, s maximal) bei $\varphi = 0$ liegt. Dann folgt

$$\left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 = A$$

Mit $\varepsilon := kB$ ergibt sich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \varepsilon \cos \varphi) \quad (208)$$

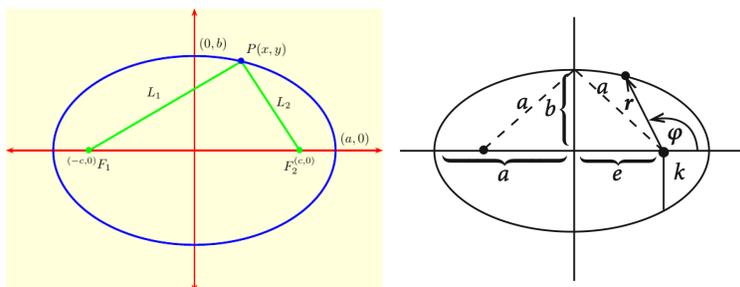


Abbildung 50: Parameter der Ellipse. L_1 und L_2 sind die Abstände des Punktes P zu den Fokuspunkten F_1 und F_2 . (Der Vektor $(c, 0)$ im linken Bild entspricht e im rechten Bild.)

Im folgenden werden wir zeigen, dass Glg. (208) für $0 < \varepsilon < 1$ die Bestimmungsgleichung für eine Ellipse ist (allgemeiner, bei beliebigen Werten $\varepsilon > 0$, für Kegelschnitte). Eine Ellipse ist dadurch charakterisiert, dass die Summe der Verbindungsstrecken zwischen irgendeinem Punkt P auf der Ellipse und den zwei Fokuspunkten F_1 und F_2 konstant ($= 2a$) ist, wobei a die große Halbachse der Ellipse darstellt. Sind L_1 und L_2 sind die Längen der Verbindungen von P zu den Fokuspunkten F_1 und F_2 (Abb. 50), so gilt also

$$L_1 + L_2 = 2a .$$

Die Sonne sei im Punkt F_2 (Abb. 47), also gilt $\mathbf{r} = \mathbf{L}_2$.

Für $P = (0, b)$ gilt $L_1 = L_2 = a$. Mit Pythagoras gilt dann $a^2 = e^2 + b^2$.

In kartesischen Koordinaten mit $\mathbf{r} = (x, y)$ (also auf den Koordinatenursprung bezogen, nicht auf den Brennpunkt)) gilt dann:

$$L_1^2 = (x + e)^2 + y^2, \quad L_2^2 = (x - e)^2 + y^2 \quad (209)$$

Aus obigen Gleichungen können wir eine Beschreibung der Ellipse mittels kartesischer Koordinaten herleiten. Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt:

$$L_1^2 - L_2^2 = 4ex = \underbrace{(L_1 + L_2)}_{2a} (L_1 - L_2) \Rightarrow L_1 - L_2 = \frac{2ex}{a}$$

Quadrieren beider Seiten liefert:

$$L_2^2 + L_1^2 - 2L_2L_1 = \frac{4e^2x^2}{a^2} \quad (210)$$

Ferner gilt wegen $L_1 + L_2 = 2a$:

$$(L_1 + L_2)^2 = 4a^2 \Rightarrow L_2^2 + L_1^2 + 2L_1L_2 = 4a^2 \quad (211)$$

Addition der Gleichungen (210) und (211) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{4e^2x^2}{a^2} + 4a^2 &= 2(L_1^2 + L_2^2) = 2(2y^2 + 2x^2 + 2e^2) \\ \Leftrightarrow a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2e^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - e^2) \end{aligned} \quad (212)$$

Unter Verwendung von $b^2 = a^2 - e^2$ erhält man die gesuchte Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

In Polarkoordinaten vom Mittelpunkt aus gilt:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ b \sin \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (213)$$

Für unsere Rechnung benötigen wir aber die Polarkoordinaten vom Brennpunkt aus: $r = r(\varphi)$ wobei $r = L_2$.

$$\begin{aligned}
L_1^2 - L_2^2 &= 4ex = 2a(L_1 - L_2) \\
\Rightarrow L_2 &= L_1 - \frac{2ex}{a} = (2a - L_2) - \frac{2ex}{a} \\
\Rightarrow L_2 &= a - \frac{e}{a}x = a - \frac{e}{a}(e + L_2 \cos \varphi) \\
\Rightarrow L_2 \left(1 + \frac{e}{a} \cos \varphi\right) &= a - \frac{e^2}{a} = \frac{b^2}{a}
\end{aligned} \tag{214}$$

Wir definieren die Exzentrizität ε durch:

$$\varepsilon := \frac{e}{a}.$$

Für die Exzentrizität gilt $0 < \varepsilon < 1$ (bei $\varepsilon \rightarrow 0$ nähert sich die Ellipse einem Kreis an und bei $\varepsilon \rightarrow 1$ einer Zigarrenform). Mit $r = L_2$ und $k = \frac{b^2}{a}$ erhalten wir nun die gesuchte Ellipsengleichung:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \varepsilon \cos \varphi) \tag{215}$$

Tatsächlich handelt es sich dabei um die allgemeine Gleichung für Kegelschnitte. Im Falle $\varepsilon > 1$ ergeben sich Hyperbeln und Parabeln, also die Streuzustände des Gravitationspotentials.

Die geometrischen Grössen können nun mit den physikalischen Grössen in Bezug gesetzt werden:

$$k = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{\alpha m}$$

Energie am sonnennächsten Punkt $r(\varphi = 0) = r_0 = a - e$:

$$\begin{aligned}
E(\varphi = 0) &= \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} = \alpha \left(\frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0} \right) \\
&= \alpha \left(\frac{(a^2 - e^2)}{2a(a - e)^2} - \frac{1}{(a - e)} \right) = -\frac{\alpha}{2a} < 0 \\
\Rightarrow a &= -\frac{\alpha}{2E}, \quad b = \sqrt{\frac{L^2 a}{\alpha m}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}
\end{aligned} \tag{216}$$

Die große Halbachse a ist also umgekehrt proportional zur mechanischen Gesamtenergie E . Da wir gebundene Zustände (Ellipsen) betrachten, gilt $E < 0$. Die kleine Halbachse b ist proportional zum Drehimpuls L .

3. Kepler'sches Gesetz

Dieses Gesetz folgt aus den ersten beiden. Wir wenden das 2. Kepler'sche Gesetz auf die in einem Umlauf überstrichene Fläche S an:

$$S = \pi ab = T \frac{L}{2m}$$

wobei πab die Ellipsenfläche und T die Umlaufzeit ist.

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2 4m^2}{L^2 a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 k}{L^2} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{M\gamma} = \text{const.}$$

Mit der Sonnenmasse M und der Gravitationskonstanten γ ist diese Konstante für alle Planeten gleich.