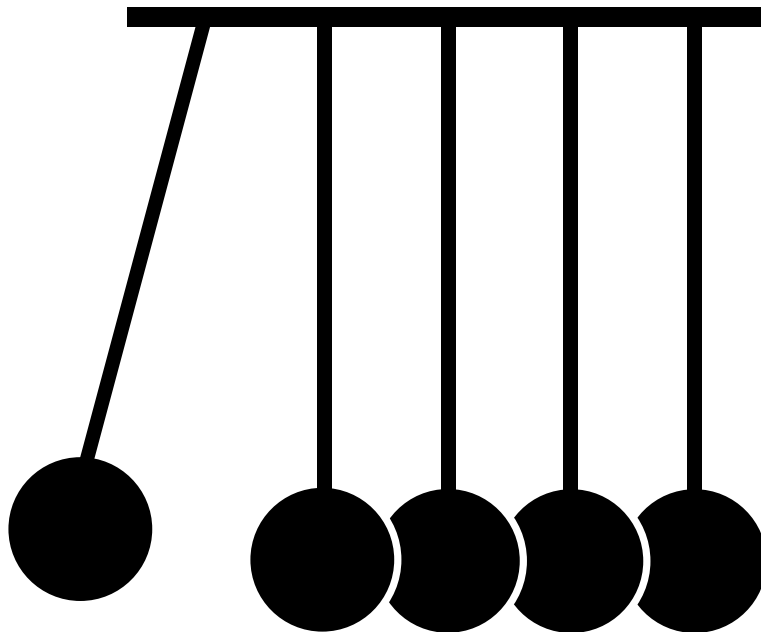


Vorlesungsskript

Klassische Theoretische Physik I (Einführung)



Prof. Dr. Anja Metelmann

KIT Wintersemester 2025/2026

Hinweis zur Erstellung und Nutzung dieses Skripts

Dieses Vorlesungsskript ist ausschließlich für den **internen Gebrauch** im Rahmen der Lehrveranstaltung bestimmt und nicht für eine öffentliche Veröffentlichung vorgesehen.

Dieses Vorlesungsskript wurde von der Autorin mit Unterstützung des KI-Sprachmodells *ChatGPT* (*OpenAI, GPT-5*) erstellt.

Alle Inhalte wurden nach bestem Wissen erstellt und überprüft, es kann jedoch keine Gewähr für Vollständigkeit oder Fehlerfreiheit übernommen werden.

Alle Rechte an Text, Struktur und Abbildungen liegen bei der Autorin.

Inhaltsverzeichnis

1	Wie beschreibt man die Bewegung eines Körpers im Raum?	5
1.1	Motivation	5
1.2	Grundbegriffe der Kinematik	6
1.2.1	Dimensionen der Bewegung, Vektoren und Koordinatensysteme	6
1.2.2	Ort und Bahnkurve	8
1.3	Beispiele	10
1.3.1	Geradlinige gleichförmige Bewegung	10
1.3.2	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	11
1.3.3	Wurfparabel	11
1.3.4	Gleichförmige Kreisbewegung	12
2	Was bedeutet es, sich in einem Inertialsystem zu befinden?	15
2.1	Motivation: Bewegung ist relativ	15
2.1.1	Was bedeutet Bewegung?	16
2.1.2	Beispiel: Zwei Autos auf Kollisionskurs	16
2.2	Inertialsysteme	17
2.2.1	Vom Bezugssystem zum Inertialsystem	17
2.2.2	Bewegung mit Kräften im Inertialsystem	17
2.2.3	Beispiel: Wurf eines Balls im Zug	18
2.2.4	Galilei-Transformation	19
2.2.5	Beispiel: Drehung um einen festen Winkel	21
3	Welche Gesetze bestimmen die Bewegung von Körpern?	23
3.1	Newtons Axiome und Kräfte	23
3.1.1	Motivation: Dynamik von Körpern	23
3.1.2	Newtons Axiome	24
3.1.3	Beispiel: Federpendel	26
3.2	Bewegungsgleichung und Differentialgleichungen	27
3.2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen	27
3.2.2	Lineare und nichtlineare Differentialgleichungen	27
3.2.3	Homogene und inhomogene Differentialgleichungen	28
3.2.4	Beispiel: Kräftefreie Bewegung	29
3.2.5	Beispiel: Gedämpfte Bewegung	29
3.2.6	Beispiel: Gedämpfte und getriebene Bewegung	31
3.3	Bewegung in beschleunigten Bezugssystemen	33

3.3.1	Bewegung in Polarkoordinaten	33
3.3.2	Ein Beispiel für ein Nicht-Inertialsystem	35
4	Wie hängt Arbeit mit Energie zusammen?	39
4.1	Energien, Potentiale & Arbeit	39
4.1.1	Motivation: Energien, Potential & Arbeit	39
4.1.2	Arbeit einer Kraft	40
4.1.3	Beispiel: Arbeit gegen die Gewichtskraft	41
4.1.4	Kinetische Energie und das Arbeit–Energie-Theorem	42
4.1.5	Konservative Kräfte und potentielle Energie	43
5	Warum schwingt ein Pendel – und wann hört es damit auf?	45
5.1	Der harmonische Oszillator	45
5.1.1	Motivation: harmonische Schwingung sind überall	45
5.1.2	Der harmonische Oszillator: Herleitung der Bewegungsgleichung	46
5.1.3	Lösung der Bewegungsgleichung mit Exponentialansatz	47
5.1.4	Komplexe Zahlen und die Euler-Formel	48
5.2	Der gedämpfte harmonische Oszillator	50
5.2.1	Bewegungsgleichung mit Reibungskraft	50
5.2.2	Lösungen des gedämpften harmonischen Oszillators	51
6	Was passiert, wenn man eine Schaukel anschubst?	53
6.1	Erzwungene Schwingung	53
6.1.1	Motivation: Erzwungener harmonischer Oszillator	53
6.1.2	Bewegungsgleichung des erzwungenen Oszillators	54
6.1.3	Stationäre Lösung bei periodischer Anregung	54
6.2	Fourier Transformation	56
6.2.1	Übergang zur Fourier-Idee	56
6.2.2	Mathematisches Beispiel zur Fourier-Zerlegung	57
6.2.3	Übergang zur Fourier-Transformation	59
6.2.4	Lösung für eine allgemeine äußere Kraft und Fourier-Zerlegung	60
6.3	Kraftstoß und Greensche Funktion	62
6.3.1	Delta-Funktion als idealisierter Kraftstoß	62
6.3.2	Greensche Funktion: Grundidee	63
6.3.3	Greensche Funktion des gedämpften Oszillators: Unterdämpfung	63
7	Wie entsteht Drehimpuls – und warum bleibt er manchmal erhalten?	67
7.1	Impuls und Impulserhaltung	67
7.1.1	Impuls	67
7.1.2	Impulserhaltung	68
7.1.3	Beispiel: Stoß zweier Körper in einer Dimension	69
7.2	Drehimpuls und Drehimpulserhaltung	70
7.2.1	Drehmoment und Trägheitsmoment	71
7.2.2	Drehimpulserhaltung	74
7.2.3	Übersicht: Translation und Rotation	75

8	Was passiert, wenn viele Teilchen zusammenwirken?	77
8.1	Systeme von Massenpunkten und Schwerpunktbe- wegung	77
8.1.1	Bewegung im System von Massenpunkten	77
8.1.2	Beispiel: Schwerpunkt eines Vollzylinders	79
8.2	Erhaltungssätze im System von Massenpunkten	81
8.2.1	Impuls und Drehimpuls	81
8.2.2	Beispiel: Raketenbewegung	82
9	Wie lassen sich Kräfte zwischen zwei Körpern beschreiben?	85
9.1	Zwei Teilchen System	85
9.1.1	Bewegungsgleichungen	85
9.1.2	Zwei Teilchen im Zentralkraftfeld	86
9.1.3	Zweikörperproblem im Potential $V(r) = -\kappa/r$	88
10	Warum kreisen Planeten auf Ellipsenbahnen?	91
10.1	Planetenbewegung	91
10.1.1	Bewegung im Gravitationspotential	91
10.1.2	Elliptische Bahnen	93
10.1.3	Bewegung für positive Energien und Fluchtgeschwindigkeit	95
10.1.4	Die Keplerschen Gesetze	96
11	Warum können Teilchen von einem Potential gestreut werden?	99
11.1	Streuung im Zentralpotential	99
11.1.1	Allgemeine Beschreibung eines Streuprozesses	99
11.2	Rutherford-Streuung	101
11.2.1	Streuwinkel und Stossparameter	101
11.2.2	Einfaches Beispiel: Streuung in zwei Dimensionen	103
11.2.3	Differentieller Wirkungsquerschnitt	104

Kapitel 1

Wie beschreibt man die Bewegung eines Körpers im Raum?

- **Physikalisches Thema:** Kinematik, Bahnkurven, Koordinatensysteme
- **Inhalte:** Ort, Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Bahnkurven.
- **Mathematik:** Vektoren, Ableitungen (nach der Zeit)

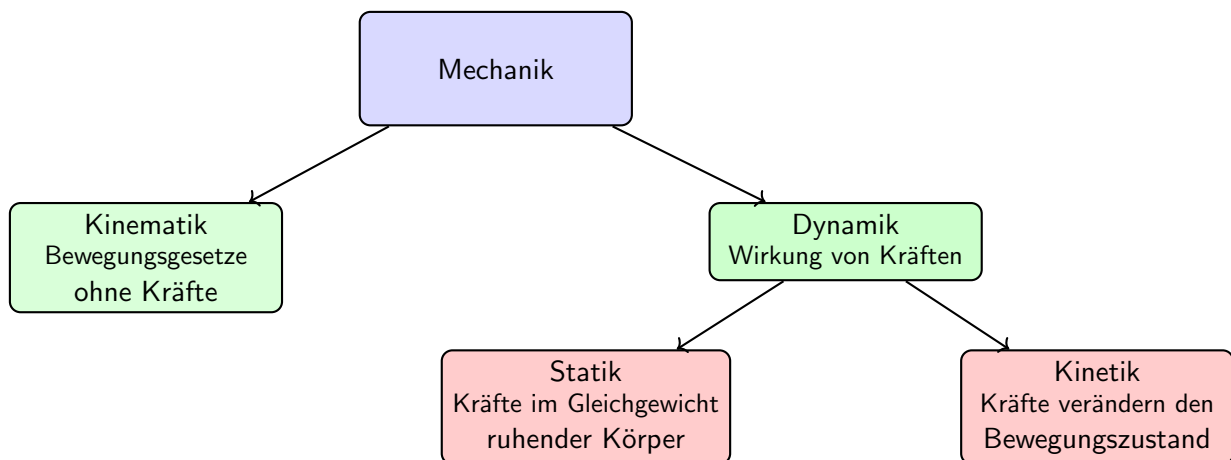


Abbildung 1.1: Strukturierung der Mechanik im Fachbereich Physik [Wikipedia]

1.1 Motivation

Wenn wir einen Ball werfen oder ein Auto auf einer Kreisbahn beobachten, stellen wir intuitiv fest: Ein Körper verändert mit der Zeit seinen Ort. Die Frage ist nun, wie können wir das mathematisch beschreiben? Genau diese Frage zu beantworten ist das Ziel der **Kinematik**: Sie befasst sich mit der Bewegung von Objekten, ohne deren Ursachen – also die wirkenden Kräfte – zu berücksichtigen. Um den Einstieg zu vereinfachen, betrachten wir Körper zunächst als punktförmige Massen, sogenannte Massenpunkte. Ihre Bewegung wird vollständig durch die Ortskoordinaten als Funktion der Zeit beschrieben. Erst wenn wir verstehen, wie Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung zusammenhängen, können wir uns in der **Dynamik** fragen,

welche Kräfte diese Bewegung erzeugen. In Abb.1.1 sehen wir, dass die **Dynamik** nochmals in zwei Unterkategorien aufgeteilt werden kann: die **Statik** und die **Kinetik**. Während sich die *Statik* mit Kräften im Gleichgewicht und damit mit ruhenden Körpern befasst, beschreibt die *Kinetik*, wie Kräfte den Bewegungszustand eines Körpers verändern.

In diesem ersten Kapitel beginnen wir aber erstmal mit der Kinematik von Massenpunkten und den grundlegenden mathematischen Begriffen, die dafür notwendig sind.

1.2 Grundbegriffe der Kinematik

1.2.1 Dimensionen der Bewegung, Vektoren und Koordinatensysteme

Um die Bewegung eines Körpers beschreiben zu können, müssen wir zunächst festlegen, in welchem *Raum* sich die Bewegung abspielt. Schon bei einem geworfenen Ball erkennen wir, dass eine Beschreibung in nur einer Dimension (z. B. entlang einer Linie) nicht ausreicht: der Ball bewegt sich gleichzeitig *vorwärts*, *aufwärts* und anschließend wieder *abwärts*. Wir benötigen also mindestens **drei Dimensionen**, um seine Bahn vollständig anzugeben.

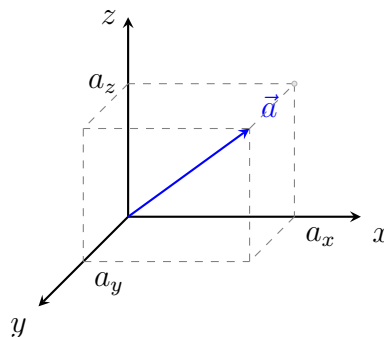


Abbildung 1.2: Vektor \vec{a} im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem.

In der Mechanik arbeiten wir daher mit einem **dreidimensionalen Raum**, dessen Punkte durch drei Koordinaten beschrieben werden. Um die Orientierung im Raum eindeutig festzulegen, verwenden wir meist ein **kartesisches Koordinatensystem**, das aus drei zueinander senkrechten Achsen besteht: der x -, y - und z -Achse. Jeder Punkt im Raum kann durch einen **Ortsvektor**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{a}^T = (a_x, a_y, a_z), \quad (1.1)$$

angegeben werden, der vom Ursprung des Koordinatensystems auf den betrachteten Punkt zeigt, siehe die Darstellung eines Vektors in Abb. 1.2. In der üblichen Schreibweise wird ein Vektor als *Spaltenvektor* dargestellt. Sein **Transponierter** (oder *Zeilenvektor*) wird mit \vec{a}^T bezeichnet. Der transponierte Vektor spielt insbesondere bei Matrizenoperationen eine wichtige Rolle. Man kann den Begriff des Vektors auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern, als **Vektoren** im Raum \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) bezeichnen wir den n -Tupel

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Der **Betrag** oder die **Länge** eines Vektors beschreibt, wie groß ein Vektor unabhängig von seiner Richtung ist. Für einen Vektor im 3-dimensionalen Raum gilt

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.3)$$

Der Betrag eines Vektors ist stets eine **nichtnegative reelle Zahl** und verschwindet genau dann, wenn der Vektor der Nullvektor ist: $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$. In der geometrischen Anschauung gibt der Betrag eines Vektors die Länge des Pfeils an, der den Vektor repräsentiert.

Nachdem wir Vektoren als mathematische Objekte zur Beschreibung von Richtung und Betrag kennengelernt haben, benötigen wir eine Möglichkeit, Vektoren miteinander zu *vergleichen*. Eine besonders wichtige Verknüpfung zweier Vektoren ist das **Skalarprodukt** (oder *inneres Produkt*). Das Skalarprodukt hat seinen Ursprung in der klassischen Geometrie, wo es aus der Beziehung zwischen Längen und Winkeln zweier Geraden hervorgeht (Gesetz des Kosinus). Für zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} im 3D-Raum ist das Skalarprodukt definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad (1.4)$$

wobei θ der eingeschlossene Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Das Ergebnis ist ein **Skalar** (eine Zahl), kein Vektor. Es gibt also an, *wie stark zwei Vektoren in dieselbe Richtung zeigen*. Das Skalarprodukt kann man geometrisch so interpretieren das es die Projektion eines Vektors auf den anderen misst: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_{\parallel}|$, wobei \vec{b}_{\parallel} die Projektion von \vec{b} auf \vec{a} ist, Abb.1.3.

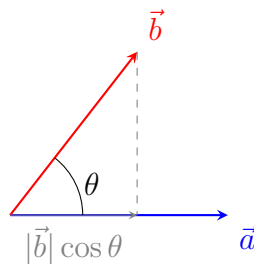


Abbildung 1.3: Geometrische Bedeutung des Skalarprodukts.

Das Skalarprodukt besitzt einige wichtige Eigenschaften:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{Kommutativität}) \quad (1.5)$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{Linearität}) \quad (1.6)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad (\text{Norm eines Vektors}) \quad (1.7)$$

Wenn der Winkel zwischen zwei Vektoren $\theta = 90^\circ = \pi/2$ ist dann stehen die beiden Vektoren senkrecht zueinander (orthogonal), daraus folgt dass das Skalarprodukt verschwindet $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Wir können das kartesische Koordinatensystem aus der Kombination von 3 orthogonalen Vektoren aufbauen. Diese sogenannten Basisvektoren bilden ein **Orthonormalsystems**. Ein Orthonormalsystem besteht aus drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

die durch ihre Orthogonalität folgendes erfüllen:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, & \text{Normierung} \\ 0, & i \neq j, & \text{Orthogonalität} \end{cases} \quad (1.9)$$

Damit kann jeder Ortsvektor als Linearkombination geschrieben werden:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \sum_{i=x,y,z} a_i \vec{e}_i. \quad (1.10)$$

Dieses Konzept ist die Grundlage jeder mathematischen Beschreibung von Bewegung im Raum. Die **Koordinaten** eines Vektors hängen stets von der gewählten **Basis** ab. Sind zwei Koordinatensysteme mit den Ursprüngen O bzw. O' gegeben durch

$$K = \{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \quad \text{und} \quad K' = \{O', \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z\},$$

so ändern sich auch die Komponenten des gleichen Vektors, etwa a_x, a_y, a_z in K bzw. a'_x, a'_y, a'_z in K' . Die Beschreibung eines **Massenpunktes** erfolgt immer in einem bestimmten **Bezugssystem** — im Folgenden betrachten wir hierfür ein kartesisches Koordinatensystem. In der **klassischen Mechanik** besitzen Raum und Zeit eine feste, voneinander unabhängige Bedeutung: die Zeit verläuft überall gleich und der Raum ist unveränderlich. Dies ändert sich grundlegend erst in der **Relativitätstheorie**, in der Raum und Zeit zu einer gemeinsamen vierdimensionalen Raum-Zeit vereinigt werden.

1.2.2 Ort und Bahnkurve

Um die Bewegung eines Körpers zu beschreiben, betrachten wir zunächst den **Ort** des Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt. Jeder Punkt im Raum kann durch seinen **Ortsvektor**

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

beschrieben werden. Der Ortsvektor zeigt vom Ursprung des gewählten Koordinatensystems auf den Punkt, an dem sich der Körper zur Zeit t befindet. Die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ sind im Allgemeinen zeitabhängig und geben die Bewegung des Körpers an. Bewegt sich der Körper im Lauf der Zeit, so beschreibt die Spitze des Ortsvektors eine **Bahnkurve** im Raum. Formaler formuliert sind Bahnkurven vektorwertige Funktionen. Die Bahnkurve ist damit die geometrische Spur aller Punkte, die der Körper während seiner Bewegung einnimmt:

$$\text{Bahnkurve: } \Gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in [t_0, t_1] \}.$$

Oft ist es hilfreich, die Bahnkurve grafisch zu veranschaulichen. Bei einer zweidimensionalen Bewegung, zum Beispiel einem geworfenen Ball, liegt die Bahn in einer Ebene, typischerweise der (x, y) -Ebene. In drei Dimensionen kann sie eine beliebige Raumkurve sein.

Um die Bewegung eines Körpers *quantitativ* zu beschreiben, müssen wir angeben *wie sich der Ort mit der Zeit ändert*. Das zentrale mathematische Werkzeug dafür ist die **Ableitung** einer Funktion.

Betrachten wir eine eindimensionale Bewegung, bei der der Ort durch eine Funktion $x(t)$ beschrieben wird. Die Ableitung von $x(t)$ nach der Zeit t gibt an, wie stark sich der Ort in einem kleinen Zeitintervall ändert:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Dieser Grenzwert beschreibt die **momentane Änderungsrate** der Funktion $x(t)$ und ist in der Physik von zentraler Bedeutung. Anschaulich stellt der Differenzenquotient $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ die mittlere Änderung von x im Zeitintervall Δt dar. Lässt man Δt immer kleiner werden, so nähert sich dieser Quotient dem Anstieg der Tangente an die Kurve $x(t)$ im Punkt t an.

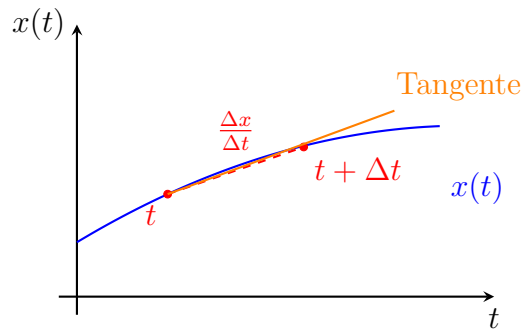


Abbildung 1.4: Mittlere und momentane Änderungsrate einer Funktion $x(t)$.

In vielen physikalischen Zusammenhängen hängen Größen voneinander ab, und Funktionen treten in *Produkten* oder als *Verkettungen* auf. Für solche Fälle benötigt man zwei wichtige Rechenregeln der Differentialrechnung: die **Produktregel** und die **Kettenregel**. Die **Produktregel** beschreibt, wie man die Ableitung eines Produkts zweier zeitabhängiger Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ berechnet:

$$\frac{d}{dt}[u(t)v(t)] = \frac{du}{dt}v(t) + u(t)\frac{dv}{dt}. \quad (1.13)$$

Die **Kettenregel** benötigt man, wenn eine Funktion in einer anderen steckt, z. B. $y = f(g(t))$. Dann gilt:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}. \quad (1.14)$$

Beispiel für Kettenregel: Es sei

$$f(g) = g^3 \quad \text{und} \quad g(t) = \sin(t).$$

Dann ist die Verkettung

$$y(t) = f(g(t)) = (\sin t)^3.$$

Die Ableitung nach der Zeit ergibt sich nach der Kettenregel zu:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} = 3g^2 \cdot \cos(t) = 3(\sin t)^2 \cos(t).$$

Für mehrdimensionale Bewegungen beschreibt der **Ortsvektor** $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ die Position des Körpers. Seine zeitliche Ableitung ist als **Geschwindigkeit** definiert

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \equiv \vec{v}(t) \quad (1.15)$$

liefert die momentane Änderungsrate des Ortsvektors — wohingegen die Ableitung der Geschwindigkeit als Die **Beschleunigung** definiert ist

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.16)$$

Die Richtung von \vec{v} ist tangential zur Bahn, die Richtung von \vec{a} zeigt auf Änderungen der Bewegung (z. B. Richtungsänderung bei Kreisbewegung).

1.3 Beispiele

1.3.1 Geradlinige gleichförmige Bewegung

Die **geradlinige gleichförmige Bewegung** ist der einfachste Bewegungstyp. Der Körper bewegt sich entlang einer geraden Bahn mit *konstanter Geschwindigkeit*. Das bedeutet, dass sowohl die Richtung als auch der Betrag der Geschwindigkeit unverändert bleiben. In einer Dimension wird der Ort $x(t)$ eines Körpers durch die Gleichung

$$x(t) = x_0 + vt$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet x_0 den Ort zum Zeitpunkt $t = 0$, und v die konstante Geschwindigkeit. Die **zeitliche Ableitung** des Ortes ergibt die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{konstant.}$$

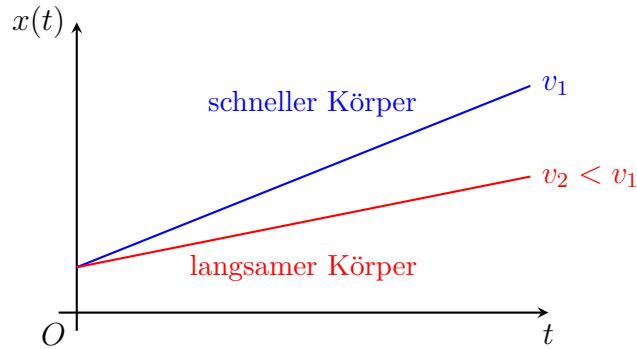
Da die Geschwindigkeit konstant ist, ist die Beschleunigung null:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Graphisch stellt die Bahn in einem x - t -Diagramm eine gerade Linie dar, deren Steigung der Geschwindigkeit v entspricht. Je größer v , desto steiler verläuft die Gerade.

Da sich bei dieser Bewegung die Geschwindigkeit weder der Größe noch der Richtung nach ändert, sind die Bahnkurve und die Geschwindigkeitsrichtung identisch. Im dreidimensionalen Raum gilt entsprechend:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{konstant.}$$

Abbildung 1.5: Geradlinige gleichförmige Bewegung: $x(t) = x_0 + vt$.

1.3.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die **gleichmäßig beschleunigte Bewegung** ist die nächstkomplexere Form der geradlinigen Bewegung. Hierbei bleibt die Beschleunigung a *konstant*, d. h. die Geschwindigkeit ändert sich gleichmäßig mit der Zeit. Richtung und Betrag von a bestimmen, ob der Körper schneller oder langsamer wird. Ausgehend von der Definition der Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit gilt:

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{konstant.}$$

Die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit ist dann:

$$v(t) = v_0 + at,$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Die Geschwindigkeit ist wiederum die Ableitung des Ortes: $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Damit muß die **Ort-Zeit-Gleichung** lauten:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.17)$$

Durch bilden der zweiten Ableitung der Ort-Zeit-Gleichung sehen wir das $\ddot{x} = a$ wie vorgesehen ist. Diese Gleichung beschreibt eine *Parabel* im x - t -Diagramm deren Krümmung durch das Vorzeichen von a bestimmt wird:

- $a > 0$: beschleunigte Bewegung (z. B. freier Fall nach unten),
- $a < 0$: verzögerte Bewegung (z. B. Bremsvorgang).

1.3.3 Wurfparabel

Die **Wurfparabel** ist ein klassisches Beispiel einer zweidimensionalen Bewegung unter dem Einfluss einer konstanten Beschleunigung (z. B. der Erdgravitation). Der Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 unter einem Winkel α zur Horizontalen geworfen. Die Bewegung lässt sich im kartesischen Koordinatensystem durch die Zerlegung der Anfangsgeschwindigkeit in ihre Komponenten beschreiben:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Die Beschleunigung wirkt nur in vertikaler Richtung (mit $g = 9.81 \text{ m/s}^2$):

$$\vec{a} = (0, -g).$$

Damit gilt für die zeitabhängigen Koordinaten:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x} t = v_0 \cos \alpha t, \\ y(t) &= v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Eliminiert man die Zeit t , erhält man die **Bahnkurve** (Wurfparabel) in der Form $y(x)$:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Parabel, deren Scheitelpunkt die maximale Wurfhöhe angibt.

Die **Wurfweite**, **Flugzeit** und **maximale Höhe** ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\max} &= \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}, \\ t_{\text{Flug}} &= \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \\ \dot{y}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{\max} &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \end{aligned}$$

Die größte Wurflweite wird bei $\alpha = 45^\circ$ erreicht.

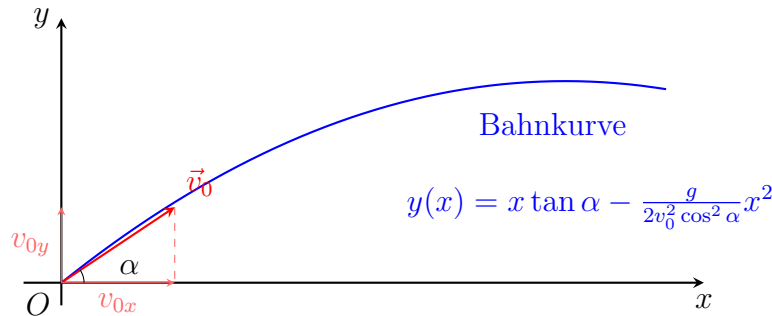


Abbildung 1.6: Bahnkurve eines schiefen Wurfs. Die Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 wird in ihre Komponenten v_{0x} und v_{0y} zerlegt.

Die horizontale Bewegung ist gleichförmig, die vertikale gleichmäßig beschleunigt. Durch die Überlagerung beider Bewegungen entsteht die charakteristische parabolische Flugbahn.

1.3.4 Gleichförmige Kreisbewegung

Bei der **gleichförmigen Kreisbewegung** bewegt sich ein Körper mit konstanter Bahngeschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r . Obwohl der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist, ändert sich deren Richtung ständig – daher ist die Beschleunigung *nicht null*.

Die Bewegung lässt sich am einfachsten im zweidimensionalen Raum beschreiben. Für einen Punkt, der sich auf einem Kreis um den Ursprung bewegt, gilt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

wobei ω die **Winkelgeschwindigkeit** ist. Der Betrag ω gibt an, wie schnell sich der Radiusvektor $\vec{r}(t)$ dreht:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{konstant.}$$

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung des Ortsvektors:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant:

$$|\vec{v}| = r\omega = v = \text{konstant.}$$

Die Geschwindigkeit steht stets senkrecht zum Radiusvektor $\vec{r}(t)$ und ist tangential zur Bahn gerichtet.

Die Beschleunigung erhält man durch erneute Ableitung:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Damit zeigt die Beschleunigung immer zum Kreismittelpunkt und hat den Betrag

$$a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

Diese wird als **Zentripetalbeschleunigung** bezeichnet.

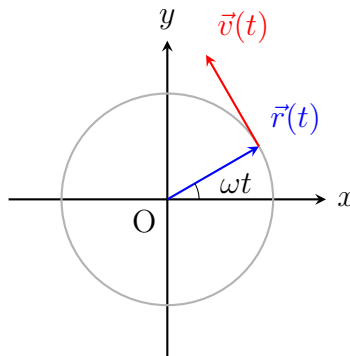


Abbildung 1.7: Gleichförmige Kreisbewegung: Ortsvektor $\vec{r}(t)$, Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t)$. Die Geschwindigkeit ist tangential, die Beschleunigung radial (zentripetal).

16KAPITEL 1. WIE BESCHREIBT MAN DIE BEWEGUNG EINES KÖRPERS IM RAUM?

Kapitel 2

Was bedeutet es, sich in einem Inertialsystem zu befinden?

- **Physikalisches Thema:** Inertialsysteme
- **Inhalte:** Bezugssysteme, Galilei-Transformation
- **Mathematik:** Koordinatentransformationen, Vektoraddition, Matrizen

2.1 Motivation: Bewegung ist relativ

Stellen wir uns einen Ball vor, der ruhig auf einem Tisch liegt. Für uns wirkt er vollkommen unbewegt. Wir könnten meinen: $\vec{v} = \vec{0}$. Doch diese Aussage hängt *ausschließlich* von unserem Bezugssystem ab. Betrachten wir dieselbe Situation aus einer größeren Perspektive.

1. **Der Ball ruht auf dem Tisch.** Für eine Person im Raum scheint der Ball ortsfest zu sein.
2. **Die Erde rotiert um ihre eigene Achse.** Am Äquator beträgt die Rotationsgeschwindigkeit etwa

$$v_{\text{Rotation}} \approx 465 \text{ m/s} \approx 1670 \text{ km/h}$$

Von einer beobachtenden Person aus gesehen, die im Weltall „schwebt“, bewegt sich der Ball also sehr schnell auf einer Kreisbahn um die Erdachse.

3. **Die Erde bewegt sich auf einer Umlaufbahn um die Sonne.** Bahngeschwindigkeit der Erde:

$$v_{\text{Erde}} \approx 30 \text{ km/s}$$

4. **Die Sonne bewegt sich um das Zentrum unserer Galaxie.**

$$v_{\text{Galaxie}} \approx 220 \text{ km/s}$$

5. **Die Galaxie selbst bewegt sich durch das Universum.** Dies sind Größenordnungen von etwa 500 km/s.

Wir erkennen also: Ein Ball, der *für uns* in Ruhe ist, bewegt sich tatsächlich mit enormen Geschwindigkeiten — nur in einem anderen Bezugssystem. Das führt uns zu einer fundamentalen Erkenntnis: **Bewegung ist immer relativ.** Sie hängt davon ab, *wer* misst und *welches Bezugssystem* wir verwenden.

2.1.1 Was bedeutet Bewegung?

Ob ein Körper **ruht** oder sich **bewegt**, hängt also immer von dem/der Beobachter*in ab. Ein Beispiel: Du sitzt im Zug und siehst durch das Fenster einen zweiten Zug. Bewegt sich dein Zug oder der andere? Von außen stehenden Personen betrachtet bewegt sich dein Zug – in deinem eigenen Bezugssystem scheint jedoch der andere Zug zu fahren. Bewegung ist wie schon erwähnt **relativ**. Um Bewegungen eindeutig zu beschreiben, benötigen wir:

- einen Ursprung (Startpunkt),
- ein Koordinatensystem (zur Bestimmung des Ortes),
- eine Zeitmessung (Uhr).

Diese Kombination nennen wir ein **Bezugssystem**. Erst nach der Definition des Bezugssystems können wir die Bewegung eines Körpers eindeutig beschreiben.

2.1.2 Beispiel: Zwei Autos auf Kollisionskurs

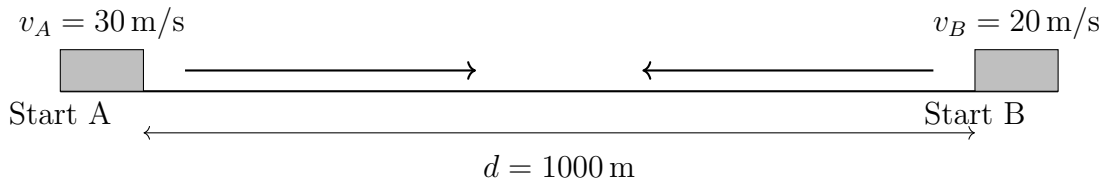


Abbildung 2.1: Autos auf Kollisionskurs (Straßen-Bezugssystem)

Zwei Autos fahren auf einer geraden Straße aufeinander zu. Auto A fährt mit $v_A = 30 \text{ m/s}$, Auto B fährt mit $v_B = 20 \text{ m/s}$ und zu Beginn ($t = 0$) haben sie einen Abstand von $d = 1000 \text{ m}$. Wir betrachten nun dieselbe Situation aus drei verschiedenen Bezugssystemen:

1. Bezugssystem: Beobachter*in am Straßenrand

Der Beobachter wählt den Ursprung am Startpunkt von Auto A, also sind die Anfangsbedingungen $x_A(t = 0) = 0$ und $x_B(t = 0) = d$. Damit erhalten wir für die Bewegungsgleichungen

$$x_A(t) = v_A t \quad (2.1)$$

$$x_B(t) = d - v_B t \quad (2.2)$$

Die Autos treffen sich, wenn $x_A(t) = x_B(t)$:

$$v_A t = d - v_B t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_A + v_B} = \frac{1000 \text{ m}}{50 \text{ m/s}} = 20 \text{ s} \quad (2.3)$$

2. Bezugssystem: Beobachter*in im Auto A (mitbewegtes System)

Für Auto A steht Auto A still d.h. $x'_A(t) = 0$, und Auto B bewegt sich auf den Auto A zu, und zwar mit der **relativen Geschwindigkeit**

$$v_{\text{rel}} = v_A + v_B = 50 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad x'_B(t) = d - v_{\text{rel}} t \quad (2.4)$$

Die Treffzeit ist identisch: $t = 20 \text{ s}$. Die **physikalische Realität (Treffzeit)** ist unabhängig vom Bezugssystem, aber die **Beschreibung der Bewegung (Koordinaten und Geschwindigkeiten)** hängt vom Bezugssystem ab.

2.2 Inertialsysteme

2.2.1 Vom Bezugssystem zum Inertialsystem

Wie wir gesehen haben besteht ein **Bezugssystem** aus einem räumlichen Koordinatensystem zur Bestimmung von Orten und einer Zeitmessung (z. B. einer Uhr), die festlegt, zu welchem Zeitpunkt ein Ereignis stattfindet. Erst wenn wir festgelegt haben, *von wo und wann aus* wir beobachten, können wir Bewegungen beschreiben. Allerdings zeigt sich schnell, dass unterschiedliche Beobachter*innen zu unterschiedlichen Aussagen über eine Bewegung kommen können. Wie wir am Beispiel der zwei Autos auf Kollisionskurs gesehen haben. Bewegung ist also stets *relativ* zum gewählten Bezugssystem.

Nicht jedes Bezugssystem eignet sich gleichermaßen, um Bewegungen *einfach* zu beschreiben. Galileo Galilei erkannte im 17. Jahrhundert, dass es Systeme gibt, in denen sich Körper ohne äußere Kräfte geradlinig und gleichförmig bewegen. Diese "bevorzugten" Bezugssysteme nannte man später **Inertialsysteme**. Ein *Inertialsystem* ist ein Bezugssystem, in dem ein kräftefreier Körper seinen Bewegungszustand beibehält:

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{konstant} \quad (2.5)$$

Die Kernaussage ist das die physikalische Gesetze in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben müssen. Galilei formulierte dies als Gedankenexperiment: Für Personen unter Deck auf einem gleichmäßig fahrenden Schiff lassen sich alle physikalischen Experimente (z. B. das Rollen eines Balls) genauso durchführen wie an Land. Die gleichförmige Bewegung des Schiffes ist nicht "spürbar". Damit führte Galileo die Idee ein, dass die *Gesetze der Mechanik* in allen Inertialsystemen gleich sind. Erst später wurde dies zur Grundlage des ersten Newtonschen Axioms (Trägheitsprinzip).

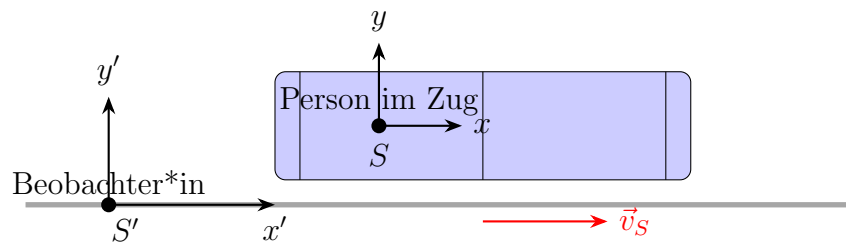


Abbildung 2.2: Ein Ereignis (Person im Zug) wird aus zwei unterschiedlichen Bezugssystemen betrachtet. Im Bezugssystem S' bewegt sich die Person mit der Geschwindigkeit des Zuges. Im Bezugssystem im Zug S erscheint die Person in Ruhe.

2.2.2 Bewegung mit Kräften im Inertialsystem

Bisher haben wir Bewegungen betrachtet, bei denen keine Kräfte wirken. In einem solchen Fall bleibt ein Körper im Zustand der Ruhe oder bewegt sich **gleichförmig und geradlinig**. Dies ist die Grundlage für die Definition eines **Inertialsystems**: Ein Bezugssystem, in dem ein *kräftefreier* Körper gleichförmig und geradlinig bleibt. Damit beschreibt nicht der Körper das Inertialsystem, sondern das **Bezugssystem**, von dem aus wir die Bewegung beobachten.

Nun betrachten wir eine Bewegung, bei der eine Kraft wirkt, zum Beispiel das Hochwerfen eines Balls. Obwohl der Ball während seines Fluges beschleunigt wird, gilt für *alle Inertialsysteme* das gleiche physikalische Gesetz, das diese Beschleunigung beschreibt. Wichtig ist: Der Ball selbst ist *nicht* kräftefrei, weil die Gravitationskraft wirkt. Das Bezugssystem (z. B. ein Zug, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt) *kann trotzdem* ein Inertialsystem sein.

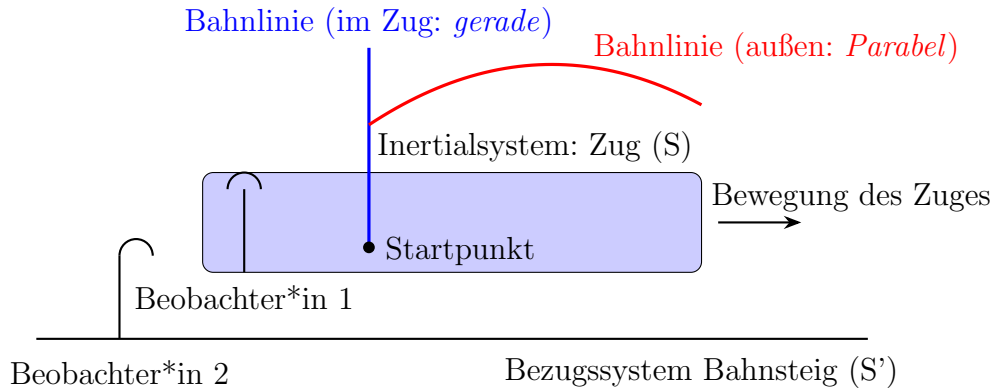


Abbildung 2.3: Wurf eines Balles im Zug: Für Beobachter*in 1 im Zug gilt: Der Ball hat nur eine vertikale Bahnkurve. Für Beobachter*in 2 vom Bahnsteig aus bewegt sich der Ball bewegt sich sowohl nach oben als auch vorwärts, die Bahnkurve ist eine Parabel. Obwohl sich die Bahnkurven unterscheiden, sind die physikalischen Gesetze identisch. Das ist der Kern der Definition eines Inertialsystems.

2.2.3 Beispiel: Wurf eines Balls im Zug

Eine Person wirft in einem Zug, der sich mit konstanter Geschwindigkeit v_{Zug} in x -Richtung bewegt, einen Ball senkrecht nach oben (y -Richtung). Die Erdbeschleunigung wirke in negativer y -Richtung mit Betrag g . Siehe Abbildung 2.3.

Betrachten wir zunächst die Situation im Zug. Hier wirkt die Gravitation in y -Richtung; horizontal ändert sich im Zug nichts (keine horizontale Anfangsgeschwindigkeit). Im Bezugssystem des Zuges (Inertialsystem des Zuges) besitzt der Ball zum Zeitpunkt $t = 0$ den Anfangsort und die Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Komponenten der Ortsvektoren im System S :

$$x(t) = 0, \quad y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

D.h. im Zug ist die horizontale Koordinate konstant ($x(t) = 0$), daher erscheint die Bahn in der x, y -Ebene als Gerade.

Im Bezugssystem des Bahnsteigs (von außen beobachtet) bewegt sich der Ball mit der horizontalen Zuggeschwindigkeit mit. Die Anfangsgeschwindigkeit des Balls lautet daher

$$\vec{v}_0^{\prime} = \begin{pmatrix} v_{\text{Zug}} \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Beobachter*in 2 sieht zusätzlich die horizontale Bewegung des Zuges mit Geschwindigkeit v_{Zug} . Für konstante Gravitation gilt in S' (gleichförmig beschleunigte vertikale Bewegung, gleichförmige horizontale Bewegung):

$$x'(t) = v_{\text{Zug}} t, \quad y'(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Wir können hier die Bahnkurve via der Eliminierung der Zeit bestimmen:

$$t = \frac{x'}{v_{\text{Zug}}} \Rightarrow y'(t) = \frac{v_0}{v_{\text{Zug}}} x' - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{\text{Zug}}^2} x'^2$$

Dies ist eine Parabel der Form $y(x) = Ax - Bx^2$. Damit ist klar, warum Beobachter*in 2 eine parabolische Bahn sieht, während die Person im Zug (mit $x = 0$) eine gerade, rein vertikale Bewegung beobachtet. Beide Beschreibungen sind durch die eine Transformation verbunden:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \begin{pmatrix} v_{\text{Zug}} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t' = t. \quad (2.6)$$

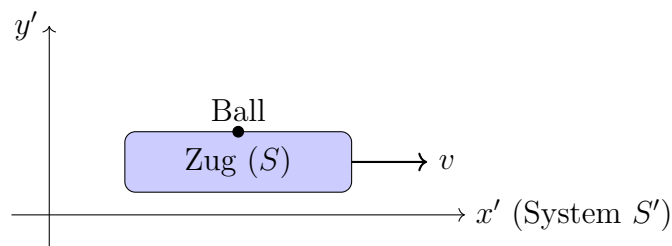
Setzt man $\vec{r}(t)$ aus dem System S (Zug) ein ergibt sich $\vec{r}'(t)$ aus dem System S' (Bahnsteig). Wichtig ist das die physikalische Ursache (die Gravitation) bleibt in beiden Systemen dieselbe. Dies illustriert die Galilei-Invarianz der Bewegungsgesetze: die Form des Gesetzes (hier die Gleichungen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung) ist in beiden Inertialsystemen gleich anwendbar. Die Transformation zwischen beiden Systemen wird als Galilei-Transformation bezeichnet, diese werden wir im nächsten Unterkapitel diskutieren.

2.2.4 Galilei-Transformation

Wir haben gesehen, dass ein und dieselbe Bewegung in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich erscheinen kann. Im Zug erscheint der Ballwurf als reine Auf- und Abbewegung, während für eine beobachtende Person am Bahnsteig eine Parabelbahn sichtbar ist. Damit wird klar: Zur vollständigen Beschreibung einer Bewegung benötigen wir eine Möglichkeit, Koordinaten und Zeiten von einem Bezugssystem in ein anderes zu übertragen. Betrachten wir zwei Inertialsysteme:

- System S : eine Person im Zug beobachtet dieselbe Bewegung.
- System S' : eine Person steht am Bahnsteig und beobachtet die Bewegung.

Beide Systeme messen die *gleiche Zeit* (klassische Mechanik), aber ihre Ortskoordinaten unterscheiden sich. Wir nehmen an, dass sich das System S relativ zu S' mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_S^T = (v, 0)$ entlang der x' -Achse bewegt.



Die sogenannte **Galilei-Transformation** beschreibt, wie die Ortskoordinaten eines Ereignisses zwischen zwei Inertialsystemen zusammenhängen. Beide Systeme messen dieselbe Zeit: $t' = t$ und die Ortskoordinaten hängen über die relative Geschwindigkeit v zusammen:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_S t \quad (2.7)$$

für das Beispiel des Zuges würden sich die y und z Koordinaten nicht ändern durch die Transformation. Jedoch die x -Koordinate: $x' = x + vt$. Dies bedeutet das die Bewegung im Zug (S) kann auf das Bahnsteigsystem (S') übertragen werden, indem die konstante Bewegung des Zuges *hinzu*gefügt wird. Umgekehrt gilt auch: für den Zug muss man die Zugsbewegung *subtrahieren*. Durch Ableiten nach der Zeit folgt für die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_S \quad (2.8)$$

Inertialsysteme können sich nur mit konstanter Geschwindigkeit unterscheiden. Die Galilei-Transformation ist die „mathematische Übersetzung“ zwischen den Systemen. Physikalische Gesetze ändern ihre Form nicht unter der Transformation. Damit wird klar: Jede:r Beobachtende in einem Inertialsystem darf sich **so verhalten, als ob das eigene System in Ruhe wäre**. Physikalische Gesetze behalten dabei dieselbe Form.

Mögliche Transformationen, um ein Inertialsystem in ein anderes zu überführen, sind durch die Translation (Verschiebung im Raum), die geradlinig-gleichförmige Bewegung und/oder die Drehung um einen festen Winkel gegeben. Mathematisch lässt sich der Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes durch Transformationen der Orts- und Zeitkoordinaten beschreiben. Erlaubt sind dabei:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{b}, \quad (2.9)$$

$$\vec{r}'(t) = O(\varphi, \theta, \psi) \vec{r}(t), \quad (2.10)$$

wobei gilt:

- \vec{b} ist eine **konstante Ortsverschiebung** (neuer Ursprung),
- \vec{v}_0 ist eine **konstante Relativgeschwindigkeit** zwischen den Bezugssystemen,
- $O(\varphi, \theta, \psi)$ ist eine **orthogonale Drehmatrix**, die durch drei Winkel beschrieben wird.

Auch der Zeit-Nullpunkt kann frei verschoben werden: $t' = t + t_0$. Die Menge dieser Operationen wird als **Galilei-Transformation** bezeichnet. Eine vollständige Galilei-Transformation wird durch maximal **10 Parameter** beschrieben:

Parameter	Bedeutung
3	Drehwinkel (φ, θ, ψ)
3	Ortsverschiebung \vec{b}
3	konstante Relativgeschwindigkeit \vec{v}_0
1	Zeitverschiebung t_0

In der klassischen Mechanik sind die Newtonschen Gesetze unter Galilei-Transformationen invariant. In der Relativitätstheorie gilt dies jedoch nicht mehr. Dort werden Galilei-Transformationen durch **Lorentz- bzw. Poincaré-Transformationen** ersetzt, in denen Raum und Zeit nicht mehr unabhängig voneinander transformiert werden.

2.2.5 Beispiel: Drehung um einen festen Winkel

Wie oben erwähnt sind *räumliche Rotationen* auch elementare Transformationen, mit denen man Koordinaten von einem Bezugssystem in ein anderes überführt. Rotationen ändern die Orientierung der Achsen, nicht aber die physikalischen Abstände oder Winkel — sie sind orthogonale Transformationen. Rotationen sind nützlich, um eine Bewegung in einer „passenden“ Achsenorientierung darzustellen. Beispielsweise kann eine schief gelegte Gerade durch Rotation in die x' -Achse gelegt werden, so dass die Bewegung in den neuen Koordinaten einfacher aussieht. Physikalische Gesetze (z. B. das Newtonsche Gesetz) behalten unter Rotationen ihre Form, weil sie skalar- bzw. vektoriell ausgedrückt sind (Rotationen gehören zur sogenannten Euklidischen Gruppe).

Betrachten wir eine Drehung der Ebene um den Ursprung um einen festen Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn. Die Koordinaten (x, y) im ursprünglichen System S und die Koordinaten (x', y') im gedrehten System S' hängen zusammen durch

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta,\end{aligned}$$

oder kompakt in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Wichtig ist, dass die $R(\theta)$ orthogonal ist, und daher Längen und Skalarprodukte unverändert bleiben. Eine *orthogonale Matrix* Q ist eine reelle quadratische Matrix, deren Spalten (und Zeilen) ein orthonormales Koordinatensystem bilden. Mathematisch gilt $Q^T Q = I$, das heißt: Transponieren ist gleich Invertieren. Orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen und Spiegelungen im Raum, ohne Längen oder Winkel zu verändern.

Bei einer reinen Achsdrehung ändert sich die Zeitmessung nicht ($t' = t$). Die zeitliche Ableitung transponiert man durch dieselbe Rotationsmatrix:

$$\vec{v}'(t) = \frac{d\vec{r}'}{dt} = R(\theta) \frac{d\vec{r}}{dt} = R(\theta) \vec{v}(t). \quad (2.11)$$

Das heißt: Geschwindigkeitsvektoren werden bei einer festen Drehung in gleicher Weise transformiert wie Ortsvektoren.

Zum Beispiel betrachten wir die Drehung des Punktes $\vec{r} = (1, 0)$ um $\theta = 45^\circ = \pi/4$. Mit $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Die Länge bleibt erhalten: $\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$.

Kapitel 3

Welche Gesetze bestimmen die Bewegung von Körpern?

- **Physikalisches Thema:** Newtonsche Axiome, Kräfte
- **Inhalte:** Newtonsche Axiome, Kräfte
- **Mathematik:** Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung, Integrale

3.1 Newtons Axiome und Kräfte

3.1.1 Motivation: Dynamik von Körpern

In der Kinematik haben wir Bewegungen beschrieben, ohne deren Ursachen zu betrachten. Nun wollen wir verstehen, *warum* sich Körper bewegen. Damit beginnen wir uns mit den Grundlagen der klassischen Dynamik zu beschäftigen und Ziel ist es den Zusammenhang zwischen Kräften und Bewegungsänderungen zu beschreiben. Der Kern der klassischen Mechanik geht auf die drei Axiome zurück, die ISAAC NEWTON im Jahr 1687 in seinem Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* formulierte. Diese sogenannten *Newtonschen Axiome* beschreiben die Beziehung zwischen Kräften und Bewegungen und bilden bis heute den Kern der klassischen Physik.

Newtons Gesetze beruhen auf sorgfältigen Beobachtungen und Experimenten in der **makroskopischen Welt**, also bei Objekten, die groß genug sind, um direkt beobachtet zu werden, und bei Geschwindigkeiten, die deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind.

In anderen Bereichen der Physik stoßen diese Axiome jedoch an ihre Grenzen:

- In der **Quantenmechanik** gelten andere Gesetzmäßigkeiten, da Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmbar sind (Unschärferelation).
- In der **Relativitätstheorie** müssen Raum und Zeit gemeinsam betrachtet werden; sie bilden die sogenannte *Raumzeit*.

Die Newtonsche Mechanik geht dagegen noch von einem **absoluten Raum** und einer **absoluten Zeit** aus, d.h. Ort und Zeit sind unabhängig voneinander definiert. Zudem werden Bewegungen stets relativ zu einem festen, unveränderlichen Raum beschrieben.

Trotz dieser Einschränkungen beschreibt die Newtonsche Mechanik die Bewegungen der meisten Objekte in unserem Alltag mit hoher Genauigkeit und bildet die Grundlage für nahezu alle klassischen Anwendungen in Technik und Naturwissenschaft.

3.1.2 Newtons Axiome

1. Newtonsches Axiom – Trägheitsprinzip

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern jener nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

Oder anders formuliert: Ein Körper bleibt in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung, solange keine äußere Kraft auf ihn wirkt. Gleichförmige Bewegung bedeutet eine Bewegung mit *konstanter Geschwindigkeit*, also ohne Beschleunigung. Diese Aussage setzt voraus, dass es ein eindeutiges Bezugssystem gibt, in dem die Bewegung des Massepunktes beschrieben werden kann. Newton ging dabei von einem *absoluten Raum* aus, in dem ein solches „ruhendes“ Bezugssystem existiert. Ein solches Bezugssystem, in dem ein kräftefreier Körper seinen Bewegungszustand (Ruhe oder gleichförmige geradlinige Bewegung) beibehält, nennt man ein **Inertialsystem**. Das erste Axiom definiert somit die Existenz von Inertialsystemen und beschreibt, dass ohne äußere Kräfte keine Beschleunigung auftritt.

2. Newtonsches Axiom – Aktionsprinzip

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt

Das zweite Newtonsche Axiom beschreibt, wie Kräfte die Bewegung eines Körpers verändern. Es stellt eine quantitative Beziehung zwischen der *auf den Körper wirkenden Gesamtkraft* und seiner *Beschleunigung* her. Die Grundidee lautet: Je größer die Kraft, desto stärker die Beschleunigung – und je größer die Masse, desto träger reagiert der Körper. Anders formuliert ist die Änderung des Impulses $\vec{p} = m\vec{v}$ ist gleich der auf den Körper wirkenden Kraft, d.h. mathematisch formulierte Newton diesen Zusammenhang als:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (3.1)$$

Die Beschleunigung eines Körpers ist damit proportional zur wirkenden Gesamtkraft und umgekehrt proportional zu seiner Masse. Die Richtung der Beschleunigung stimmt mit der Richtung der resultierenden Kraft überein. Das zweite Axiom definiert somit nicht nur den Begriff der *Kraft*, sondern liefert auch die *Bewegungsgleichung* eines Körpers. Es erlaubt die Vorhersage der Bewegung, sobald alle wirkenden Kräfte bekannt sind.

3. Newtonsches Axiom – Wechselwirkungsprinzip

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio)

Das dritte Newtonsche Axiom beschreibt, wie Kräfte immer in Paaren auftreten. Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit einer Kraft \vec{F}_{AB} , so erfährt Körper A von Körper B eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}. \quad (3.2)$$

Diese Kräfte wirken stets auf unterschiedliche Körper und können sich daher niemals gegenseitig aufheben. Das Wechselwirkungsprinzip stellt sicher, dass der *Impuls* eines abgeschlossenen Systems erhalten bleibt. Es erklärt das Prinzip von *Aktion und Reaktion*, das in allen mechanischen Prozessen gilt: Drückt man auf einen Körper, so übt dieser einen gleich großen Gegendruck aus. Ein alltägliches Beispiel ist das Gehen: Beim Abstoßen vom Boden übt der Fuß eine Kraft auf den Boden aus, während der Boden eine gleich große, entgegengesetzte Kraft auf den Fuß ausübt – diese treibt uns vorwärts.

Einheit der Kraft: Aus dem zweiten Axiom $\vec{F} = m\vec{a}$ folgt unmittelbar die Definition der physikalischen Einheit der Kraft. Eine Kraft bewirkt die Beschleunigung einer Masse, daher ergibt sich im internationalen Einheitensystem (SI):

$$[\vec{F}] = [m] [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (3.3)$$

Diese abgeleitete Einheit wird **Newton (N)** genannt:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (3.4)$$

Ein Newton ist also genau die Kraft, die einen Körper der Masse 1 kg mit einer Beschleunigung von 1 m/s^2 bewegt.

Superpositionsprinzip der Kräfte: Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte gleichzeitig, so ergibt sich die **Gesamtkraft** als *Vektorsumme* aller einzelnen Kräfte:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.5)$$

Dieses Prinzip besagt, dass sich die Wirkungen einzelner Kräfte unabhängig voneinander überlagern. Jede Kraft trägt linear zur Beschleunigung des Körpers bei, und ihre Effekte addieren sich nach Richtung und Betrag.

Das Superpositionsprinzip gilt für alle klassischen (linearen) Kraftgesetze und ist eine direkte Folge der Linearität der Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Bei nichtlinearen oder feldtheoretischen Wechselwirkungen (z. B. in der Elektrodynamik oder Quantenfeldtheorie) muss dieses Prinzip in verallgemeinerter Form betrachtet werden.

Ein einfaches Beispiel ist ein Körper, der gleichzeitig durch Gewichtskraft $\vec{F}_G = m\vec{g}$ und eine Zugkraft \vec{F}_Z beeinflusst wird. Die resultierende Beschleunigung folgt aus der Summe dieser beiden Kräfte:

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_Z.$$

3.1.3 Beispiel: Federpendel

Um das Zusammenspiel mehrerer Kräfte zu verstehen, betrachten wir eine Masse m , die an einer idealen Feder mit Federkonstante k aufgehängt ist und sich nur in vertikaler Richtung bewegen kann. Wir legen den unseres Koordinatensystem in die Mitte der Masse m , und wir wählen die nach unten gerichtete x -Achse als positive Richtung.

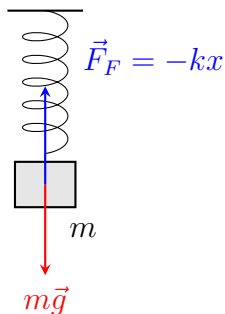


Abbildung 3.1: Masse-Feder-System: Gewichtskraft und Federkraft wirken entgegengesetzt.

Auf die Masse wirken zwei Kräfte:

$$\text{Federkraft: } \vec{F}_F = -k x \hat{e}_x, \quad \text{Gewichtskraft: } \vec{F}_G = m\vec{g} = m g \hat{e}_x. \quad (3.6)$$

Mit der Federkonstante k und der Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Im Gleichgewicht heben sich beide Kräfte auf, d. h.:

$$\vec{F}_F = -\vec{F}_G \quad \Rightarrow \quad kx_0 = mg. \quad (3.7)$$

mit der Gleichgewichtsposition x_0 . Wird die Masse nun aus dieser Ruhelage ausgelenkt zur position x_H , so wirkt die resultierende Kraft:

$$\vec{F}_{\text{res}} = -k(x - x_0) \hat{e}_x. \quad (3.8)$$

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom gilt:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0), \quad (3.9)$$

Dies ist eine **lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung**. Sie beschreibt eine harmonische Schwingung um die Gleichgewichtslage x_0 . Eine allgemeine Lösung lautet:

$$x(t) = x_0 + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.10)$$

Die Koeffizienten A und B können wir mit unseren Anfangsbedingungen berechnen:

$$x(t=0) = x_H \quad \Rightarrow \quad A = x_H - x_0, \quad \dot{x}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0. \quad (3.11)$$

Damit haben wir ein Beispiel gefunden, bei dem die Anwendung der Newtonschen Axiome auf ein reales physikalisches System direkt zu einer Differentialgleichung führt.

3.2 Bewegungsgleichung und Differentialgleichungen

Das Ziel der Dynamik besteht darin, für ein gegebenes physikalisches System die *Bewegungsgleichung* aufzustellen, also den Zusammenhang zwischen Kräften und der daraus resultierenden Bewegung zu beschreiben. Aus den Newtonschen Axiomen folgt dabei das Grundschemata

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad \vec{r} = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

Diese Gleichung ist der Ausgangspunkt aller mechanischen Probleme: Sind die wirkenden Kräfte bekannt, so lässt sich daraus die Bahn $\vec{r}(t)$ des Körpers bestimmen. Umgekehrt kann die beobachtete Bewegung dazu dienen, Kräfte zu rekonstruieren.

Mathematisch betrachtet handelt es sich bei dieser Gleichung um ein **System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung** in den drei Ortskoordinaten:

$$m \ddot{x}_i = F_i(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.12)$$

In kompakter Form schreibt man also:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Diese Gleichung bestimmt vollständig die Bewegung eines Körpers, sofern Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit gegeben sind. Damit wird die Beschreibung physikalischer Vorgänge zu einer mathematischen Aufgabe: der Lösung von Differentialgleichungen.

3.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL)** beschreibt den Zusammenhang zwischen einer unbekanntem Funktion $x(t)$ und ihren Ableitungen nach einer einzigen unabhängigen Variablen (in der Mechanik meist die Zeit t). Allgemein gilt:

$$G(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (3.13)$$

wobei $x^{(n)}$ die n -te Ableitung von x nach der Zeit bezeichnet. Der höchste vorkommende Ableitungsgrad bestimmt die **Ordnung** der DGL.

Der Begriff „gewöhnlich“ bedeutet, dass die Gleichung nur Ableitungen nach **einer** unabhängigen Variablen enthält – im mechanischen Kontext ist dies meist die Zeit t . Im Gegensatz dazu enthalten **partielle Differentialgleichungen (PDGL)** Ableitungen nach mehreren unabhängigen Variablen, etwa nach Ort und Zeit, wie sie beispielsweise in der Wellengleichung oder der Wärmeleitungsgleichung auftreten. Differentialgleichungen spielen in der Physik eine zentrale Rolle, da viele Gesetze — etwa die Newtonschen Axiome — zeitliche Änderungen physikalischer Größen beschreiben.

3.2.2 Lineare und nichtlineare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung heißt **linear**, wenn die gesuchte Funktion $x(t)$ und ihre Ableitungen nur in *erster Potenz* auftreten und *nicht miteinander multipliziert* werden. Allgemein kann eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung in der Form

$$a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \dot{x} + a_0(t) x = f(t) \quad (3.14)$$

geschrieben werden, wobei die Koeffizienten $a_i(t)$ bekannte Funktionen der Zeit sind. Enthält die Gleichung dagegen Terme wie x^2 , \dot{x}^2 , $x\dot{x}$ oder andere nichtlineare Kombinationen, so spricht man von einer **nichtlinearen Differentialgleichung**. Nichtlineare Gleichungen treten häufig in realen physikalischen Systemen auf, sind jedoch meist schwieriger zu lösen. Einige typische Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{linear: } & \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \\ \text{nichtlinear: } & \ddot{x} + \omega^2 x + \alpha x^3 = 0. \end{aligned}$$

In der klassischen Mechanik sind viele Modelle im ersten Schritt linearisiert, um sie analytisch behandeln zu können. Nichtlineare Effekte werden dann oft in einem späteren Schritt als Korrektur berücksichtigt.

3.2.3 Homogene und inhomogene Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung heißt **homogen**, wenn sie keine von der gesuchten Funktion unabhängigen Terme enthält, also keine „äußeren Antriebe“ oder „Quellen“. Ein Beispiel ist: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Diese Gleichung beschreibt eine freie Schwingung ohne äußere Kraft — etwa das Federpendel im Vakuum.

Eine Gleichung heißt **inhomogen**, wenn ein zusätzlicher Term $f(t)$ auftritt, der von x unabhängig ist. Ein Beispiel wäre hier ein getriebenes Federpendel $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$.

Die Frage ist nun wie wir solche Differentialgleichungen lösen können. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung besteht aus zwei Teilen:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t). \quad (3.15)$$

- $x_{\text{hom}}(t)$ ist die **homogene Lösung** — sie beschreibt die Eigenbewegung des Systems ohne äußere Einflüsse.
- $x_{\text{part}}(t)$ ist eine **partikuläre Lösung** — sie beschreibt den stationären Anteil, der direkt durch die äußere Anregung $f(t)$ verursacht wird.

Dieses Prinzip wird **Superpositionsprinzip der Lösungen** genannt und folgt aus der Linearität der zugrunde liegenden Gleichung. In der Mechanik führt es zu einer klaren Trennung zwischen *freier Bewegung* und *erzwungener Bewegung*.

Eine homogene Lösung für eine lineare Differentialgleichung kann man via eines Exponentialansatzes finden. Einsetzen des Ansatzes in Eq.3.14 liefert

$$x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow (a_n(t) \lambda^n + a_{n-1}(t) \lambda^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \lambda + a_0(t)) e^{\lambda t} = 0, \quad (3.16)$$

Man erhält nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn der Term in der Klammer null wird. Die Aufgabe reduziert sich also auf die Suche nach den Nullstellen eines Polynoms n -ten Grades („charakteristisches Polynom“). Man erhält n Lösungen $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$, die auch entartet sein können, d.h. mehrere λ Werte sind gleich. Eine allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}, \quad \text{mit Entartung: } x(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^{\nu_i-1} c_{i,m} t^m e^{\lambda_i t} \quad (3.17)$$

die Koeffizienten $c_{i,m}/c_i$ werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. ν_i ist der Grad der Entartung. Eine Differentialgleichung n -ter-Ordnung benötigt n Anfangsbedingungen.

3.2.4 Beispiel: Kräftefreie Bewegung

Wir betrachten zunächst das wahrscheinlich einfachste System in einer Dimension: die Kräftefreie Bewegung. Im Inertialsystem ohne äußere Kräfte gilt nach dem 1. Axiom:

$$m \ddot{x}(t) = 0. \quad (3.18)$$

Dies ist eine **lineare homogene** Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir nutzen jetzt einen **Exponentialansatz** um die Lösung dieser Differentialgleichung zu finden. Wir setzen

$$x(t) = e^{\lambda t}. \quad (3.19)$$

Einsetzen liefert die charakteristische Gleichung

$$m \lambda^2 e^{\lambda t} = 0 \iff \lambda^2 = 0. \quad (3.20)$$

Damit ist $\lambda = 0$ eine *doppelte Nullstelle* und damit wird der Entartungsgrad $\nu = 2$. Für so eine doppelte Wurzel lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}. \quad (3.21)$$

Mit $\lambda = 0$ folgt

$$x(t) = c_1 + c_2 t. \quad (3.22)$$

Physikalisch: *gleichförmige Bewegung* mit konstanter Geschwindigkeit c_2 .

3.2.5 Beispiel: Gedämpfte Bewegung

Wir betrachten nun eine Reibungskraft F_s die eine freie Bewegung dämpft. Eine Reibungskraft sie proportional zur Geschwindigkeit, damit betrachten wir die lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) = 0, \quad (3.23)$$

mit α als die Reibungskonstante. Wieder machen wir einen Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und erhalten die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \alpha \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\alpha. \quad (3.24)$$

Damit ergibt sich als unsere Lösung:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-\alpha t}; \quad (3.25)$$

Der erste Term c_1 beschreibt den Grenzwert, den $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ erreicht (stationäre Endlage). Der zweite Term $C_2 e^{-\alpha t}$ beschreibt das exponentielle Abklingen der Geschwindigkeit:

$$\dot{x}(t) = -\alpha C_2 e^{-\alpha t}.$$

Anfangs bewegt sich der Körper, die Reibung bremst ihn, und schließlich kommt er zur Ruhe. Eine alternative Variante diese Gleichung zu lösen ist durch **Integration**. Definieren wir $\dot{x} = v$ erhalten wir die DGL

$$\dot{v}(t) = -\alpha v(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\alpha v. \quad (3.26)$$

Nun trennen wir die Variablen v und t :

$$\frac{1}{v} dv = -\alpha dt. \quad (3.27)$$

und integrieren beide Seiten:

$$\int \frac{1}{v} dv = \int -\alpha dt. \quad (3.28)$$

Das ergibt

$$\ln |v| = -\alpha t + C, \quad (3.29)$$

wobei C eine Integrationskonstante ist. Durch Exponenzieren erhalten wir

$$|v(t)| = e^{-\alpha t + C} = e^C e^{-\alpha t}. \quad (3.30)$$

Ist z. B. die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ gegeben, so wissen wir das $v_0 = e^C$ gilt. Damit lautet die Lösung

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t}. \quad (3.31)$$

Die Geschwindigkeit nimmt also exponentiell mit der Zeit ab; die Zeitskala des Abklingens ist durch $1/\alpha$ bestimmt.

Kurzer Überblick zur Integration

Beim Lösen von Differentialgleichungen treten Integrale auf. Zur Erinnerung: Ein Integral beschreibt im Kern die *Aufsummierung* von unendlich vielen infinitesimal kleinen Beiträgen. Eine anschauliche Interpretation erhält man durch eine Diskretisierung der Zeit. Wir unterteilen ein Zeitintervall $[t_0, t]$ in N gleich große Abschnitte der Länge $\Delta t = \frac{t-t_0}{N}$. Für eine Funktion $f(t)$ können wir dann näherungsweise schreiben:

$$\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \Delta t, \quad t_k = t_0 + k \Delta t. \quad (3.32)$$

Das Integral entsteht als Grenzwert dieser Summe, wenn die Unterteilung immer feiner wird:

$$\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \Delta t. \quad (3.33)$$

Diese Darstellung zeigt zwei wichtige Punkte:

- Das Integral misst die *gesammelte Wirkung* einer Größe über die Zeit.
- Das Integral ist der Grenzwert einer diskreten Summe über sehr kleine Zeitintervalle.

In physikalischen Anwendungen — etwa bei der Lösung von Differentialgleichungen — dient die Integration dazu, aus einer bekannten Änderungsrate (wie \dot{v}) die zugehörige Funktion $v(t)$ wiederzugewinnen.

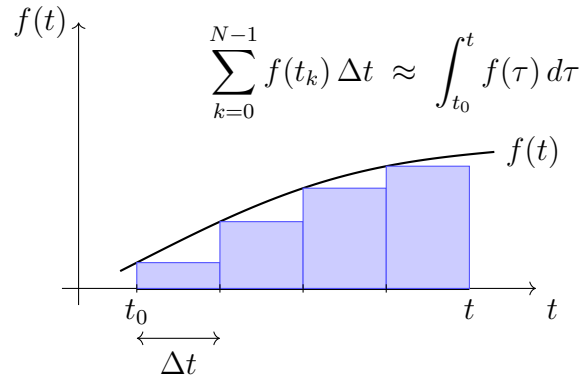


Abbildung 3.2: Das Integral als Grenzwert einer Summe: Rechtecksapproximation von $\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$.

3.2.6 Beispiel: Gedämpfte und getriebene Bewegung

Wir betrachten nun eine gedämpfte Bewegung die periodisch angetrieben wird. Dazu betrachten wir die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{v}(t) + \alpha v(t) = \beta \cos(\Omega t), \quad (3.34)$$

wobei $\alpha > 0$, β und Ω Konstanten sind. Die homogene Lösung dieser Differentialgleichung kennen wir schon, diese beschreibt den exponentiellen Abfall der Geschwindigkeit. Wir wollen jetzt die partikuläre Lösung finden, hierzu verwenden wir die **Methode des integrierenden Faktors**. Ziel ist es, die linke Seite als totale Ableitung zu schreiben. Dazu multiplizieren wir die Gleichung mit dem Faktor $e^{\alpha t}$:

$$e^{\alpha t} \dot{v} + \alpha e^{\alpha t} v = \beta e^{\alpha t} \cos(\Omega t). \quad (3.35)$$

Die linke Seite ist nun die Ableitung des Produkts $e^{\alpha t} v(t)$:

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} v(t)) = \beta e^{\alpha t} \cos(\Omega t). \quad (3.36)$$

Durch Integration erhalten wir

$$e^{\alpha t} v(t) = \beta \int_0^t e^{\alpha t'} \cos(\Omega t') dt' + C, \quad (3.37)$$

wobei C eine Integrationskonstante ist. Nun wollen wir das Integral auf der rechten Seite der Gleichung berechnen. Dazu setzen wir

$$I_c(t) = \int_0^t e^{\alpha t'} \cos(\Omega t') dt', \quad I_s(t) = \int_0^t e^{\alpha t'} \sin(\Omega t') dt' \quad (3.38)$$

und verwenden **partielle Integration**, diese ist definiert als

$$\int_{x_0}^{x_1} dx u(x)v'(x) = [u(x)v(x)] \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} dx u'(x)v(x). \quad (3.39)$$

Zunächst für I_c :

$$I_c(t) = \int_0^t e^{\alpha t'} \cos(\Omega t') dt' = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\Omega t) - \frac{1}{\alpha} + \frac{\Omega}{\alpha} \int_0^t e^{\alpha t'} \sin(\Omega t') dt' \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\Omega t) - \frac{1}{\alpha} + \frac{\Omega}{\alpha} I_s. \quad (3.41)$$

Analog für I_s :

$$I_s(t) = \int_0^t e^{\alpha t'} \sin(\Omega t') dt' = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\alpha} \int_0^t e^{\alpha t'} \cos(\Omega t') dt' \quad (3.42)$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\alpha} I_c. \quad (3.43)$$

Damit erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für $I_c(t)$ und $I_s(t)$. Wir lösen nach $I_c(t)$ auf. Dazu setzen wir $I_s(t)$ in die erste Gleichung ein:

$$I_c(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\Omega t) - \frac{1}{\alpha} + \frac{\Omega}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\alpha} I_c(t) \right] \quad (3.44)$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\Omega t) + \frac{\Omega}{\alpha^2} e^{\alpha t} \sin(\Omega t) - \frac{1}{\alpha} - \frac{\Omega^2}{\alpha^2} I_c(t). \quad (3.45)$$

Damit erhalten wir

$$I_c(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2} e^{\alpha t} \cos(\Omega t) + \frac{\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2} e^{\alpha t} \sin(\Omega t) - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2}. \quad (3.46)$$

Einsetzen in Eq.(3.37) erhalten wir die allgemeine Lösung

$$e^{\alpha t} v(t) = \beta e^{\alpha t} \frac{\alpha \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)}{\alpha^2 + \Omega^2} + \left[C - \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \Omega^2} \right], \quad (3.47)$$

multiplizieren mit dem exponentiellen factor gibt uns

$$v(t) = \frac{\beta}{\alpha^2 + \Omega^2} (\alpha \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)) + \left[C - \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \Omega^2} \right] e^{-\alpha t}. \quad (3.48)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.34) besteht also aus einem **stationären Anteil** (partikuläre Lösung) und dem **abklingenden Anteil** der homogenen Lösung. Es gilt weiterhin das $C = v_0$ da sich ein Teil des abklingenden Anteils mit dem stationären aufhebt für $t = 0$.

3.3 Bewegung in beschleunigten Bezugssystemen

Die Newtonschen Axiome bilden die Grundlage der klassischen Mechanik und gelten in ihrer gewohnten Form nur in *Inertialsystemen*, also in Bezugssystemen, die sich geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegen. In den bisherigen Beispielen — vom freien Fall über das Federpendel bis hin zu Bewegungsgleichungen — haben wir stets ein solches Inertialsystem verwendet. Dort genügt es, die wirkenden Kräfte zu bestimmen, um die Beschleunigung und damit die Bewegung eines Körpers vorherzusagen.

Im Alltag jedoch befinden wir uns häufig in *beschleunigten* oder sogar *rotierenden* Bezugssystemen: in einem fahrenden Auto, einem abhebenden Flugzeug, einem Karussell oder auf der sich drehenden Erde. In solchen Systemen scheint das Verhalten von Körpern oft im Widerspruch zu den Newtonschen Gesetzen zu stehen: Gegenstände „rutschen zur Seite“, Pendel zeigen ablenkende Bewegungen, und in einem rotierenden System wird man „nach außen gedrückt“. Wie lässt sich das mit dem Newtonschen Weltbild vereinbaren?

Die Antwort lautet: Auch in einem beschleunigten Bezugssystem Σ' , das sich *nicht* geradlinig und gleichförmig relativ zu einem Inertialsystem Σ bewegt, können wir Bewegungen berechnen — *wenn* wir die Dynamik um sogenannte **Scheinkräfte** ergänzen. Diese Kräfte sind keine physikalischen Wechselwirkungen, sondern mathematische Korrekturterme, die die Beschleunigung des Bezugssystems selbst berücksichtigen. Besonders wichtig sind dabei zwei Fälle: die *Zentrifugalkraft*, die in einem rotierenden System nach außen weist, und die *Corioliskraft*, die Bewegungen quer zur Rotationsrichtung ablenkt.

Um diese Scheinkräfte sauber herzuleiten, benötigen wir eine genaue Beschreibung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in rotierenden Koordinatensystemen. Dazu stellen wir zunächst die Bewegung in Polarkoordinaten vor.

3.3.1 Bewegung in Polarkoordinaten

Wir betrachten zunächst die Bewegung eines Punktes in der Ebene (z.B. der x_1 - x_2 -Ebene). Statt kartesischer Koordinaten (x, y) verwenden wir Polarkoordinaten (r, φ) :

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t), \quad (3.49)$$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t). \quad (3.50)$$

Der Ortsvektor lässt sich in Polarkoordinaten schreiben als

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{e}_x + y(t) \hat{e}_y = r(t) \hat{e}_r(t), \quad (3.51)$$

wobei der *radiale* Einheitsvektor

$$\hat{e}_r(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

in Richtung vom Ursprung zum Punkt zeigt. Dazu definieren wir den *tangentialen* Einheitsvektor

$$\hat{e}_\varphi(t) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

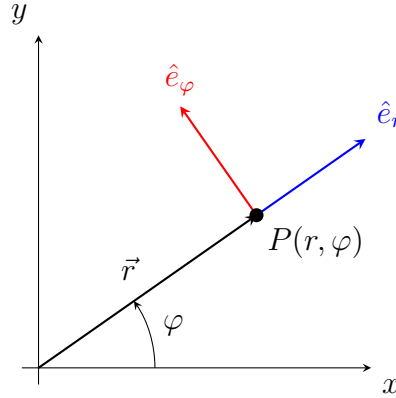


Abbildung 3.3: Polarkoordinaten (2D): Ortsvektor \vec{r} , Winkel φ und Einheitsvektoren \hat{e}_r , \hat{e}_φ .

der senkrecht zu \hat{e}_r steht und in Richtung wachsender Winkelkoordinate φ zeigt. Wichtig: \hat{e}_r und \hat{e}_φ hängen über $\varphi(t)$ explizit von der Zeit ab. Damit sind nicht nur $r(t)$ und $\varphi(t)$ zeitabhängig, sondern auch die Basisvektoren selbst.

Um die zeitliche Änderung beschreiben zu können benötigen wir die zeitliche Ableitungen der Basisvektoren. Leiten wir \hat{e}_r nach der Zeit ab, erhalten wir (Kettenregel):

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \dot{\varphi}(t) \\ \cos \varphi(t) \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = \dot{\varphi}(t) \hat{e}_\varphi(t). \quad (3.54)$$

Analog folgt

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi(t) \dot{\varphi}(t) \\ -\sin \varphi(t) \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}(t) \hat{e}_r(t). \quad (3.55)$$

Diese beiden Beziehungen sind der Schlüssel zur Berechnung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten.

Zunächst berechnen wir die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten, mit $\vec{r}(t) = r(t) \hat{e}_r(t)$ erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}(t) \hat{e}_r(t) + r(t) \frac{d\hat{e}_r}{dt} \quad (3.56)$$

$$= \dot{r}(t) \hat{e}_r(t) + r(t) \dot{\varphi}(t) \hat{e}_\varphi(t). \quad (3.57)$$

Die Geschwindigkeit zerfällt also in eine radiale Komponente \dot{r} und eine tangentielle Komponente $r\dot{\varphi}$. Im nächsten Schritt wollen wir die Beschleunigung in Polarkoordinaten berechnen. Leiten wir die Geschwindigkeit nochmals nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \right) \quad (3.58)$$

$$= \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \hat{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt}. \quad (3.59)$$

Setzen wir die oben gefundenen Ableitungen der Basisvektoren ein,

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi, \quad \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \hat{e}_r, \quad (3.60)$$

so ergibt sich nach Zusammenfassen

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi. \quad (3.61)$$

Damit sind die Komponenten der Beschleunigung in Polarkoordinaten:

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, \quad (3.62)$$

$$a_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}. \quad (3.63)$$

Dies ist die allgemeine Darstellung der Beschleunigung in Polarkoordinaten. Diese schließt sämtliche zuvor diskutierten Spezialfälle konsistent mit ein. Zum Beispiel die Zentripetalbeschleunigung bei Kreisbewegung: die wir in Unterkapitel 1.3.4 betrachtet haben. Für einen Körper, der sich auf einer Kreisbahn mit Radius R und konstanter Winkelgeschwindigkeit ω bewegt, gilt

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}.$$

Diese Zentripetalbeschleunigung zeigt immer zum Mittelpunkt des Kreises. Mit der nun hergeleiteten allgemeinen Beschleunigungsformel in Polarkoordinaten können wir diesen Spezialfall unmittelbar wiederfinden. Für die gleichförmige Kreisbewegung gelten

$$r(t) = R = \text{konstant}, \quad \dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{konstant}, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Einsetzen in die allgemeine Formel liefert ($\vec{r} = R \hat{e}_r$)

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -R\omega^2, \quad a_\varphi = 0,$$

also

$$\vec{a} = -R\omega^2 \hat{e}_r = -\omega^2 \vec{r},$$

also genau das Ergebnis, das wir zuvor aus rein geometrischen Überlegungen gewonnen haben. Dieser Spezialfall ist genau die Situation, die wir betrachten, wenn ein Koordinatensystem Σ' mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die x_3 -Achse relativ zu einem Inertialsystem Σ rotiert. Auf dieser Grundlage können wir im nächsten Schritt die auftretenden Scheinkräfte in solchen rotierenden Bezugssystemen herleiten.

3.3.2 Ein Beispiel für ein Nicht-Inertialsystem

Wir wollen nun ein erstes konkretes Beispiel für ein beschleunigtes Bezugssystem untersuchen, wir folgen hier der Diskussion im zweiten Kapitel des Buches [1]. Wir betrachten zwei Koordinatensysteme Σ und Σ' , deren Ursprünge aus Einfachheitsgründen zusammenfallen sollen.

- Σ sei ein *Inertialsystem*. In diesem System gelten die Newtonschen Axiome in ihrer üblichen Form.
- Σ' sei ein System, das sich relativ zu Σ mit einer **konstanten Winkelgeschwindigkeit** ω um die x_3 -Achse dreht.

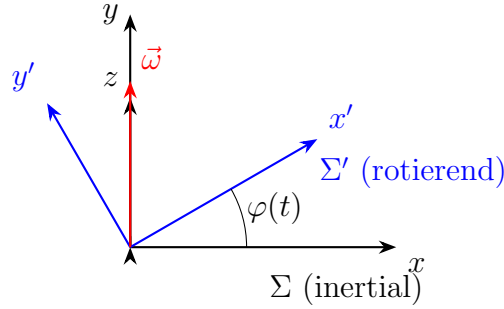


Abbildung 3.4: Inertialsystem Σ und rotierendes System Σ' mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die z -Achse.

Ein solches rotierendes Bezugssystem ist in der klassischen Mechanik von zentraler Bedeutung: Beispiele sind die Erdoberfläche, rotierende Messgeräte, oder gedrehte Laboraufbauten. In diesen Systemen entstehen die für Nicht-Inertialsysteme typischen Scheinkräfte — insbesondere Zentrifugal- und Corioliskraft.

Da sich das System Σ' um die x_3 -Achse dreht, ist es zweckmäßig, die Bewegung eines Punktes nicht in kartesischen, sondern in **Zylinderkoordinaten** zu beschreiben:

$$(r, \varphi, z), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Diese Koordinaten besitzt den Vorteil das die Rotation um die x_3 -Achse sich direkt durch eine zeitabhängige Winkelkoordinate $\varphi(t)$ darstellen lässt. Zudem können wir die zuvor hergeleiteten Formeln für Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten (bzw. in der x_1 - x_2 -Ebene) unmittelbar verwenden:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi.$$

Damit sind wir nun in der Lage, die Bewegung eines Körpers sowohl im Inertialsystem Σ als auch im rotierenden System Σ' systematisch zu vergleichen. Auf dieser Grundlage werden wir zeigen, wie die in Σ' auftretenden *Scheinkräfte* entstehen und wie sie in die Bewegungsgleichungen eingehen.

Wir betrachten nun einen Massenpunkt der Masse m , der im rotierenden System Σ' in der Ebene $z = 0$ auf konstantem Radius R ruht. Relativ zu Σ' ist seine Position also

$$r' = R = \text{konstant}, \quad \varphi' = \text{konstant}, \quad z' = 0,$$

d.h. aus dieser 'rotierenden' Sichtweise betrachtet wirken scheinbar keine Kräfte auf den Körper. Wenn wir jetzt den Blickpunkt ändern und die Beschreibung im Inertialsystem Σ vornehmen, sehen wir das derselbe Punkt eine gleichförmige Kreisbewegung mit Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω ausführt:

$$r = R = \text{konstant}, \quad \varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad z' = 0.$$

Aus der in Polarkoordinaten hergeleiteten Beschleunigung folgt für die bekannte gleichförmige Kreisbewegung mit

$$\vec{a} = -R\omega^2 \hat{e}_r. \tag{3.64}$$

Die Beschleunigung ist also rein radial nach innen gerichtet (*Zentripetalbeschleunigung*). Nach dem zweiten Newtonschen Axiom muss es damit eine nach innen gerichtete reale Kraft der Größe $F_{\text{real}} = mR\omega^2$ wirken (z. B. Seilspannung oder Reibungskraft), um den Massenpunkt auf der Kreisbahn zu halten.

Im Inertialsystem wirkt also eine Kraft auf den Körper und damit vollzieht er eine gleichmässig beschleunigte Bewegung. Im rotierenden System Σ' erscheint derselbe Körper in Ruhe. Würden wir hier die Newtonsche Gleichung in der gewohnten Form gelten wäre er kräftefrei, bzw. die Summe aller Kräfte wäre gleich null. Das steht im Widerspruch zur Beschreibung in Σ : dort ist eine reale, radial nach innen gerichtete Kraft nötig, um die Kreisbewegung zu ermöglichen.

Um beide Beschreibungen miteinander verträglich zu machen, erweitern wir die Bewegungsgleichung im *nicht-inertialen* System Σ' um eine zusätzliche Kraft, die *nicht* aus einer physikalischen Wechselwirkung resultiert, sondern aus der Rotation des Bezugssystems selbst:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{\text{real}} + \sum \vec{F}_{\text{schein}}.$$

Im vorliegenden Beispiel ist $\vec{a}' = 0$, also

$$0 = \vec{F}_{\text{real}} + \vec{F}_{\text{schein}}. \quad (3.65)$$

Da \vec{F}_{real} nach innen zeigt, muss die Scheinkraft nach außen zeigen:

$$\vec{F}_{\text{schein}} = -\vec{F}_{\text{real}} = +mR\omega^2 \hat{e}_r. \quad (3.66)$$

Diese nach außen gerichtete Kraft wird **Zentrifugalkraft** genannt. Sie tritt im rotierenden System Σ' zusätzlich zu den realen Kräften auf und ist eine direkte Folge der Rotation des Bezugssystems. Die Zentrifugalkraft ist somit keine neue physikalische Wechselwirkung, sondern ein Artefakt der Beschreibung in einem rotierenden, also nicht-inertialen Bezugssystem.

Nehmen wir nun an das wir keine konkrete Bewegung oder Kraft betrachten, sondern vergleichen nur die allgemeinen Komponenten der Beschleunigungen in Polarkoordinaten in beiden Systemen. Im Inertialsystem Σ gilt für die Beschleunigung in Polarkoordinaten

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad \Rightarrow \quad F_r = ma_r, \quad (3.67)$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad \Rightarrow \quad F_\varphi = ma_\varphi, \quad (3.68)$$

$$a_z = \ddot{z} \quad \Rightarrow \quad F_z = ma_z, \quad (3.69)$$

wobei F_r , F_φ , F_z die Komponenten der *realen* Kräfte in Σ sind. Wir wollen jetzt die Kraftkomponenten auf das rotierende System umrechnen. Da sich Σ' mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse dreht und $\varphi'(t)$ der Winkel relativ zu Σ' ist, gilt

$$\varphi = \varphi' + \omega t, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}' + \omega, \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}'. \quad (3.70)$$

Im rotierenden System Σ' würde man – in Analogie zur Inertialform – die Beschleunigung mit

$$a'_r = \ddot{r}' - r'\dot{\varphi}'^2 = \ddot{r} - r(\dot{\varphi} - \omega)^2, \quad (3.71)$$

$$a'_\varphi = r'\ddot{\varphi}' + 2\dot{r}'\dot{\varphi}' = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}(\dot{\varphi} - \omega), \quad (3.72)$$

$$a'_z = \ddot{z}' = \ddot{z}, \quad (3.73)$$

Vergleicht man dies mit den Ausdrücken aus dem Inertialsystem, erhält man

$$m(\ddot{r}' - r\dot{\varphi}'^2) = F_r + 2mr\omega\dot{\varphi} + mr\omega^2 =: F_r', \quad (3.74)$$

$$m(r\ddot{\varphi}' + 2\dot{r}'\dot{\varphi}') = F_\varphi - 2m\omega\dot{r} =: F_\varphi', \quad (3.75)$$

$$m\ddot{z}' = F_z =: F_z'. \quad (3.76)$$

Wäre Σ' ein Inertialsystem, so müsste gelten

$$F_r' = F_r, \quad F_\varphi' = F_\varphi, \quad F_z' = F_z.$$

Die zusätzlichen Terme in (3.74) und (3.75) zeigen, dass dies nicht der Fall ist: In Σ' treten *Zusatzkräfte* auf, die von der Rotation des Bezugssystems abhängen:

$$F_{r,\text{Zentrifugal}} = mr\omega^2, \quad (3.77)$$

$$F_{r,\text{Coriolis}} = 2mr\omega\dot{\varphi}, \quad (3.78)$$

$$F_{\varphi,\text{Coriolis}} = -2m\omega\dot{r}. \quad (3.79)$$

Diese Kräfte fasst man unter dem Begriff **Scheinkräfte** zusammen. Sie sind keine neuen physikalischen Wechselwirkungen, sondern Korrekturterme, die auftreten, weil Σ' kein Inertialsystem ist. Im Inertialsystem Σ sind sie nicht vorhanden; dort wird die gesamte Dynamik allein durch die realen Kräfte F_r, F_φ, F_z beschrieben.

Kapitel 4

Wie hängt Arbeit mit Energie zusammen?

- **Physikalisches Thema:** Arbeit, Energie, Potentiale
- **Inhalte:** kinetische & potentielle Energie, konservative Kräfte, Potential
- **Mathematik:** Integralrechnung, Gradient

4.1 Energien, Potentiale & Arbeit

4.1.1 Motivation: Energien, Potential & Arbeit

In den bisherigen Kapiteln haben wir Kräfte kennengelernt und gelernt, wie sie über die Newtonschen Axiome die Bewegung eines Körpers bestimmen. Allerdings ist die Berechnung einer Bewegung über Kräfte und Beschleunigungen häufig umständlich. Viele Probleme werden deutlich einfacher, wenn wir statt der Kräfte die damit verbundene *Arbeit* und *Energie* betrachten. Die zentrale Frage dieses Abschnitts lautet daher: *Wie hängen Kräfte, Arbeit und Energie zusammen – und warum führt dies zu einer starken Vereinfachung vieler mechanischer Probleme?* Um diese Frage zu beantworten, führen wir Schritt für Schritt die folgenden Begriffe ein:

- die **Arbeit** einer Kraft als Integral entlang eines Weges,
- die **kinetische Energie** als Maß für die Bewegungsenergie,
- die **potentielle Energie**, die aus einem Kraftfeld gewonnen werden kann,
- **konservative Kräfte**, bei denen Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt,
- das **Potential** als skalare Funktion, aus der die Kraft über den *Gradienten* gewonnen werden kann.

Die dafür notwendigen mathematischen Werkzeuge – insbesondere Linienintegrale und der Gradient – werden wir im Verlauf des Kapitels ebenfalls einführen.

Das Ziel ist es zu zeigen, dass in konservativen Systemen die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant bleibt. Dies ist der **Energieerhaltungssatz**, eine der wichtigsten Strukturen der klassischen Mechanik.

4.1.2 Arbeit einer Kraft

Eine Kraft allein sagt noch nicht aus, *wie viel* sie an einem Körper „bewirkt“. Entscheidend ist nicht nur die Größe der Kraft, sondern auch, *wie weit* und *in welche Richtung* sich der Angriffspunkt der Kraft bewegt. Die physikalische Größe, die beschreibt, wie viel Energie durch eine Kraft übertragen wird, heißt **Arbeit**. D.h. die Arbeit erfasst die Energie die durch eine wirkende Kraft entlang eines Weges von einem System aufgenommen oder abgegeben wird.

Definition der Arbeit: Wir betrachten eine Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ und einen Körper, dessen Ort sich entlang eines Weges γ von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 bewegt. Ein kleines Wegstück $d\vec{r}$ führt zu einer kleinen Arbeit

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -|\vec{F}| \cos(\phi) |d\vec{r}|. \quad (4.1)$$

Das Vorzeichen hier ist Konvention und ϕ ist der Winkel zwischen Kraft und Wegstück, es wird also die Kraftkomponente entlang der Richtung des Weges betrachtet. $|d\vec{r}|$ ist die Länge des kleinen Wegstücks, das der Körper entlang seiner Bahn zurücklegt. Wir verwenden hier ein negatives Vorzeichen, wenn am Massepunkt Arbeit in Richtung des Weges geleistet wird. Insgesamt ergibt sich die verrichtete Arbeit als *Linienintegral* (entlang des Weges C):

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.2)$$

Dies ist gesamte Arbeit, die geleistet wird, um den Körper zwischen zwei Punkten P_1 (\vec{r}_1) und P_2 (Ortsvektor \vec{r}_2) zu verschieben. Dieses Integral hat drei wesentliche Eigenschaften: (i) Es summiert die Energiebeiträge entlang des gesamten Weges. (ii) Nur die Komponente der Kraft *entlang der Bewegungsrichtung* trägt zur Arbeit bei. (iii) Falls Kraft und Weg parallel sind, ist W maximal; bei senkrechter Richtung ist $W = 0$.

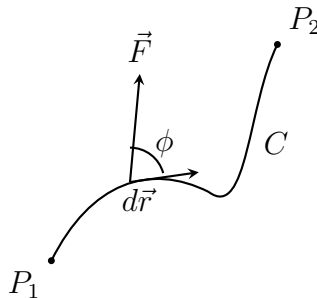


Abbildung 4.1: Kraft entlang eines Weges C und infinitesimales Wegeelement $d\vec{r}$.

Die Arbeit ist negativ, wenn die Kraft die Bewegung unterstützt (z. B. Schieben eines Körpers nach vorne), und positiv, wenn die Kraft der Bewegung entgegenwirkt (Bremsen). Ist die Kraft konstant und der Weg gerade, vereinfacht sich das Integral zu $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$, also dem Skalarprodukt aus Kraft und Verschiebung. Die verrichtete Arbeit gibt an, wie viel *mechanische Energie* auf den Körper übertragen wurde. Später werden wir zeigen, dass die Arbeit der Resultierenden aller Kräfte direkt mit der Änderung der kinetischen Energie zusammenhängt (Arbeit-Energie-Theorem).

Um ein Linienintegral zu berechnen muss die Bahn C auf eine Weise beschrieben werden, die eine Rückführung auf ein gewöhnliches Integral ermöglicht. Dazu verwendet man eine *Parametrisierung* der Raumkurve. Wir wählen einen Parameter α , der die Punkte der Kurve eindeutig in der Form

$$\vec{r}(\alpha)$$

beschreibt. Der Parameter α kann, muss aber nicht, die Zeit t sein. Entscheidend ist lediglich, dass die Kurve durchläuft wird, wenn α von einem Anfangswert α_1 zu einem Endwert α_2 läuft. Für ein infinitesimales Wegstück gilt dann

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha.$$

Damit lässt sich das Linienintegral in ein gewöhnliches Integral umschreiben:

$$W = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{F}(\vec{r}(\alpha)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha. \quad (4.3)$$

Damit wird klar dass das Linienintegral nichts anderes ist als ein „normales“ Riemann-Integral über den Parameter α . Die Geometrie der Kurve steckt vollständig in der Parametrisierung $\vec{r}(\alpha)$. und die Richtung von $d\vec{r}/d\alpha$ bestimmt die Orientierung des Integrals. Diese Vorgehensweise ist universell einsetzbar, unabhängig davon, ob die parametrisierte Bewegung zeitabhängig ist oder nicht. Wenn die Kurve einem physikalischen Bewegungsablauf entspricht, liegt es allerdings oft nahe, den Parameter α gleich mit der Zeit t zu identifizieren.

4.1.3 Beispiel: Arbeit gegen die Gewichtskraft

Wir betrachten ein homogenes Gravitationsfeld der Stärke g in negativer y -Richtung. Die Gewichtskraft auf eine Masse m sei

$$\vec{F}(\vec{r}) = -mg \hat{e}_y. \quad (4.4)$$

Wir heben den Körper von einem Punkt $P_1 = (0, 0)$ auf einen Punkt $P_2 = (0, h)$ an, d.h. C ist der gewählte Weg von P_1 nach P_2 . Zunächst wollen wir den direkter Weg betrachten. Wir parametrisieren den geraden Weg von P_1 nach P_2 durch einen Parameter $\alpha \in [0, 1]$:

$$\vec{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha h \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{d\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

Damit ergibt sich die Arbeit entlang des direkten Weges zu

$$W = - \int_{\alpha=0}^1 \vec{F}(\vec{r}(\alpha)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha = - \int_{\alpha=0}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} d\alpha \quad (4.6)$$

$$= - \int_0^1 (-mgh) d\alpha = mgh \int_0^1 d\alpha = mgh. \quad (4.7)$$

Das Ergebnis: Die Arbeit, die aufgebracht werden muss, um die Masse um die Höhe h gegen die Gewichtskraft anzuheben, beträgt

$$W = mgh.$$

4.1.4 Kinetische Energie und das Arbeit–Energie-Theorem

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Arbeit einer Kraft eingeführt. Nun wollen wir verstehen, wie Arbeit mit der Bewegung eines Körpers zusammenhängt. Dazu betrachten wir die *kinetische Energie* eines Massenpunktes mit Geschwindigkeit \vec{v} :

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2, \quad v^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \quad (4.8)$$

Diese Energie misst, wie viel “Bewegungsinhalt” ein Objekt besitzt. Je größer die Masse oder die Geschwindigkeit, desto größer ist die kinetische Energie.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen der Energie und der Arbeit herleiten, das sogenannte **Arbeit–Energie-Theorem**. Wir beginnen mit dem zweiten Newtonschen Axiom,

$$\vec{F} = m \dot{\vec{v}}. \quad (4.9)$$

Das Skalarprodukt mit dem Wegdifferential $d\vec{r} = \vec{v} dt$ liefert:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \dot{\vec{v}} \cdot (\vec{v} dt) = m (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}) dt. \quad (4.10)$$

Der Ausdruck $\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}$ ist die Zeitableitung von $\frac{1}{2}v^2$, denn

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}. \quad (4.11)$$

Damit folgt mit unserer Vorzeichenkonvention

$$-dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dt = dE_{\text{kin}}, \quad dE_{\text{kin}} = \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} dt. \quad (4.12)$$

so ergibt sich durch Integration entlang eines Weges C :

$$-W_{1 \rightarrow 2} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{\text{kin}}(2) - E_{\text{kin}}(1). \quad (4.13)$$

Damit erhalten wir das **Arbeit–Energie-Theorem** in unserer Vorzeichenkonvention:

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{\text{kin}}(1) - E_{\text{kin}}(2). \quad (4.14)$$

Die verrichtete Arbeit führt zu einer Änderung der kinetischen Energie. Umgekehrt entspricht die Änderung der kinetischen Energie eines Massenpunktes zwischen zwei Punkten seiner Bahn genau der Arbeit, die die auf ihn wirkende Kraft verrichtet. Das Arbeit–Energie-Theorem stellt damit eine direkte Verbindung zwischen Kraftwirkung und Bewegungsänderung her. Die Änderung der Arbeit pro Zeiteinheit definiert die **Leistung** $P = dW/dt$, und damit ist zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Massepunktes proportional zur Leistung der einwirkenden Kraft am Massepunkt ist. Das Vorzeichen der Arbeit kann wie folgt interpretiert werden

- **Positive Arbeit** ($W > 0$) bedeutet Abnahme der kinetischen Energie: Die Kraft wirkt der Bewegung entgegen (z. B. Bremsen).
- **Negative Arbeit** ($W < 0$) bedeutet Zunahme der kinetischen Energie: Die Kraft unterstützt die Bewegung (z. B. Beschleunigen).

Arbeit stellt somit eine *Energieübertragung* dar. Kräfte verrichten Arbeit, wenn sie einen Körper auf einem Weg beeinflussen, und verändern dadurch seine Bewegungsenergie.

4.1.5 Konservative Kräfte und potentielle Energie

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass Arbeit eine Änderung der kinetischen Energie bewirkt. Wir betrachten nun Kräfte, deren verrichtete Arbeit besondere einfache Eigenschaften besitzt: die *konservativen Kräfte*. Eine Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ heißt **konservativ**, wenn die von ihr verrichtete Arbeit zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 *unabhängig vom gewählten Weg* ist, d.h.

$$W_{1 \rightarrow 2}(C_1) = W_{1 \rightarrow 2}(C_2), \quad (4.15)$$

für beliebige Wege C_1 und C_2 , die P_1 und P_2 verbinden. Eine äquivalente Bedingung lautet:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (4.16)$$

also: Die Arbeit über jeden geschlossenen Weg verschwindet. Beispiele für eine konservative Kraft sind die Gewichtskraft im homogenen Gravitationsfeld, die Federkraft und elektrostatische Kräfte.

Wir haben gesehen, dass die verrichtete Arbeit einer Kraft unmittelbar mit der Änderung der kinetischen Energie verknüpft ist: $dW = dE_{\text{kin}}$. Arbeit beschreibt also, wie eine Kraft die Bewegung eines Körpers ändert. Bei konservativen Kräften zeigt sich die zuvor bemerkte Eigenschaft, dass die von ihnen verrichtete Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht aber vom genauen Verlauf des Weges. Genau an dieser Stelle entsteht der Bedarf, eine neue Energiegröße einzuführen. Wenn die Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, dann können wir sie als Differenz einer skalaren Funktion interpretieren:

$$W_{1 \rightarrow 2} = U(2) - U(1). \quad (4.17)$$

Die Funktion $U(\vec{r})$ nennen wir *potentielle Energie*. Sie ist so definiert, dass sie genau jene Energie erfasst, die durch eine konservative Kraft *gespeichert* oder *freigesetzt* wird.

Damit erhält die kinetische Energie einen natürlichen Partner: Sie beschreibt die Energie der Bewegung, während die potentielle Energie die Energie der Lage im Kraftfeld beschreibt. Der Ausdruck $U(\vec{r})$ ist eine Energiezuordnung zu jedem Punkt im Raum. Große Werte von U bedeuten, dass es "viel Arbeit kostet", den Körper an diese Position zu bringen.

Setzen wir die Definition in das Arbeit–Energie-Theorem ein, erhalten wir:

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{\text{kin}}(P_2) - E_{\text{kin}}(P_1) = U(P_2) - U(P_1).$$

Dies führt unmittelbar zur **Energieerhaltung**:

$$E_{\text{kin}} + U = \text{konstant}.$$

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie bleibt also erhalten und kann zwischen Bewegungsenergie und Lageenergie hin- und herwandern. In konservativen Systemen kann die mechanische Gesamtenergie weder erzeugt noch vernichtet werden; sie wird lediglich zwischen kinetischer und potentieller Energie umgewandelt. Die Einführung der potentiellen Energie ist daher nicht nur eine mathematische Bequemlichkeit, sondern beschreibt eine fundamentale Struktur der Mechanik.

Die potentielle Energie $U(\vec{r})$ ist also über die Arbeit definiert:

$$U(P_2) - U(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.18)$$

Damit beschreibt $U(\vec{r})$, wie viel Arbeit eine konservative Kraft benötigt oder freisetzt, um einen Körper an eine bestimmte Position zu bringen. Betrachten wir nun eine infinitesimal kleine Verschiebung $d\vec{r}$ des Massenpunktes. Aus der Definition folgt dann

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.19)$$

Der Ausdruck dU ist die totale Änderung der skalaren Funktion $U(\vec{r})$. Nach der multivariaten Kettenregel können wir dU schreiben als

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \nabla U \cdot d\vec{r}.$$

Damit erhalten wir für dieselbe Größe zwei Darstellungen:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{und} \quad dU = \nabla U \cdot d\vec{r}.$$

Da dies für jede beliebige Verschiebung $d\vec{r}$ gelten muss, können die beiden Vektoren vor dem Skalarprodukt nur dann übereinstimmen, wenn gilt:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})}.$$

Der Gradient ∇U gibt die Richtung an, in der das Potential am stärksten ansteigt. Der Kraftvektor zeigt daher in die Richtung des steilsten Abfalls der potentiellen Energie. Konservative Kräfte wirken also immer "bergab" im Potential.

Beispiele

Homogenes Schwerfeld:

$$\vec{F} = -mg \hat{e}_y, \quad U(y) = mgy \text{ (+Konstante)}.$$

Federkraft:

$$\vec{F} = -kx \hat{e}_x, \quad U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \text{ (+Konstante)}.$$

Allgemeines Zentralkraftfeld:

$$\vec{F} = -f(r) \hat{e}_r, \quad U(r) = \int f(r) dr.$$

Diese Beispiele illustrieren die typische Struktur: Bei konservativen Kräften kann man die Kraft aus dem Potential gewinnen und umgekehrt.

Kapitel 5

Warum schwingt ein Pendel – und wann hört es damit auf?

- **Physikalisches Thema:** Harmonischer Oszillator, Reibung
- **Inhalte:** Harmonischer Oszillator, Dämpfung durch Reibung
- **Mathematik:** Lineare DGL, komplexe Zahlen (Ansatz $e^{i\omega t}$)

5.1 Der harmonische Oszillator

5.1.1 Motivation: harmonische Schwingung sind überall

Schwingungen gehören zu den grundlegendsten Bewegungsformen in der Physik. Schon kleine Auslenkungen eines Systems aus seiner Gleichgewichtslage führen in vielen Fällen zu einer zeitlich periodischen Bewegung. Der *harmonische Oszillator* ist dabei das einfachste Modell einer solchen Schwingung und tritt in einer erstaunlichen Vielzahl physikalischer Situationen auf.

Beispiele aus der Mechanik sind Masse–Feder–Systeme, Pendel mit kleinen Auslenkungen oder die Schwingungen von Bauteilen und Brücken. In der Elektrizitätslehre beschreibt der harmonische Oszillator den Wechselstrom in einem *LC-Schwingkreis*. In der Atom- und Molekülphysik modelliert er Bindungsschwingungen zwischen Atomen. Selbst in der Quantenmechanik spielt er eine zentrale Rolle, da der quantenmechanische harmonische Oszillator ein Modell ist, das sich exakt lösen lässt und viele grundlegende Eigenschaften quantisierter Systeme zeigt.

Der harmonische Oszillator ist also nicht nur ein einfaches Beispiel, sondern ein universelles Grundmodell der Physik. Sein mathematisches Verhalten ist so elegant, dass er als Musterbeispiel für die Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung dient. Zudem bietet er einen natürlichen Zugang zur Verwendung komplexer Zahlen in der Physik.

In diesem Abschnitt werden wir daher die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators herleiten, die allgemeine Lösung bestimmen und dabei komplexe Exponentialfunktionen einführen, und anschließend zur realistischeren Situation gedämpfter Schwingungen übergehen. Das Modell des harmonischen Oszillators erlaubt es uns, grundlegende Konzepte wie Energieerhaltung, Eigenfrequenzen und Resonanz zu verstehen, die in der gesamten Physik eine zentrale Rolle spielen.

5.1.2 Der harmonische Oszillator: Herleitung der Bewegungsgleichung

Wir betrachten ein einfaches mechanisches System: Eine Masse m , die an einer Feder mit Federkonstante k befestigt ist. Die Feder sei ideal, das heißt sie besitze keine innere Reibung und folge dem Hookeschen Gesetz. Wir beschränken uns auf eine eindimensionale Bewegung entlang der x -Achse. Das **Hookesche Gesetz** beschreibt die Rückstellkraft einer Feder:

$$\vec{F}_{\text{Feder}} = -k x \hat{e}_x. \quad (5.1)$$

Ist die Masse aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt ($x > 0$ oder $x < 0$), so wirkt eine Kraft, die stets zur Gleichgewichtslage zurückzieht. Die Kraft ist proportional zur Auslenkung und linear in x — daher spricht man von einem *linearen* Oszillator.

Die Federkraft ist ein Beispiel für eine konservative Kraft. Das bedeutet, dass sie sich als negativer Gradient eines Potentials schreiben lässt. Für eindimensionale Systeme vereinfacht sich der Gradient zu einer gewöhnlichen Ableitung nach x :

$$F_{\text{Feder}}(x) = -\frac{dU}{dx}. \quad (5.2)$$

Da wir für die Federkraft das Hookesche Gesetz kennen, können wir das zugehörige Potential durch Integration bestimmen:

$$U(x) = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + \text{Konst.}$$

Wir wählen die additive Konstante so, dass das Potential im Gleichgewichtspunkt $x = 0$ verschwindet. Damit lautet die potentielle Energie der Feder:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Dieses Potential hat ein Minimum bei $x = 0$, was der stabilen Gleichgewichtslage entspricht. Je weiter die Masse ausgelenkt wird, desto mehr Energie ist im Federpotential gespeichert. Lässt man das System los, wird diese potentielle Energie periodisch in kinetische Energie umgewandelt und wieder zurück — der typische Mechanismus einer Schwingung.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung für die Position x aufstellen. Wirkende Kraft und Beschleunigung stehen über das zweite Newtonsche Gesetz in Beziehung:

$$m \ddot{x}(t) = F_{\text{Feder}} = -k x(t). \quad (5.3)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $x(t)$. Wir können sie auch schreiben als

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.4)$$

Die Größe ω_0 wird als *Eigenfrequenz* des Systems bezeichnet. Diese Gleichung beschreibt eine Rückstellbewegung: Die Beschleunigung ist immer proportional zur Auslenkung und zeigt zur Gleichgewichtslage. Ein solches Verhalten findet sich in vielen physikalischen Systemen, insbesondere bei kleinen Auslenkungen um ein stabiles Gleichgewicht.

Die Lösung dieser Gleichung ist eine Schwingung mit der Frequenz ω_0 , wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden.

5.1.3 Lösung der Bewegungsgleichung mit Exponentialansatz

Wir betrachten die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators Eq.5.4. Eine bewährte Methode zur Lösung solcher Gleichungen ist der *Exponentialansatz*

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad (5.5)$$

wobei λ zunächst eine (noch unbekannte) Konstante ist. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0. \quad (5.6)$$

Da $e^{\lambda t} \neq 0$ ist, folgt die sogenannte charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (5.7)$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm \sqrt{-1} \omega_0 \equiv \pm i \omega_0, \quad (5.8)$$

wobei i durch $i^2 = -1$ definiert ist. Hier tauchen also ganz natürlich *komplexe Zahlen* auf. Die beiden zugehörigen (komplexwertigen) Lösungen lauten

$$x_{1,2}(t) = e^{\pm i \omega_0 t}. \quad (5.9)$$

Aufgrund der Linearität der Differentialgleichung ist eine Linearkombination dieser Lösungen ebenfalls eine Lösung:

$$x(t) = C_1 e^{i \omega_0 t} + C_2 e^{-i \omega_0 t}, \quad (5.10)$$

wobei C_1 und C_2 im Allgemeinen komplexe Konstanten sind.

Da die physikalische Auslenkung $x(t)$ reell sein muss, wählen wir die Konstanten so, dass sich eine reelle Funktion ergibt. Dies geschieht besonders elegant mithilfe der Euler-Formel

$$e^{\pm i \omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm i \sin(\omega_0 t), \quad (5.11)$$

auf die wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen werden. Damit können wir die Lösung umschreiben:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] + C_2 [\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)] \\ &= [C_1 + C_2] \cos(\omega_0 t) + i [C_1 - C_2] \sin(\omega_0 t) \\ &\equiv A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Aus der Linearkombination der komplexen Exponentialfunktionen erhält man als allgemeine reelle Lösung wobei A und B reelle Konstanten sein müssen. d.h. auch das $C_{1,2}$ im Allgemeinen komplexe Zahlen sind. Die reellen Konstanten werden wie immer durch die Anfangsbedingungen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ bestimmt. Damit haben wir gezeigt:

- Der harmonische Oszillator führt eine periodische Schwingung mit der Eigenfrequenz ω_0 aus.
- Komplexe Exponentialfunktionen sind ein nützliches mathematisches Werkzeug, um solche Lösungen kompakt darzustellen.

Im nächsten Abschnitt werden wir die dazu benötigten Grundlagen der komplexen Zahlen und die Euler-Formel genauer besprechen.

5.1.4 Komplexe Zahlen und die Euler-Formel

Bei der Lösung der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators sind komplexe Exponentialfunktionen auf natürliche Weise aufgetreten. In diesem Abschnitt fassen wir die dazu notwendigen mathematischen Grundlagen kurz zusammen.

Komplexe Zahlen erweitern den Zahlenbereich der reellen Zahlen durch die Einführung der imaginären Einheit i , die durch

$$i^2 = -1 \quad (5.13)$$

definiert ist. Eine komplexe Zahl besitzt die Form

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \quad (5.14)$$

wobei a der *reelle* und b der *imaginäre* Teil ist. Hier schreiben wir auch $\Re[z] = a$ und $\Im[z] = b$. Der Betrag einer komplexen Zahl ist definiert als

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5.15)$$

Jede komplexe Zahl $z = a + ib$ lässt sich (mit $z \neq 0$) durch ihre Lage in der komplexen Ebene beschreiben. Dazu interpretiert man den reellen Teil als x -Koordinate und den imaginären Teil als y -Koordinate. Alternative, gibt es auch die sogenannte **Polardarstellung**, d.h. jede komplexe Zahl kann in Polarkoordinaten geschrieben werden:

$$z = r e^{i\varphi}. \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arg(z). \quad (5.16)$$

Man definiert hier das *Argument* von z als den Winkel φ , unter dem der Ortsvektor von z in der komplexen Ebene zur positiven reellen Achse steht. Dieser Winkel ist jedoch nicht eindeutig bestimmt, da man zu φ stets Vielfache von 2π addieren kann. Es gilt also

$$\arg(z) = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Praktisch lässt sich das Argument bestimmen durch

Quadrant	(a, b)	$\varphi = \arg(z)$
I	$a > 0, b > 0$	$\arctan(b/a)$
II	$a < 0, b > 0$	$\arctan(b/a) + \pi$
III	$a < 0, b < 0$	$\arctan(b/a) - \pi$
IV	$a > 0, b < 0$	$\arctan(b/a)$

Für Punkte auf den Achsen gelten zusätzlich:

$$\arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0, \\ 0, & b = 0, a > 0, \\ \pi, & b = 0, a < 0. \end{cases}$$

Damit ist das Argument vollständig definiert. Zu jeder komplexen Zahl $z = a + ib$ gehört die (komplex) konjugierte Zahl

$$z^* = a - ib, \quad (5.17)$$

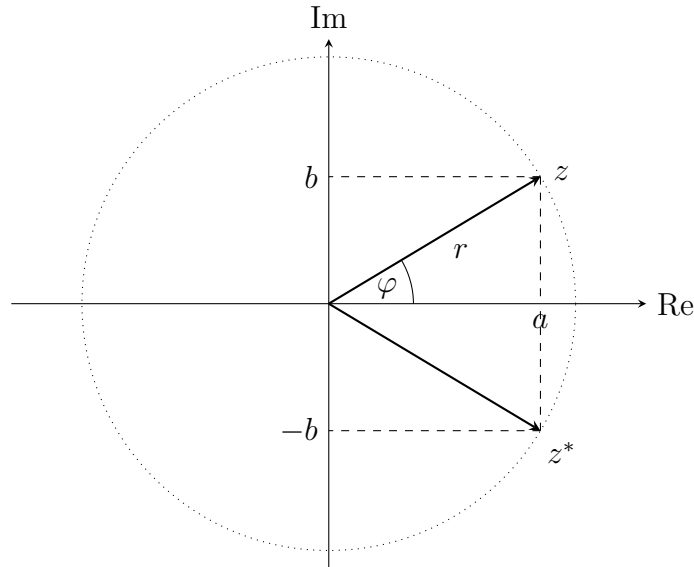


Abbildung 5.1: Polardarstellung einer komplexen Zahl $z = a + ib = re^{i\varphi}$ und der dazugehörigen komplex konjugierten Zahl $z^* = a - ib = re^{-i\varphi}$. Der Kreis markiert alle Punkte mit demselben Betrag r .

die geometrisch die Spiegelung von z an der reellen Achse ist. Wichtige Eigenschaften sind:

$$zz^* = |z|^2, \quad (re^{i\varphi})^* = re^{-i\varphi}.$$

Für die Lösung der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators hatten wir die sogenannte **Euler Formel** hergeleitet. Diese ergibt sich durch die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = 1 + i\varphi + \frac{1}{2}(i\varphi)^2 + \frac{1}{6}(i\varphi)^3 + \dots \\ &= 1 + i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - i\frac{1}{6}\varphi^3 + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \dots\right) \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die *Euler-Formel* stellt eine wichtige Verbindung zwischen komplexen Exponentialfunktionen und periodischen Funktionen her. Es folgen die Identitäten

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \tag{5.19}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{5.20}$$

Damit lassen sich reelle Schwingungen besonders elegant durch komplexe Exponentialfunktionen darstellen. Es gelten die folgenden Rechenregeln zwischen zwei komplexen Zahlen $z_{1,2}$:

- **Addition:** $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- **Multiplikation:** $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- **Division:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

5.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator

5.2.1 Bewegungsgleichung mit Reibungskraft

Im idealisierten Modell des harmonischen Oszillators bleibt die Gesamtenergie des Systems konstant. In realen physikalischen Situationen beobachtet man jedoch, dass Schwingungen im Laufe der Zeit abklingen. Ursache hierfür sind Reibungseffekte, die Energie aus dem System abführen – etwa Luftwiderstand oder innere Reibung in einer Feder. Um diese realistischen Effekte zu berücksichtigen, erweitern wir das Modell um eine Dämpfungskraft oder auch Reibungskraft. Wir nehmen an, dass die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit ist und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt. Dies führt auf das lineare Reibungsgesetz

$$\vec{F}_D = -b \dot{x}(t) \hat{e}_x, \quad (5.21)$$

wobei $b > 0$ der Dämpfungskoeffizient ist. Je größer die Geschwindigkeit, desto stärker wirkt die Dämpfung. Zusammen mit der Federkraft $-kx$ ergibt sich die Gesamtgleichung nach dem zweiten Newtonschen Axiom:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (5.22)$$

Dies ist wiederum eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Im Unterschied zum ungedämpften Oszillator treten nun aber auch reelle Anteile in den Exponenten auf, die ein Abklingen der Schwingung beschreiben.

Wir verwenden erneut den Exponentialansatz

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

und erhalten nach Einsetzen

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0. \quad (5.23)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für λ , deren Lösung lautet:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (5.24)$$

wobei wir wie üblich

$$\gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

definiert haben.

Der Ausdruck unter der Wurzel bestimmt das qualitative Verhalten der Lösung. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. *Unterdämpfung* ($\gamma < \omega_0$): oszillatorisches Verhalten mit abklingender Amplitude.
2. *Kritische Dämpfung* ($\gamma = \omega_0$): schnellstes Abklingen ohne Schwingungen.
3. *Überdämpfung* ($\gamma > \omega_0$): kein Oszillieren; langsames Zurückkehren in das Gleichgewicht.

Im folgenden werden wir diese drei Fälle ausführlich betrachten und ihre physikalische Bedeutung diskutieren.

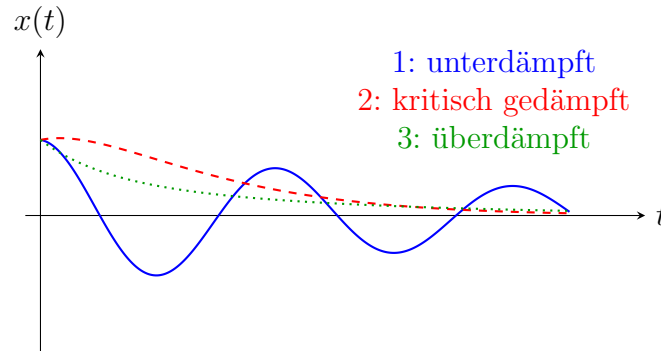


Abbildung 5.2: Qualitatives Verhalten des gedämpften Oszillators: unterdämpft (oszillierend), kritisch gedämpft (schnellster Rückgang ohne Schwingung), überdämpft (langsamer, nicht oszillierender Rückgang).

5.2.2 Lösungen des gedämpften harmonischen Oszillators

Die allgemeine Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators ist

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (5.25)$$

Das Vorzeichen von $\gamma^2 - \omega_0^2$ bestimmt das qualitative Verhalten der Lösung.

Fall 1: Unterdämpfung ($\gamma < \omega_0$)

In diesem Fall ist

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0.$$

Wir definieren

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

so dass

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\omega.$$

Die Werte für $\lambda_{1,2}$ sind damit

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega.$$

Die allgemeine (komplexe) Lösung lautet

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma+i\omega)t} + C_2 e^{(-\gamma-i\omega)t}.$$

Durch geeignete Wahl der Konstanten und unter Nutzung der Euler-Formel erhält man die reelle Form

$$x(t) = e^{-\gamma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (5.26)$$

wobei A und B reelle Konstanten sind, die durch die Anfangsbedingungen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ festgelegt werden.

Physikalisch beschreibt dieser Fall eine *gedämpfte Schwingung*: Die Amplitude nimmt exponentiell mit der Zeit ab, die Schwingung erfolgt mit der gedämpften Kreisfrequenz $\omega < \omega_0$.

Fall 2: Kritische Dämpfung ($\gamma = \omega_0$)

Hier gilt

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\gamma.$$

Wir haben also einen *doppelte Nullstelle* $\lambda = -\gamma$. In diesem Fall ist die allgemeine Lösung nicht einfach $x(t) = Ce^{-\gamma t}$, sondern nimmt die Form

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \tag{5.27}$$

an, wobei A und B reelle Konstanten sind.

Dieser Fall beschreibt das *schnellste mögliche Abklingen* in die Gleichgewichtslage, *ohne* dass das System oszilliert. Kritisch gedämpfte Systeme sind technisch bedeutsam, etwa bei Stoßdämpfern, Messgeräten oder Türschließmechanismen, die schnell in die Ruhelage zurückkehren sollen, ohne zu „überschwingen“.

Fall 3: Überdämpfung ($\gamma > \omega_0$)

In diesem Fall ist

$$\gamma^2 - \omega_0^2 > 0,$$

und die Wurzel ist reell und positiv. Wir definieren

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0.$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_1 = -\gamma + \alpha, \quad \lambda_2 = -\gamma - \alpha.$$

Beide sind negativ:

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{5.28}$$

mit reellen Konstanten C_1 und C_2 . Es treten keine Oszillationen auf; das System kehrt monoton in die Gleichgewichtslage zurück. Da zwei verschiedene Zerfallsraten vorkommen, kann das Abklingen im Vergleich zur kritischen Dämpfung sogar langsamer sein.

Zusammenfassung

- $\gamma < \omega_0$: **unterdämpft** – gedämpfte Schwingung: exponentiell abklingende Sinusfunktion.
- $\gamma = \omega_0$: **kritisch gedämpft** – kein Überschwingen, schnellste Rückkehr ins Gleichgewicht.
- $\gamma > \omega_0$: **überdämpft** – kein Oszillieren, rein exponentielles Abklingen mit zwei verschiedenen Zeitkonstanten.

In allen Fällen geht die Amplitude gegen Null, die Dämpfung führt also dazu, dass die ursprünglich im Oszillator gespeicherte Energie mit der Zeit verloren geht (z. B. in Wärme über Reibung).

Kapitel 6

Was passiert, wenn man eine Schaukel anschubst?

- **Physikalisches Thema:** Getriebener Oszillator, Resonanz
- **Inhalte:** Getriebener Oszillator, Resonanz, Energiezufuhr
- **Mathematik:** Partikuläre/periodische Lösungen von DGL, Fouriertransformation

6.1 Erzwungene Schwingung

6.1.1 Motivation: Erzwungener harmonischer Oszillator

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir Schwingungen betrachtet, die aus einer Anfangsauslenkung oder Anfangsgeschwindigkeit entstehen. Solche *freien* Schwingungen sind vollständig durch die Eigenschaften des Systems selbst bestimmt. Im idealisierten Fall bleiben sie unbegrenzt erhalten, in realen Systemen klingen sie aufgrund von Dämpfung mit der Zeit ab. In vielen physikalischen Situationen wird ein System jedoch nicht nur einmal angestoßen, sondern kontinuierlich von außen beeinflusst. Beispiele hierfür sind eine Brücke, die durch Wind angeregt wird, ein Fahrzeug, das durch eine unebene Straße zu Schwingungen gezwungen wird, oder ein elektrischer Schwingkreis, der durch eine zeitabhängige Spannung betrieben wird. In all diesen Fällen wirkt eine äußere, zeitabhängige Kraft auf ein schwingungsfähiges System. Eine zentrale Frage lautet daher: *Wie reagiert ein schwingungsfähiges System auf eine äußere Anregung, und welche Rolle spielt dabei die Frequenz der Anregung?*

Wir werden sehen, dass die Antwort entscheidend davon abhängt, ob die äußere Kraft mit einer Frequenz wirkt, die nahe an der Eigenfrequenz des Systems liegt. In diesem Fall kann es zu besonders großen Schwingungsamplituden kommen – ein Phänomen, das als *Resonanz* bezeichnet wird. Resonanz ist einerseits technisch äußerst nützlich, etwa in der Nachrichtentechnik oder in der Spektroskopie, kann aber auch zu unerwünschten oder sogar gefährlichen Effekten führen.

Der erzwungene harmonische Oszillator stellt dabei ein besonders wichtiges Modell dar. Er erlaubt es, die Wirkung einer äußeren periodischen Kraft exakt zu analysieren und bildet zugleich die Grundlage für ein tieferes Verständnis beliebiger zeitabhängiger Anregungen. Denn wie wir später sehen werden, lässt sich jede hinreichend regelmäßige Kraft als Überlagerung von harmonischen Schwingungen auffassen. Diese Idee führt direkt zur Fourier-Analyse, einem der zentralen Werkzeuge der modernen Physik.

6.1.2 Bewegungsgleichung des erzwungenen Oszillators

Wir betrachten erneut ein Masse–Feder–System in einer Dimension. Die Masse m bewege sich entlang der x -Achse und sei über eine ideale Feder mit Federkonstante k an eine feste Wand gekoppelt. Zusätzlich wirke nun eine *äußere, zeitabhängige Kraft* auf die Masse, die wir als Anregung interpretieren. Auf den Massepunkt wirken damit (mindestens) drei Beiträge: die Rückstellkraft der Feder nach Hooke, eine Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit, sowie eine äußere Anregungskraft, die wir zunächst allgemein als $F_{\text{ext}}(t)$ schreiben: die resultierende Kraft lautet

$$F_{\text{ges}}(t) = -k x(t) - b \dot{x}(t) + F_{\text{ext}}(t). \quad (6.1)$$

Mit dem zweiten Newtonschen Axiom $m\ddot{x}(t) = F_{\text{ges}}(t)$ folgt

$$m\ddot{x}(t) = -k x(t) - b \dot{x}(t) + F_{\text{ext}}(t). \quad (6.2)$$

Umgestellt ergibt sich die Differentialgleichung des erzwungenen (und ggf. gedämpften) harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m} F_{\text{ext}}(t), \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.3)$$

Diese Gleichung ist linear und inhomogen: Die linke Seite beschreibt die Eigenschaften des Systems (Masse, Dämpfung, Feder), die rechte Seite die äußere Anregung.

Die Bewegungsgleichung des erzwungenen Oszillators ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ein zentrales Resultat der Theorie linearer Differentialgleichungen ist, dass sich die allgemeine Lösung stets als Summe zweier Anteile schreiben lässt:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t). \quad (6.4)$$

Die **homogene Lösung** $x_{\text{hom}}(t)$ ist die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (6.5)$$

Sie beschreibt die freie Bewegung des Systems ohne äußere Anregung. Dieser Teil hängt ausschließlich von den Anfangsbedingungen ab. Für $\gamma > 0$ klingt die homogene Lösung mit der Zeit ab, wie wir beim gedämpften harmonischen Oszillator bereits gesehen haben.

Die **partikuläre Lösung** $x_{\text{part}}(t)$ ist eine spezielle Lösung der vollständigen inhomogenen Gleichung. Sie wird ausschließlich durch die äußere Kraft $F_{\text{ext}}(t)$ bestimmt und ist unabhängig von den Anfangsbedingungen. Für reale Systeme mit Dämpfung gilt: Der homogene Anteil beschreibt ein *transientes Verhalten*, das nach hinreichend langer Zeit verschwindet. Übrig bleibt dann allein die partikuläre Lösung. Dieser langfristige Zustand wird als *stationäre Bewegung* bezeichnet. Sie ist von zentraler Bedeutung für das Verständnis von Resonanz.

6.1.3 Stationäre Lösung bei periodischer Anregung

Für Resonanzphänomene ist insbesondere der Fall einer periodischen Anregung relevant. Wir betrachten daher nun eine periodische äußere Kraft der Form

$$F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\Omega t), \quad (6.6)$$

wobei F_0 die Amplitude und Ω die Kreisfrequenz der Anregung ist. Da die Differentialgleichung linear ist, erwarten wir, dass auch die stationäre Antwort des Systems periodisch mit derselben Frequenz Ω ist. Zur Berechnung der stationären Lösung ist es zweckmäßig, die äußere Kraft in komplexer Schreibweise darzustellen:

$$F_{\text{ext}}(t) = \text{Re}(F_0 e^{i\Omega t}). \quad (6.7)$$

Wir suchen entsprechend eine partikuläre Lösung der Form

$$x_{\text{part}}(t) = \text{Re}(X e^{i\Omega t}) = |X| \text{Re}(e^{i\phi} e^{i\Omega t}) = |X| \cos(\Omega t + \phi), \quad (6.8)$$

wobei im Allgemeinen $X \in \mathbb{C}$ ist. Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert

$$(-\Omega^2 + i2\gamma\Omega + \omega_0^2) X e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}. \quad (6.9)$$

Nach Kürzen des gemeinsamen Faktors $e^{i\Omega t}$ erhalten wir

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\gamma\Omega} = \frac{F_0}{m} \left[\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} - i \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \right]. \quad (6.10)$$

Die stationäre Lösung kann damit geschrieben werden als

$$x_{\text{part}}(t) = A[\Omega] \cos(\Omega t + \phi[\Omega]), \quad (6.11)$$

wobei die Amplitude $A[\Omega]$ und die Phasenverschiebung $\phi[\Omega]$ durch den Betrag und das Argument der komplexen Zahl X bestimmt sind. Die Amplitude lautet

$$A[\Omega] = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}. \quad (6.12)$$

Sie hängt stark von der Anregungsfrequenz Ω ab und besitzt ein Maximum bei der Resonanzfrequenz. Nach ausreichend langer Zeit verschwindet der transiente Anteil $x_{\text{hom}}(t)$, und die Bewegung des Systems ist vollständig durch die stationäre Lösung bestimmt. Diese beschreibt eine erzwungene Schwingung mit derselben Frequenz wie die äußere Kraft, jedoch mit einer im Allgemeinen verschobenen Phase und einer frequenzabhängigen Amplitude.

Wir wollen jetzt noch den relevanten Grenzfall der sogenannten **Resonanzkatastrophe** betrachten. Unter *Resonanz* versteht man das Auftreten besonders großer Schwingungsamplituden, wenn die Anregungsfrequenz Ω einen bestimmten Wert annimmt. Dieser Effekt beruht darauf, dass das System Energie aus der äußeren Kraft besonders effizient aufnehmen kann, wenn die zeitliche Struktur der Anregung gut zur Eigenbewegung des Systems passt.

Im Grenzfall verschwindender Dämpfung ($\gamma \rightarrow 0$) wird die Amplitude maximal, wenn

$$\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

also wenn die Anregungsfrequenz mit der Eigenfrequenz des Systems übereinstimmt. In diesem idealisierten Fall wächst die Amplitude formal ohne Grenze, was zeigt, dass Dämpfung in realen Systemen eine entscheidende Rolle spielt.

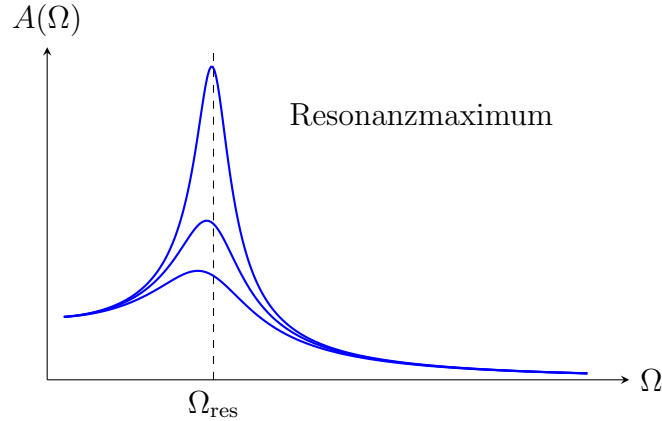


Abbildung 6.1: Qualitative Resonanzkurve eines gedämpften harmonischen Oszillators: Die Amplitude der stationären Schwingung besitzt ein Maximum bei der Resonanzfrequenz Ω_{res} . Dargestellt sind drei Graphen mit variierender Dämpfung γ , wobei die Höhe des Peaks mit abnehmender Dämpfung ansteigt.

Für endliche Dämpfung liegt das Maximum der Amplitude nicht exakt bei ω_0 . Die Resonanzfrequenz Ω_{res} ist leicht verschoben und hängt von der Stärke der Dämpfung ab. Je größer die Dämpfung, desto niedriger ist die Resonanzfrequenz und desto flacher fällt das Maximum der Resonanzkurve aus, siehe Abb. 6.1.

Neben der Amplitude ändert sich auch die Phase der Bewegung relativ zur äußeren Kraft. Der Imaginärteil von X ist immer negativ, demnach ergibt sich für das Argument

$$\phi[\Omega] = \arg[X] = \begin{cases} -\arctan\left[\frac{2\gamma\Omega}{|\omega_0^2 - \Omega^2|}\right] & \Re[X] < 0 \\ +\arctan\left[\frac{2\gamma\Omega}{|\omega_0^2 - \Omega^2|}\right] - \pi & \Re[X] > 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

und damit ist $-\pi \leq \phi \leq 0$. Für kleine Frequenzen Ω folgt die Bewegung der Kraft nahezu ohne Phasenverschiebung, d.h. $\phi[\Omega] \approx 0$ für $\Omega \rightarrow 0$. In der Nähe der Resonanz tritt eine deutliche Phasenverschiebung auf, d.h. $\phi[\Omega = \omega_0] = -\pi/2$. Für hohe Frequenzen läuft die Bewegung der äußeren Kraft nahezu entgegen, d.h. $\phi[\Omega] \approx -\pi$ für $\Omega \rightarrow \infty$. Resonanz ist damit nicht nur ein Effekt großer Amplituden, sondern auch mit einem charakteristischen Phasenverhalten verbunden. Ohne Dämpfung kommt es zu einem Phasensprung an der Resonanz. Resonanzphänomene sind in vielen Bereichen der Physik und Technik von zentraler Bedeutung. Sie werden gezielt genutzt, etwa in der Signalverarbeitung, Spektroskopie oder Messtechnik, können aber auch zu unerwünschten oder gefährlichen Effekten führen, wenn Systeme unkontrolliert angeregt werden.

6.2 Fourier Transformation

6.2.1 Übergang zur Fourier-Idee

Die Resonanzkurve des erzwungenen harmonischen Oszillators zeigt eindrucksvoll, dass ein schwingungsfähiges System nicht auf alle Anregungen gleich reagiert. Vielmehr hängt die

Stärke der Antwort entscheidend von der Frequenz der äußeren Kraft ab. Man kann den harmonischen Oszillator daher als ein System verstehen, das auf bestimmte Frequenzen besonders empfindlich reagiert, während andere Frequenzen nur eine schwache Wirkung haben.

Bisher haben wir eine sehr spezielle Form der äußeren Kraft betrachtet, nämlich eine reine harmonische Anregung der Form $\cos(\Omega t)$. In realen physikalischen Situationen sind äußere Kräfte jedoch meist deutlich komplexer: Sie können unregelmäßig sein, kurze Stöße enthalten oder aus mehreren zeitabhängigen Anteilen bestehen.

Die zentrale Idee besteht nun darin, beliebige zeitabhängige Kräfte als Überlagerung vieler harmonischer Schwingungen zu betrachten. Anders gesagt: Auch eine komplizierte Kraft kann als Summe (oder im Grenzfall als Integral) von Sinus- und Cosinusfunktionen mit unterschiedlichen Frequenzen verstanden werden.

Jede dieser Frequenzkomponenten regt den Oszillator separat an. Die gesamte Bewegung ergibt sich dann als Überlagerung der Antworten auf die einzelnen Frequenzen. Da wir die Reaktion des Systems auf eine harmonische Anregung bereits kennen, lässt sich auf diese Weise auch das Verhalten bei allgemeinen zeitabhängigen Kräften qualitativ verstehen.

Dieses Prinzip bildet die Grundlage der Fourier-Analyse. Die Fourier-Transformation liefert ein mathematisches Verfahren, um eine Funktion der Zeit in ihre Frequenzanteile zu zerlegen. Im Kontext der Schwingungslehre bedeutet dies:

Die Bewegung eines linearen Systems auf eine beliebige äußere Kraft kann aus seiner Antwort auf einzelne harmonische Anregungen zusammengesetzt werden.

Der harmonische Oszillator spielt dabei eine besondere Rolle, da er als elementares *Frequenzfilter* wirkt: Die Resonanzkurve beschreibt, wie stark das System auf jede einzelne Frequenz reagiert. Damit verbindet die Fourier-Idee auf natürliche Weise die zeitliche Beschreibung einer Kraft mit ihrer Frequenzdarstellung.

In weiterführenden Vorlesungen wird diese Idee systematisch ausgearbeitet und mathematisch präzisiert. Für uns genügt an dieser Stelle das qualitative Verständnis, dass Resonanz und Fourier-Analyse zwei Seiten derselben Medaille sind.

6.2.2 Mathematisches Beispiel zur Fourier-Zerlegung

Bevor wir zur Fourier-Transformation übergehen, betrachten wir zunächst den einfacheren Fall periodischer Funktionen. Die zentrale Idee ist: Eine periodische Funktion lässt sich als Überlagerung harmonischer Schwingungen mit diskreten Frequenzen darstellen. Diese Darstellung heißt *Fourier-Reihe*. Als Beispiel betrachten wir eine periodische Rechteck- (Stufen-) Funktion. Wir definieren eine 2π -periodische Funktion $f(t)$ durch

$$f(t) = \begin{cases} +1, & 0 < t < \pi, \\ -1, & -\pi < t < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad f(t + 2\pi) = f(t). \quad (6.14)$$

Dies ist eine ideale Stufenfunktion (Rechtecksignal), die häufig als Modell für periodische Anregungen verwendet wird. Für eine 2π -periodische Funktion lautet der allgemeine Fourier-Ansatz

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]. \quad (6.15)$$

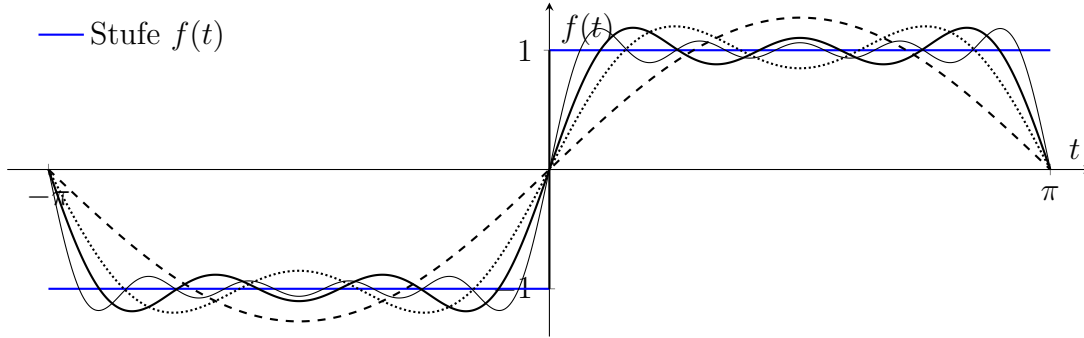


Abbildung 6.2: Fourier-Approximation einer periodischen Stufenfunktion durch Partialsummen der Fourier-Reihe (nur ungerade Harmonische).

Die Koeffizienten ergeben sich aus

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (6.16)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt. \quad (6.17)$$

Die Funktion $f(t)$ ist ungerade, d. h. $f(-t) = -f(t)$. Daher verschwinden alle Kosinus-Terme:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 1). \quad (6.18)$$

Es bleibt also eine reine Sinusreihe. Wir berechnen also

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} (1) \sin(nt) dt \right]. \quad (6.19)$$

Die beiden Integrale sind gleich groß, daher

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n}. \quad (6.20)$$

Für gerade n ist $1 - (-1)^n = 0$, für ungerade n ist $1 - (-1)^n = 2$. Somit:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, & n \text{ ungerade,} \\ 0, & n \text{ gerade.} \end{cases} \quad (6.21)$$

Damit ergibt sich die Fourier-Reihe der Stufenfunktion in der Darstellung

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \dots \right), \quad (6.22)$$

also eine Summe aus harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen $n = 1, 3, 5, \dots$. Obwohl $f(t)$ Sprünge besitzt, nähert sich die Fourier-Reihe der Funktion an allen stetigen Stellen an. An den Sprungstellen konvergiert die Reihe gegen den Mittelwert der beiden Grenzwerte. In der Nähe der Sprünge tritt zudem ein charakteristisches Überschwingen auf (Gibbs-Phänomen). Dies ist kein Fehler, sondern eine allgemeine Eigenschaft der Fourier-Darstellung unstetiger Funktionen.

6.2.3 Übergang zur Fourier-Transformation

Bei periodischen Funktionen treten die Frequenzen diskret auf ($n = 1, 2, 3, \dots$). Die Fourierreihenentwicklung für eine periodische Funktion mit Periode T kann auch mit Hilfe der Exponentialfunktion schreiben als

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt f(t) e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{T}. \quad (6.23)$$

Wenn man die Periode jedoch immer größer werden lässt, liegen die erlaubten Frequenzen immer dichter beieinander. Im Grenzfall einer unendlichen Periode geht die Summe über diskrete Frequenzen in ein Integral über kontinuierliche Frequenzen über. Genau dieser Grenzprozess führt zur *Fourier-Transformation*.

Die Aussage, dass eine beliebige zeitabhängige Kraft in ein Spektrum harmonischer Schwingungen zerlegt werden kann, erscheint zunächst abstrakt. Um diese Idee konkreter zu machen, betrachten wir ein einfaches, explizit berechenbares Beispiel.

Wir wählen eine zeitabhängige Kraft, die für $t \geq 0$ exponentiell abklingt:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (6.24)$$

wobei F_0 die Anfangsstärke und $\alpha > 0$ eine Abklingkonstante ist. Diese Kraft beschreibt beispielsweise einen kurzen Anregungsstoß, der mit der Zeit verschwindet. Die Fourier-Transformierte dieser Kraft ist definiert als

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.25)$$

Da $F(t)$ nur für $t \geq 0$ ungleich Null ist, reduziert sich das Integral zu

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{F_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt. \quad (6.26)$$

Dieses Integral ist elementar auswertbar und ergibt

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{F_0}{2\pi} \frac{1}{\alpha + i\omega}. \quad (6.27)$$

Die Fourier-Transformierte ist für alle Frequenzen ω ungleich Null. Das bedeutet: Die Kraft $F(t)$ enthält Beiträge aus einem kontinuierlichen Spektrum harmonischer Schwingungen. Der Betrag

$$|\tilde{F}(\omega)| = \frac{F_0}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad (6.28)$$

nimmt mit wachsender Frequenz ab. Hohe Frequenzen sind also schwächer vertreten als niedrige. Dieses Beispiel zeigt explizit, dass selbst eine sehr einfache, nicht periodische Kraft als Überlagerung harmonischer Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen aufgefasst werden kann. Genau diese Zerlegung erlaubt es, die Bewegung eines linearen Systems – wie des harmonischen Oszillators – durch die Antwort auf einzelne Frequenzanteile zu bestimmen.

6.2.4 Lösung für eine allgemeine äußere Kraft und Fourier-Zerlegung

Bisher haben wir die Bewegung eines harmonischen Oszillators unter dem Einfluss einer einzelnen harmonischen Anregung betrachtet. In vielen physikalischen Situationen ist die äußere Kraft jedoch nicht sinusförmig, sondern besitzt eine beliebige Zeitabhängigkeit. Wir betrachten daher nun die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t), \quad (6.29)$$

wobei $F(t)$ eine allgemein zeitabhängige äußere Kraft beschreibt. Der entscheidende Punkt ist die Linearität der Bewegungsgleichung. Aufgrund dieser Linearität gilt das Superpositionsprinzip: Die Antwort des Systems auf eine Summe von Kräften ist gleich der Summe der Antworten auf die einzelnen Kraftanteile.

Diese Eigenschaft erlaubt es, eine komplizierte Kraft $F(t)$ in einfachere Bausteine zu zerlegen, deren Wirkung auf den Oszillator wir bereits kennen. Als besonders geeignete Bausteine erweisen sich harmonische Funktionen mit definierter Frequenz, und damit die Entwicklung in **Fourier-Reihen**. Wie wir gesehen haben besagt die Fourier-Idee, dass sich eine hinreichend gutartige Funktion $F(t)$ als Überlagerung harmonischer Schwingungen schreiben lässt. Formal schreibt man

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.30)$$

wobei $\tilde{F}(\omega)$ die Fourier-Transformierte der Kraft ist. Sie gibt an, mit welcher Stärke die Frequenz ω in der Kraft $F(t)$ enthalten ist. Die Umkehrung dieser Beziehung liefert die Fourier-Transformation:

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.31)$$

An dieser Stelle ist vor allem die physikalische Interpretation wichtig: $F(t)$ beschreibt die Kraft im Zeitbereich, wohingegen $\tilde{F}(\omega)$ beschreibt dieselbe Kraft im Frequenzbereich.

Eine besonders praktische Eigenschaft der Fouriertransformation ist die Transformation von Ableitungen, diese ist wie folgt gegeben

$$\left[\frac{d^n}{dt^n} F(t) \right] \xrightarrow{FT} (i\omega)^n \tilde{F}(\omega) \quad (6.32)$$

damit lassen sich lineare Differentialgleichungssysteme sehr einfach lösen. Als Beispiel hierfür können wir die Bewegungsgleichung des getriebenen harmonischen Oszillators in den Frequenzraum transformieren:

$$-\omega^2 X(\omega) + 2\gamma\omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = \frac{1}{m} \tilde{F}(\omega), \quad (6.33)$$

Diese Gleichung können wir einfach umstellen und erhalten

$$X(\omega) = \frac{\frac{1}{m} \tilde{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \equiv \frac{1}{m} \tilde{F}(\omega) \chi(\omega). \quad (6.34)$$

d.h. für jede Frequenzkomponente der treibenden Kraft ergibt sich eine Antwort mit der komplexen Amplitude $X(\omega)$. Der Ausdruck $\chi(\omega)$ wird als *Antwortfunktion* oder *Suszeptibilität* des Systems bezeichnet. Er beschreibt vollständig, wie der Oszillator auf eine Anregung der Frequenz ω reagiert.

Die Bewegung des Oszillators ergibt sich schließlich als Überlagerung aller Frequenzanteile, bzw. der Rücktransformation aus dem Fourierraum via

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.35)$$

Die Fourier-Transformation ermöglicht es, zeitabhängige Probleme auf algebraische Operationen im Frequenzraum zurückzuführen. Resonanz erscheint dabei nicht als Spezialfall, sondern als allgemeine Eigenschaft der Antwortfunktion eines linearen Systems. Der harmonische Oszillator dient somit als Prototyp für eine große Klasse linearer Systeme in Physik und Technik. Zum Abschluß können wir nochmals die periodische Kraft $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ vom Anfang dieses Kapitels betrachten. Die Fouriertransformation dieser Kraft lautet

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt F_0 \cos(\Omega t) e^{-i\omega t} = \frac{F_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt [e^{+i\Omega t} + e^{-i\Omega t}] e^{-i\omega t} \\ &= \frac{F_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt [e^{+i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t}] = \frac{F_0}{2} [\delta(\Omega - \omega) + \delta(\Omega + \omega)] \end{aligned} \quad (6.36)$$

wobei wir hier die sogenannte δ -distribution eingeführt haben. Die Delta-Distribution $\delta(x)$ ist keine Funktion im üblichen Sinne, sondern ein mathematisches Objekt, das nur unter einem Integral sinnvoll definiert ist. Intuitiv kann man sie sich als einen unendlich schmalen und unendlich hohen Peak bei $x = 0$ vorstellen, dessen Fläche gleich eins ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (6.37)$$

Die zentrale Eigenschaft der Delta-Distribution ist ihre sogenannte *Sieb-Eigenschaft*. Für eine hinreichend glatte Funktion $g(x)$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0). \quad (6.38)$$

Das Integral „wählt“ also den Wert der Funktion an der Stelle x_0 aus.

Im Kontext der Fourier-Analyse tritt die Delta-Distribution ganz natürlich auf. Ein idealer harmonischer Term der Form $e^{i\Omega t}$ besitzt genau eine definierte Frequenz. Seine Fourier-Transformierte ist daher nicht über ein Frequenzintervall verteilt, sondern vollständig auf den Punkt $\omega = \Omega$ konzentriert. Mathematisch wird dies durch eine Delta-Distribution ausgedrückt. Die Delta-Distribution erlaubt es somit, den Übergang zwischen Zeit- und Frequenzdarstellung präzise zu formulieren, ohne den physikalischen Gehalt der Aussagen zu verändern. In der folgenden Rechnung nutzen wir das die harmonische Kraft im Frequenzraum durch Delta-Peaks

beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{F_0}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) [\delta(\Omega - \omega) + \delta(\Omega + \omega)] e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{F_0}{2m} [\chi(\Omega) e^{+i\Omega t} + \chi(-\Omega) e^{-i\Omega t}] = \frac{F_0}{2m} [\chi(\Omega) e^{+i\Omega t} + \chi^*(\Omega) e^{-i\Omega t}] \\
 &= \frac{F_0}{2m} |\chi(\Omega)| [e^{+i\Omega t + i\phi(\Omega)} + e^{-i\Omega t - i\phi(\Omega)}] = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi[\Omega]) \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

mit der phase $\phi[\Omega] = \arg(\chi[\Omega])$ definiert in Gl.6.13. Damit erhalten wir exakt dieselbe stationäre Lösung, die wir zuvor direkt für eine harmonische Anregung bestimmt haben. Die Fourier-Transformation liefert also kein neues physikalisches Ergebnis, sondern eine alternative und sehr allgemeine Herangehensweise an dasselbe Problem.

Wichtig ist dabei folgende Beobachtung: Die Lösung, die wir mittels der Fourier-Transformation erhalten, beschreibt ausschließlich den *stationären* Zustand des Systems. Transiente Beiträge, die von den Anfangsbedingungen abhängen und bei vorhandener Dämpfung mit der Zeit abklingen, sind in dieser Darstellung nicht enthalten.

Der Grund hierfür liegt darin, dass die Fourier-Transformation die Bewegung als Überlagerung harmonischer Anregungen betrachtet, die jeweils zeitlich unbegrenzt wirken. Die Fourier-Methode beschreibt somit direkt die langfristige Antwort des Systems auf eine gegebene äußere Kraft und ist insbesondere für die Analyse von Resonanz- und Frequenzeffekten geeignet.

6.3 Kraftstoß und Greensche Funktion

6.3.1 Delta-Funktion als idealisierter Kraftstoß

In vielen physikalischen Situationen wirkt eine Kraft nicht über einen langen Zeitraum, sondern sehr kurz und intensiv. Beispiele sind der Stoß eines Hammers, der Aufprall eines Balls oder ein kurzer elektrischer Impuls. In solchen Fällen ist weniger die genaue zeitliche Form der Kraft entscheidend, sondern vor allem die übertragene Impulsänderung.

Ein solches idealisiertes Kraft-Zeit-Profil bezeichnet man als *Kraftstoß*. Mathematisch lässt sich ein Kraftstoß besonders einfach durch eine Delta-Distribution beschreiben.

Wir modellieren einen Kraftstoß zur Zeit t_0 durch

$$F(t) = J \delta(t - t_0), \quad (6.40)$$

wobei J die Stärke des Kraftstoßes ist. Die Delta-Distribution beschreibt einen unendlich kurzen, aber endlich starken Impuls.

Die physikalische Bedeutung ergibt sich unmittelbar aus dem zweiten Newtonschen Axiom. Integration der Bewegungsgleichung über einen kurzen Zeitraum um t_0 liefert

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} F(t) dt = m \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \ddot{x}(t) dt = m [v(t_0^+) - v(t_0^-)] \equiv m \Delta v, \quad t_0^\pm = t_0 \pm \varepsilon. \quad (6.41)$$

Mit der Normierung der Delta-Distribution folgt

$$J = m \Delta v = \Delta p. \quad (6.42)$$

Ein Kraftstoß bewirkt also eine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeit bzw. des Impulses p , während die Position kontinuierlich bleibt.

6.3.2 Greensche Funktion: Grundidee

Die zentrale Idee der Greenschen Funktion besteht darin, zunächst die Antwort des Systems auf einen elementaren Kraftstoß zu bestimmen. Diese Antwort nennt man die *Greensche Funktion* $G(t, t_0)$ und definiert sie als Lösung der Gleichung

$$\mathcal{D}_t G(t, t_0) = \delta(t - t_0), \quad (6.43)$$

mit der Bedingung, dass $G(t, t_0) = 0$ für $t < t_0$ gilt. Das System reagiert also erst nach dem Stoß. \mathcal{D}_t ist ein beliebiger linearer Differentialoperator. Die Greensche Funktion beschreibt die Bewegung des Systems, die durch einen Kraftstoß zur Zeit t_0 ausgelöst wird. Sie ist damit die grundlegende Antwortfunktion des Systems.

Kennt man die Greensche Funktion, so lässt sich die Lösung für eine beliebige äußere Kraft konstruieren. Jede zeitabhängige Kraft kann als Überlagerung infinitesimaler Kraftstöße aufgefasst werden. Aufgrund der Linearität der Bewegungsgleichung ergibt sich die Bewegung als Überlagerung der entsprechenden Antworten. Ist die Greensche Funktion bekannt, so ergibt sich die Lösung der Bewegungsgleichung für eine beliebige äußere Kraft $F(t)$ als Faltungsinintegral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t G(t, t') F(t') dt'. \quad (6.44)$$

Dieses Integral beschreibt anschaulich, dass jeder frühere Kraftstoß zur Zeit t' einen Beitrag zur Bewegung zum Zeitpunkt t liefert. Die Greensche Funktion gibt dabei an, wie stark dieser Beitrag ist. Physikalisch ist immer nur die Vergangenheit relevant. Wir verwenden daher die sogenannte **retardierte Greensche Funktion**, die für Zeiten vor dem Kraftstoß verschwindet. Deshalb kann das Integral entweder bis t laufen oder formal bis unendlich — beides ist äquivalent.

Der Kraftstoß und die Greensche Funktion bilden eine direkte Verbindung zur Fourier-Analyse. Während die Fourier-Methode die Antwort auf harmonische Anregungen betrachtet, beschreibt die Greensche Funktion die Antwort auf einen Impuls. Beide Ansätze beruhen auf der Linearität der Bewegungsgleichung und führen zum selben physikalischen Verständnis der Systemantwort.

6.3.3 Greensche Funktion des gedämpften Oszillators: Unterdämpfung

Wir betrachten die (retardierte) Greensche Funktion $G(t, t_0)$ des gedämpften harmonischen Oszillators. Sie ist definiert als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\ddot{G}(t, t_0) + 2\gamma \dot{G}(t, t_0) + \omega_0^2 G(t, t_0) = \Delta p \delta(t - t_0), \quad (6.45)$$

wobei $\gamma > 0$ die Dämpfungskonstante und ω_0 die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ist. Physikalisch beschreibt $G(t, t_0)$ die Auslenkung, die durch einen idealisierten Kraftstoß zur Zeit t_0 ausgelöst wird. Wichtig ist, daß das System erst *nach* dem Stoß reagieren kann, aufgrund dieser Kausalitätsbedingung fordern wir

$$G(t, t_0) = 0 \quad \text{für } t < t_0. \quad (6.46)$$

Damit wird sichergestellt, dass die Bewegung zum Zeitpunkt t ausschließlich von Kräften abhängt, die zu Zeiten $t' \leq t$ gewirkt haben. Insbesondere kann ein Kraftstoß zur Zeit t_0 die Bewegung nicht zu früheren Zeiten beeinflussen.

Zunächst bestimmen wir die homogene Gleichung für $t > t_0$. In diesem Fall verschwindet die rechte Seite von (6.45) und es gilt die homogene Gleichung

$$\ddot{G}(t, t_0) + 2\gamma \dot{G}(t, t_0) + \omega_0^2 G(t, t_0) = 0. \quad (6.47)$$

Im unterdämpften Fall $\gamma < \omega_0$ definieren wir die gedämpfte Frequenz

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (6.48)$$

Eine allgemeine reelle Lösung von (6.47) für $t > t_0$ ist dann

$$G(t, t_0) = e^{-\gamma(t-t_0)} \left[A \cos(\omega(t-t_0)) + B \sin(\omega(t-t_0)) \right], \quad (t > t_0), \quad (6.49)$$

wobei A und B Konstanten sind, die durch die Bedingungen am Zeitpunkt t_0 festgelegt werden. Wir fordern Stetigkeit von G bei $t = t_0$, d.h. die Delta-Quelle erzeugt einen Sprung in der Ableitung von G , nicht aber in G selbst. Insbesondere folgt aus (6.46), dass $G(t_0^-, t_0) = 0$. Damit setzen wir

$$G(t_0^+, t_0) = 0. \quad (6.50)$$

Mit (6.49) (bei $t = t_0$ ist $t - t_0 = 0$) ergibt das

$$G(t_0^+, t_0) = A = 0. \quad (6.51)$$

Somit vereinfacht sich (6.49) zu

$$G(t, t_0) = B e^{-\gamma(t-t_0)} \sin(\omega(t-t_0)), \quad (t > t_0). \quad (6.52)$$

Um B zu bestimmen, integrieren wir (6.45) über ein kleines Intervall um t_0 :

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \left(\ddot{G} + 2\gamma \dot{G} + \omega_0^2 G \right) dt = \Delta p \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0) dt = \Delta p. \quad (6.53)$$

Im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ tragen die Terme mit \dot{G} und G nicht zum Integral bei. Der Grund ist, dass sowohl $G(t, t_0)$ als auch $\dot{G}(t, t_0)$ in der Umgebung von t_0 endlich bleiben. Ihre Integrale über ein Intervall der Breite 2ε sind daher proportional zu ε und verschwinden im Grenzfall. Dagegen liefert der Term mit der zweiten Ableitung einen endlichen Beitrag:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \ddot{G}(t, t_0) dt = \dot{G}(t_0^+, t_0) - \dot{G}(t_0^-, t_0) = \Delta p. \quad (6.54)$$

Die Delta-Quelle erzeugt somit einen Sprung in der ersten Ableitung der Greenschen Funktion, während $G(t, t_0)$ selbst stetig bleibt. Dies entspricht physikalisch der Tatsache, dass ein Kraftstoß die Geschwindigkeit sprunghaft, nicht aber die Position ändert. Wegen der Kausalität (6.46) gilt $G(t, t_0) = 0$ für $t < t_0$ und damit auch $\dot{G}(t_0^-, t_0) = 0$. Also

$$\dot{G}(t_0^+, t_0) = \Delta p. \quad (6.55)$$

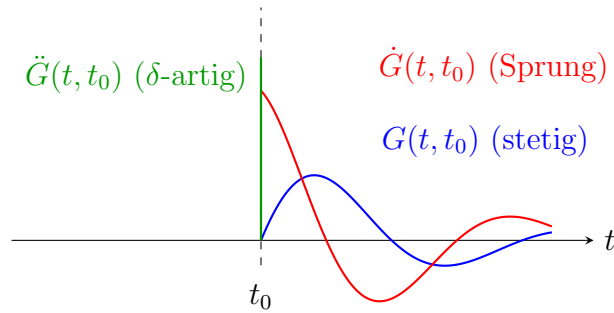


Abbildung 6.3: Qualitativer Zeitverlauf der Greenschen Funktion und ihrer Ableitungen bei einem Kraftstoß zur Zeit t_0 . Die Auslenkung G ist stetig, die Geschwindigkeit \dot{G} besitzt einen Sprung, und die Beschleunigung \ddot{G} enthält einen delta-artigen Beitrag.

Leiten wir (6.52) ab und setzen $t \rightarrow t_0^+$ (d. h. $t - t_0 \rightarrow 0^+$), so folgt

$$\dot{G}(t, t_0) = B e^{-\gamma(t-t_0)} \left[\omega \cos(\omega(t-t_0)) - \gamma \sin(\omega(t-t_0)) \right], \quad (6.56)$$

$$\Rightarrow \dot{G}(t_0^+, t_0) = B \omega \Rightarrow B = \frac{\Delta p}{\omega}. \quad (6.57)$$

Damit lautet die retardierte Greensche Funktion im unterdämpften Fall $\gamma < \omega_0$:

$$G(t, t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{\Delta p}{\omega} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin(\omega(t-t_0)), & t \geq t_0, \end{cases} \quad (6.58)$$

wobei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Die Greensche Funktion beschreibt eine gedämpfte Schwingung, die zum Zeitpunkt t_0 startet und deren Amplitude exponentiell mit der Zeitkonstante $1/\gamma$ abklingt. Sie ist die elementare Antwort des Systems auf einen idealisierten Kraftstoß. Kennt man $G(t, t_0)$, so kann die Bewegung für eine beliebige äußere Kraft $F(t)$ (im stationären, kausalen Sinn) als Überlagerung solcher Impulsantworten konstruiert werden.

Die Wirkung eines Kraftstoßes lässt sich unmittelbar mit der Impulserhaltung verknüpfen. Wie wir am Anfang dieses Unterkapitels gesehen haben, gilt nach dem zweiten Newtonschen Axiom für einen idealisierten Kraftstoß der Form $F(t) = J \delta(t - t_0)$

$$J = \Delta p. \quad (6.59)$$

Ein Kraftstoß bewirkt also eine endliche Änderung des Impulses, während die Position des Körpers stetig bleibt. Genau dieses Verhalten spiegelt sich in der Greenschen Funktion wider: Die Delta-Quelle führt zu einem Sprung in der ersten Ableitung von $G(t, t_0)$ (der Geschwindigkeit), nicht aber in $G(t, t_0)$ selbst.

Die Greensche Funktion beschreibt damit die Impulsantwort des Systems auf einen elementaren Kraftstoß. Ihre Kenntnis erlaubt es, die Bewegung für beliebige zeitabhängige Kräfte als Überlagerung solcher Impulsantworten zu konstruieren.

Kapitel 7

Wie entsteht Drehimpuls – und warum bleibt er manchmal erhalten?

- **Physikalisches Thema:** Impuls, Drehimpuls, Drehmoment, Erhaltungssätze
- **Inhalte:** Impuls, Drehimpuls, Drehmoment, Erhaltungssatz
- **Mathematik:** Kreuzprodukt, Integrale

7.1 Impuls und Impulserhaltung

In den bisherigen Kapiteln haben wir gelernt, wie sich die Bewegung eines Körpers aus den wirkenden Kräften mithilfe der Newtonschen Axiome bestimmen lässt. Dieser Ansatz ist sehr allgemein, führt jedoch in vielen Situationen zu vergleichsweise komplizierten Bewegungsgleichungen. In der Physik spielen daher Größen eine besondere Rolle, die unter geeigneten Bedingungen zeitlich konstant bleiben. Solche Größen nennt man *Erhaltungsgrößen*. Sie erlauben es, Bewegungen und Wechselwirkungen zu analysieren, ohne die vollständige zeitliche Entwicklung des Systems im Detail zu kennen.

In diesem Abschnitt führen wir zwei zentrale Erhaltungsgrößen der klassischen Mechanik ein: den *Impuls* und den *Drehimpuls*. Beide Größen sind eng mit den Newtonschen Axiomen verknüpft und stehen in direktem Zusammenhang mit fundamentalen Symmetrien des Raumes. Aus ihnen folgen wichtige Erhaltungssätze, die in vielen physikalischen Anwendungen von zentraler Bedeutung sind.

7.1.1 Impuls

Bereits bei der Diskussion des Kraftstoßes haben wir gesehen, dass eine kurz wirkende Kraft eine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeit bewirkt. Dabei erwies sich nicht die Geschwindigkeit selbst, sondern die Größe $m\vec{v}$ als besonders natürlich. Diese Beobachtung motiviert die Einführung des Impulses. Der *Impuls* eines Massepunktes mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ ist definiert als

$$\vec{p}(t) := m\vec{v}(t). \quad (7.1)$$

Der Impuls ist eine vektorielle Größe und besitzt dieselbe Richtung wie die Geschwindigkeit. Physikalisch beschreibt er den Bewegungszustand eines Körpers unter Berücksichtigung seiner Trägheit.

Der Zusammenhang des Impulses mit dem zweiten Newtonschen Axiom kann man direkt herleiten. Das zweite Newtonsche Axiom lautet

$$\vec{F}(t) = m \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}. \quad (7.2)$$

Damit ist die zeitliche Änderung des Impulses direkt durch die auf den Körper wirkende Kraft gegeben. Diese Formulierung ist besonders geeignet für die Diskussion von Erhaltungssätzen. Beim Kraftstoß haben wir die Impulsänderung durch Integration der Kraft über ein kleines Zeitintervall berechnet. D.h. Integration über ein Zeitintervall $[t_1, t_2]$ ergibt

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1). \quad (7.3)$$

Die zeitliche Integration der Kraft wird also als *Kraftstoß* bezeichnet. Ein Kraftstoß führt somit zu einer endlichen Änderung des Impulses. Dieser Zusammenhang erklärt, warum bei kurzzeitig wirkenden Kräften der Impuls eine natürlichere Größe ist als die Geschwindigkeit.

7.1.2 Impulserhaltung

Wir betrachten zunächst einen einzelnen Massepunkt. Wirke auf ihn keine äußere Kraft, so gilt nach dem zweiten Newtonschen Axiom

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}. \quad (7.4)$$

Der Impuls eines kräftefreien Massepunktes ist somit zeitlich konstant $\vec{p}(t) = \text{const.}$. Dies ist der einfachste Fall der Impulserhaltung. Nun betrachten wir ein System aus N Massepunkten mit Impulsen $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. Der Gesamtimpuls des Systems ist definiert als

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (7.5)$$

Die zeitliche Ableitung ergibt

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right), \quad (7.6)$$

wobei \vec{F}_i^{ext} äußere Kräfte und \vec{F}_{ij} innere Kräfte zwischen den Teilchen bezeichnen. Man unterscheidet innere und äußere Kräfte. Unter “inneren” Kräften versteht man die von den Teilchen des Massenpunktsystems aufeinander ausgeübten Kräfte. “Äußere” Kräfte haben ihren Ursprung außerhalb des Systems, z. B. die Schwerkraft. Wir bezeichnen das Massenpunktsystem als abgeschlossen, wenn keine äußeren Kräfte vorliegen [1].

Nach dem dritten Newtonschen Axiom treten innere Kräfte paarweise mit gleichem Betrag und entgegengesetzter Richtung auf:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (7.7)$$

Die Summe aller inneren Kräfte verschwindet also. Nehmen wir nun ein abgeschlossenes System an, d.h. es wirken auf das Gesamtsystem keine äußeren Kräfte, folgt unmittelbar die Impulserhaltung

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{const}. \quad (7.8)$$

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems ist somit erhalten. Dieser Impulserhaltungssatz ist unabhängig von den Details der inneren Wechselwirkungen und gilt für eine große Klasse physikalischer Systeme.

7.1.3 Beispiel: Stoß zweier Körper in einer Dimension

Wir betrachten einen geradlinigen Stoß zweier Körper mit Massen m_1 und m_2 . Vor dem Stoß bewegen sie sich mit Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 entlang der x -Achse. Nach dem Stoß seien die Geschwindigkeiten v'_1 und v'_2 . Wir nehmen an, dass während der kurzen Stoßzeit äußere Kräfte vernachlässigbar sind (*abgeschlossenes System*). Dann ist der Gesamtimpuls erhalten:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2. \quad (7.9)$$

Wir wollen nun den idealisierten elastischen Stoß betrachten, d.h. es wird keine Energie in sogenannte innere Energie umgewandelt (z.B. Wärme oder Deformation). Bei so einem elastischen Stoß ist zusätzlich zur Impulserhaltung auch die kinetische Energie erhalten:

$$\frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2). \quad (7.10)$$

In einer Dimension kann man damit v'_1 und v'_2 eindeutig bestimmen. Wir starten von (7.10)

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) &= m_2(v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \\ (v_1 + v'_1) &= (v'_2 + v_2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

im zweiten Schritt haben wir (7.9) eingesetzt. Damit zeigt sich eine besonders anschauliche Konsequenz dieser beiden Erhaltungssätze ist: *Im Schwerpunktsystem kehren sich die Geschwindigkeiten beim elastischen Stoß um.* Im Laborsystem entspricht dies der bekannten Beziehung $v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)$. Nach wenigen weiteren Schritten ergeben sich die Endgeschwindigkeiten: für den elastischen Stoß in einer Dimension

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \quad (7.12)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \quad (7.13)$$

Für $m_1 = m_2$ folgt $v'_1 = v_2$ und $v'_2 = v_1$: die Geschwindigkeiten werden vertauscht.

7.2 Drehimpuls und Drehimpulserhaltung

Der Impuls ist die zentrale Erhaltungsgröße für geradlinige Bewegungen. Er beschreibt, wie sich der Bewegungszustand eines Körpers ändert, wenn äußere Kräfte wirken, und spielt insbesondere bei Stoßprozessen eine wichtige Rolle. In vielen physikalischen Situationen ist jedoch nicht nur die Translation, sondern auch die *Rotation* eines Körpers oder eines Systems von Körpern von Bedeutung. Typische Beispiele sind die Bewegung eines Teilchens auf einer Kreisbahn, die Rotation eines starren Körpers oder ein Stoß, bei dem die Kraft nicht durch einen bestimmten Punkt verläuft. In solchen Fällen ist entscheidend, *wo* der Impuls angreift. Eine Kraft, die zwar klein ist, aber in großem Abstand von einem Punkt wirkt, kann eine starke Drehwirkung entfalten.

Um diese rotatorischen Effekte systematisch zu beschreiben, genügt der Impuls allein nicht. Stattdessen benötigen wir eine Größe, die sowohl den Impuls eines Körpers als auch seine räumliche Lage relativ zu einem *Bezugspunkt* berücksichtigt. Im Gegensatz zum Impuls ist der Drehimpuls *keine absolute Eigenschaft* eines Teilchens. Er ist stets definiert *bezüglich eines gewählten Bezugspunktes*. Physikalisch beantwortet der Drehimpuls die Frage, wie stark sich eine Bewegung *um einen bestimmten Punkt* dreht.

Ein und derselbe Bewegungszustand kann daher bezüglich verschiedener Bezugspunkte unterschiedliche Drehimpulse besitzen. Ein geradlinig bewegtes Teilchen kann bezüglich eines Punktes Drehimpuls haben, bezüglich eines anderen jedoch nicht. Diese Bezugspunktabhängigkeit ist keine Schwäche der Definition, sondern eine wesentliche physikalische Eigenschaft.

Wir wählen im Folgenden einen *festen Bezugspunkt* O im Raum. Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ bezeichnet die *zeitabhängige Position des Teilchens relativ zu diesem festen Punkt*. Die Zeitabhängigkeit von $\vec{r}(t)$ entsteht ausschließlich durch die Bewegung des Teilchens, nicht durch eine Bewegung des Bezugspunktes. Der Drehimpuls eines Massepunktes mit Impuls $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$ *bezüglich des Bezugspunktes* O ist definiert als

$$\vec{L}(t) := \vec{r}(t) \times \vec{p}(t). \quad (7.14)$$

Die Reihenfolge der Vektoren im Kreuzprodukt ist festgelegt (Rechte-Hand-Regel). Der Drehimpuls ist eine vektorielle Größe und steht senkrecht auf der von \vec{r} und \vec{p} aufgespannten Ebene. Der Betrag des Drehimpulses ergibt sich zu

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \varphi, \quad (7.15)$$

wobei φ der Winkel zwischen Ortsvektor und Impuls ist. Der Drehimpuls ist also umso größer, je größer der Impuls des Körpers ist, je größer der Abstand zum Bezugspunkt ist, und je stärker die Bewegung senkrecht zur Verbindungslinie zum Bezugspunkt erfolgt. Bewegungen, die direkt auf den Bezugspunkt zu oder von ihm weg verlaufen, tragen keinen Drehimpuls.

Ein besonders anschaulicher Spezialfall ist die Bewegung eines Massepunktes auf einer Kreisbahn mit Radius r um den Bezugspunkt O . In diesem Fall steht der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}(t)$. Der Winkel zwischen \vec{r} und dem Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ beträgt daher $\varphi = 90^\circ$. Der Betrag des Drehimpulses vereinfacht sich damit zu

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| = mrv. \quad (7.16)$$

Da für eine Kreisbewegung $v = r\omega$ gilt, folgt

$$|\vec{L}| = mr^2\omega. \quad (7.17)$$

Der Drehimpuls ist in diesem Fall konstant und zeigt senkrecht zur Bahnebene. Seine Richtung wird durch die Rechte-Hand-Regel festgelegt. Dieser einfache Spezialfall zeigt, dass der Drehimpuls bei einer Kreisbewegung direkt mit der Winkelgeschwindigkeit verknüpft ist und liefert bereits einen ersten Hinweis auf die spätere Beziehung $L = I\omega$ für Rotationen um eine feste Achse.

Die Bezugspunktabhängigkeit des Drehimpulses lässt sich explizit nachvollziehen. Wird der Ursprung des Koordinatensystems um einen konstanten Vektor \vec{a} verschoben, so gilt für den neuen Ortsvektor $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{a}$ und damit

$$\vec{L}'(t) = (\vec{r}(t) + \vec{a}) \times \vec{p}(t) = \vec{L}(t) + \vec{a} \times \vec{p}(t). \quad (7.18)$$

Der Drehimpuls ändert sich also im Allgemeinen bei einer Verschiebung des Bezugspunktes. Dies zeigt nochmals deutlich, dass der Drehimpuls die rotatorische Bewegung eines Körpers *bezüglich eines bestimmten Punktes* beschreibt. Der Drehimpuls spielt für Rotationen dieselbe fundamentale Rolle wie der Impuls für Translationsbewegungen. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass seine zeitliche Änderung durch das Drehmoment bestimmt wird und unter geeigneten Bedingungen ein Erhaltungssatz gilt.

7.2.1 Drehmoment und Trägheitsmoment

In der Translationsbewegung beschreibt die Kraft, wie sich der Impuls eines Körpers zeitlich ändert. Für Rotationsbewegungen benötigen wir die entsprechenden Begriffe, die an die Stelle von Kraft und Masse treten. Diese sind das *Drehmoment* und das *Trägheitsmoment*. Wir betrachten eine Kraft $\vec{F}(t)$, die an einem Punkt mit Ortsvektor $\vec{r}(t)$ (bezüglich eines festen Bezugspunktes) angreift. Das *Drehmoment* dieser Kraft bezüglich des Bezugspunktes ist definiert als

$$\vec{\tau}(t) := \vec{r}(t) \times \vec{F}(t). \quad (7.19)$$

Wichtig ist der Kraftvektor ist ein sogenannter freier Vektor: seine Wirkung wird durch Betrag und Richtung beschrieben. Der Angriffspunkt geht separat über den Ortsvektor \vec{r} in das Drehmoment ein. Das Drehmoment ist eine vektorielle Größe und seine Richtung steht senkrecht auf der Ebene, die durch den Bezugspunkt und die Wirkungslinie der Kraft aufgespannt wird. Mathematisch entspricht dies der Ebene, die von den Vektoren \vec{r} und \vec{F} aufgespannt wird, wenn man sie parallel verschiebt und an einem gemeinsamen Punkt ansetzt. Das Drehmoment misst die *Drehwirkung* einer Kraft. Eine Kraft, die durch den Bezugspunkt hindurch wirkt oder parallel zum Ortsvektor ist, erzeugt kein Drehmoment. Entscheidend ist daher nicht nur die Stärke der Kraft, sondern auch der Hebelarm.

Wir können kurz das Beispiel des Hebelarm einer Kraft genauer betrachten. Wir starten von einem festen Bezugspunkt O und eine Kraft \vec{F} , die an einem Punkt P angreift. Der Ortsvektor dieses Angriffspunktes relativ zum Bezugspunkt sei \vec{r} . Für den Betrag des Drehmoments gilt

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{F} ist. Der Ausdruck $r \sin \varphi$ entspricht genau dem Hebelarm l der Kraft, also dem senkrechten Abstand zwischen dem Bezugspunkt O und der Wirkungslinie der Kraft:

$$l := r \sin \varphi. \quad (7.20)$$

Damit lässt sich der Betrag des Drehmoments schreiben als $|\vec{\tau}| = F l$. Der Hebelarm ist somit nicht der Abstand des Angriffspunktes vom Bezugspunkt, sondern der kürzeste Abstand des Bezugspunktes von der Wirkungslinie der Kraft. Eine Kraft, die zwar weit vom Bezugspunkt entfernt angreift, deren Wirkungslinie jedoch durch den Bezugspunkt verläuft, und damit \vec{r} parallel zu \vec{F} ist, besitzt keinen Hebelarm und erzeugt daher kein Drehmoment.

Diese geometrische Aussage lässt sich auch direkt in der Sprache der Vektorrechnung formulieren. Zerlegt man den Ortsvektor \vec{r} in einen zur Krafrichtung parallelen und einen senkrechten Anteil, so trägt nur der senkrechte Anteil \vec{r}_\perp zur Drehwirkung der Kraft bei

$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{r}_\perp \times \vec{F},$$

der Betrag des Hebelarms ergibt sich zu $l = |\vec{r}_\perp| = r \sin \varphi$, wobei φ der Winkel zwischen Ortsvektor und Kraft ist.

Der Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls kann man leicht herstellen. Der Drehimpuls eines Massepunktes bezüglich desselben Bezugspunktes ist gegeben durch $\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$. Leiten wir diesen Ausdruck nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}. \quad (7.21)$$

Da $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ gilt, verschwindet der erste Term. Mit dem zweiten Newtonschen Axiom $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ folgt schließlich

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}. \quad (7.22)$$

Das Drehmoment ist also gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses. Diese Beziehung ist die direkte rotatorische Entsprechung von $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Bisher haben wir gesehen, dass das Drehmoment die zeitliche Änderung des Drehimpulses bestimmt. Um diese Beziehung weiter zu konkretisieren, müssen wir nun verstehen, wie groß der Drehimpuls eines Körpers für eine gegebene Rotationsbewegung ist. Dabei zeigt sich ein grundlegender Unterschied zur Translationsbewegung: Während der Impuls eines Körpers allein durch seine Masse und Geschwindigkeit festgelegt ist, hängt der Drehimpuls nicht nur von der Gesamtmasse ab, sondern entscheidend davon, *wie diese Masse im Raum verteilt ist*. Ein Körper mit gleicher Masse kann sich je nach Massenverteilung sehr unterschiedlich leicht oder schwer in Rotation versetzen. Diese Beobachtung führt auf eine neue Größe, das *Trägheitsmoment*. Es beschreibt die rotatorische Trägheit eines Körpers und übernimmt für Rotationsbewegungen eine ähnliche Rolle wie die Masse für Translationsbewegungen. Im Folgenden bestimmen wir das Trägheitsmoment zunächst für eine einfache Kreisbewegung und verallgemeinern den Begriff anschließend auf ausgedehnte Körper.

An dieser Stelle werden wir die Vektornotation zugunsten von skalaren Größen verlassen. Wir beschränken uns hier auf Rotationen um eine feste Achse, die zugleich eine Symmetrieachse des Körpers ist. In diesem Fall sind Drehimpuls, Winkelgeschwindigkeit und Drehmoment

parallel zur Rotationsachse, sodass nur noch ihre Beträge als dynamische Größen betrachtet werden müssen. Ihre Richtungen sind daher fest vorgegeben, sodass nur noch ihre Beträge als dynamische Größen relevant sind. In allgemeineren Situationen sind Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit im Allgemeinen nicht parallel, und ihr Zusammenhang wird durch einen Tensor beschrieben.

Wir betrachten zunächst einen Massepunkt der Masse m , der sich auf einer Kreisbahn mit Radius r um eine feste Achse bewegt. Für den Betrag des Drehimpulses gilt

$$L = mr^2\omega,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Die Größe

$$I := mr^2 \tag{7.23}$$

bezeichnet man als *Trägheitsmoment* des Massepunktes bezüglich der Rotationsachse. Damit lässt sich der Drehimpuls schreiben als $L = I\omega$. Das Trägheitsmoment beschreibt, wie stark sich ein Körper einer Änderung seines Rotationszustands widersetzt. Entscheidend ist dabei nicht nur die Gesamtmasse, sondern auch ihre Verteilung relativ zur Rotationsachse.

Wir können das Konzept des Trägheitsmoment auf ausgedehnte Körper verallgemeinern. Ein realer Körper besteht aus vielen Massenelementen, die unterschiedliche Abstände r_i von der Rotationsachse besitzen. Das Trägheitsmoment des gesamten Körpers ergibt sich als Summe der Beiträge aller Massenelemente:

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{7.24}$$

Je weiter ein Massenelement von der Rotationsachse entfernt ist, desto größer ist sein Beitrag zum Trägheitsmoment.

Wir betrachten nun eine Rotation um eine feste Achse und nehmen an, dass das Trägheitsmoment I zeitlich konstant ist. Leiten wir die Beziehung $L = I\omega$ nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$\frac{dL}{dt} = I\dot{\omega}. \tag{7.25}$$

Mit dem allgemeinen Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls, (7.22), folgt die Rotationsgleichung der Bewegung

$$\tau = I\alpha, \tag{7.26}$$

wobei $\alpha = \dot{\omega}$ die Winkelbeschleunigung bezeichnet. Diese Gleichung beschreibt, wie stark sich die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers unter der Wirkung eines Drehmoments ändert. Sie gilt für Rotationen um eine feste Achse, solange sich das Trägheitsmoment nicht ändert, also insbesondere für starre Körper oder Punktmassen mit festem Abstand zur Rotationsachse.

Die Gleichung $\tau = I\alpha$ ist die direkte rotatorische Entsprechung von

$$F = ma$$

in der Translationsbewegung. Dabei übernimmt das Trägheitsmoment I die Rolle der Masse m : Es bestimmt, wie stark sich ein Körper einer Änderung seines Rotationszustands widersetzt. Ein großes Trägheitsmoment bedeutet, dass für die gleiche Winkelbeschleunigung ein größeres Drehmoment erforderlich ist. Ändert sich das Trägheitsmoment mit der Zeit, so ist im Allgemeinen $\tau \neq I\alpha$, und die zeitliche Änderung des Drehimpulses muss direkt über $\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ betrachtet werden.

7.2.2 Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls eines Körpers oder eines Systems von Körpern ist im Allgemeinen vom gewählten Bezugspunkt abhängig. Ein Erhaltungssatz kann daher nur dann sinnvoll formuliert werden, wenn auch der Bezugspunkt eindeutig festgelegt ist. Wir betrachten zunächst einen einzelnen Massepunkt und wählen einen festen Bezugspunkt O . Wirkt auf den Massepunkt bezüglich dieses Punktes kein äußeres Drehmoment,

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}, \quad (7.27)$$

so folgt aus dem allgemeinen Zusammenhang

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

unmittelbar

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.} \quad (7.28)$$

Der Drehimpuls ist also zeitlich konstant, *bezogen auf den gewählten Bezugspunkt*. Dies ist der einfachste Fall der Drehimpulserhaltung. Für ein System aus N Massepunkten definieren wir den Gesamtdrehimpuls bezüglich eines festen Bezugspunktes O als

$$\vec{L}_{\text{ges}} := \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (7.29)$$

Die zeitliche Ableitung ergibt

$$\frac{d\vec{L}_{\text{ges}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}, \quad (7.30)$$

wobei \vec{F}_i^{ext} die äußeren Kräfte und \vec{F}_{ij} die inneren Kräfte zwischen den Teilchen bezeichnen. Die Beiträge der inneren Kräfte heben sich nicht allein aufgrund des dritten Newtonschen Axioms auf. Sie verschwinden nur dann paarweise, wenn die inneren Kräfte entlang der Verbindungslinie der Teilchen wirken, also Zentralkräfte sind. In diesem Fall erzeugen die inneren Kräfte kein Drehmoment und der Gesamtdrehimpuls ändert sich daher ausschließlich durch äußere Drehmomente:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{ges}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ges}}^{\text{ext}}. \quad (7.31)$$

Ist das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte bezüglich des gewählten Bezugspunktes gleich Null, folgt der Drehimpulserhaltungssatz

$$\vec{\tau}_{\text{ges}}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{\text{ges}} = \text{const.} \quad (7.32)$$

Der Gesamtdrehimpuls eines Systems ist also genau dann erhalten, wenn bezüglich des gewählten Bezugspunktes kein äußeres Drehmoment wirkt.

Die Drehimpulserhaltung gilt nicht unabhängig vom Bezugspunkt. Wählt man einen anderen Bezugspunkt, so ändert sich im Allgemeinen auch das äußere Drehmoment. Ein sinnvoller Bezugspunkt für die Anwendung des Drehimpulserhaltungssatzes ist daher typischerweise

- ein Punkt, in dem alle äußeren Kräfte angreifen, oder
- ein Punkt, in dem sich der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems befindet,
- oder ein fester Punkt, um den das System gelagert ist.

Die Bezugspunktabhängigkeit des Drehimpulses ist somit kein Widerspruch zur Drehimpulserhaltung, sondern legt fest, *bezüglich welcher Punkte* der Erhaltungssatz angewendet werden darf. Als Fazit können wir sagen: *Impulserhaltung ist dynamisch, Drehimpulserhaltung ist dynamisch und geometrisch.*

7.2.3 Übersicht: Translation und Rotation

Die bisherigen Abschnitte haben gezeigt, dass viele Konzepte der Rotationsbewegung direkte Entsprechungen in der Translationsbewegung besitzen. Diese Analogie ist kein Zufall, sondern spiegelt eine gemeinsame Struktur der Bewegungsgleichungen wider. Die folgende Übersicht stellt die wichtigsten Begriffe systematisch gegenüber.

Translationsbewegung		Rotationsbewegung
Ort \vec{r}	\leftrightarrow	Winkel φ
Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	\leftrightarrow	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$
Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	\leftrightarrow	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	\leftrightarrow	Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Kraft \vec{F}	\leftrightarrow	Drehmoment $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	\leftrightarrow	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
kinetische Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$	\leftrightarrow	kinetische Energie $E = \frac{1}{2}I\omega^2$
Impulserhaltung	\leftrightarrow	Drehimpulserhaltung

Die Tabelle verdeutlicht, dass das Trägheitsmoment I in der Rotationsbewegung eine ähnliche Rolle spielt wie die Masse m in der Translationsbewegung. Während die Masse angibt, wie stark sich ein Körper einer Änderung seiner Geschwindigkeit widersetzt, beschreibt das Trägheitsmoment, wie stark sich ein Körper einer Änderung seines Rotationszustands widersetzt. Trotz dieser engen Analogie bestehen wichtige Unterschiede: Der Drehimpuls hängt vom gewählten Bezugspunkt ab, und das Trägheitsmoment ist keine intrinsische Eigenschaft eines Körpers, sondern hängt von der Wahl der Rotationsachse ab.

Kapitel 8

Was passiert, wenn viele Teilchen zusammenwirken?

- **Physikalisches Thema:** System von Massenpunkten, Schwerpunktbewegung
- **Inhalte:** Schwerpunkt, innere vs. äußere Kräfte, Massenpunktmodell
- **Mathematik:** Summen/Integrale über Massen, Schwerpunktkoordinaten/-definition

8.1 Systeme von Massenpunkten und Schwerpunktbewegung

Bisher haben wir die Bewegung einzelner Massenpunkte betrachtet. Reale physikalische Systeme bestehen jedoch in der Regel aus vielen wechselwirkenden Teilchen. Um solche Systeme beschreiben zu können, modellieren wir sie als *Systeme von Massenpunkten*, die über Kräfte miteinander und mit ihrer Umgebung wechselwirken. Ziel dieses Abschnitts ist es, zu verstehen, wie sich die Bewegung eines Gesamtsystems aus den Bewegungen seiner einzelnen Bestandteile ergibt und welche Rolle dabei innere und äußere Kräfte spielen. Eine zentrale Größe ist dabei der *Schwerpunkt*, dessen Bewegung sich oft besonders einfach beschreiben lässt.

8.1.1 Bewegung im System von Massenpunkten

Wir betrachten ein System aus N Massenpunkten mit Massen m_i und Ortsvektoren $\vec{r}_i(t)$. Auf jeden Massenpunkt wirken sowohl äußere Kräfte \vec{F}_i^{ext} als auch innere Kräfte \vec{F}_{ij} , die von den anderen Massenpunkten des Systems ausgeübt werden. Die Bewegungsgleichung des i -ten Massenpunktes lautet

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}. \quad (8.1)$$

Wie wir schon im letzten Kapitel diskutiert haben, wirken innere Kräfte ausschließlich zwischen den Bestandteilen des Systems. Äußere Kräfte beschreiben den Einfluss der Umgebung auf das System. Wichtig wird hier wieder das dritte Newtonsche Axiom:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (8.2)$$

Der Vollständigkeit wegen, müssen wir noch erwähnen daß das dritte Newtonsche Axiom nicht für alle Arten von Kräften gilt. Es ist erfüllt für klassische Wechselwirkungen zwischen Teilchen in einem Inertialsystem, wie etwa gravitative oder elastische Kräfte. Es gilt hingegen nicht für Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen oder für Wechselwirkungen, bei denen Impuls im Feld gespeichert werden kann, wie in der Elektrodynamik. Die Impulserhaltung bleibt dabei jedoch stets erhalten, wenn das Gesamtsystem korrekt gewählt wird.

Das dritte Newtonsche Axiom stellt sicher, dass innere Kräfte stets paarweise auftreten und keine resultierende Kraft auf das Gesamtsystem ausüben. Wenn wir eine Gesamtkraft des Systems von N Massepunkten definieren sehen wir die Folgen des Axioms:

$$\vec{F}_{\text{ges}} := \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} [\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}] \right) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (8.3)$$

Die Gesamtkraft bestimmt die Bewegung des sogenannten Schwerpunktes. Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten ist definiert als der massengewichtete Mittelwert der Ortsvektoren:

$$\vec{R}(t) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t), \quad M := \sum_{i=1}^N m_i. \quad (8.4)$$

Der Schwerpunkt beschreibt die „mittlere Lage“ der Masseverteilung des Systems. Der Schwerpunkt ist also derjenige Punkt, an dem man sich die gesamte Masse des Systems konzentriert denken kann, ohne die Bewegung des Systems unter äußeren Kräften zu verändern.

Leiten wir die Definition des Schwerpunktes zweimal nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$M \ddot{\vec{R}}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i(t). \quad (8.5)$$

Setzen wir die Bewegungsgleichungen der einzelnen Massenpunkte ein, folgt der sogenannte *Schwerpunktsatz*

$$M \ddot{\vec{R}}(t) = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) = \vec{F}_{\text{ges}}. \quad (8.6)$$

Die Summe aller inneren Kräfte verschwindet aufgrund des dritten Newtonschen Axioms wie wir in (8.3) gezeigt haben. Der Schwerpunkt bewegt sich so, als wäre die gesamte Masse M im Schwerpunkt konzentriert und als würde nur die Summe der äußeren Kräfte auf ihn wirken. Innere Kräfte beeinflussen die Schwerpunktbewegung nicht. So weit man sich nicht für Details der Bewegungen der Einzelteilchen interessiert, kann man die Gesamtbewegung tatsächlich durch die eines Massenpunktes, nämlich des Schwerpunktes, ersetzen [1]. Ist das System abgeschlossen, d. h. die Gesamtkraft verschwindet $\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{0}$, so folgt $\ddot{\vec{R}}(t) = \vec{0}$. Der Schwerpunkt bewegt sich dann geradlinig und gleichförmig.

Bisher haben wir den Schwerpunkt für ein System aus diskreten Massenpunkten definiert als gewichtete Summe über Massepunkte. Ein ausgedehnter Körper kann als Grenzfall eines

solchen Systems mit sehr vielen, sehr kleinen Massenelementen aufgefasst werden. Wir zerlegen den Körper gedanklich in Volumenelemente dV , in denen sich jeweils eine infinitesimale Masse

$$dm = \rho(\vec{r}) dV$$

befindet, wobei $\rho(\vec{r})$ die Massendichte bezeichnet. Im Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ geht die Summe über die Massenpunkte in ein Volumenintegral über. Die Definition des Schwerpunkts wird damit zu

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV, \quad (8.7)$$

wobei die Gesamtmasse des Körpers durch

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (8.8)$$

gegeben ist. Das Symbol \int_V bezeichnet ein Integral über das gesamte Volumen V des betrachteten Körpers. Dabei ist V kein Zahlenwert, sondern dasjenige räumliche Gebiet, das der Körper einnimmt. In der Praxis bedeutet \int_V , dass über alle Raumpunkte integriert wird, an denen die Massendichte $\rho(\vec{r})$ ungleich Null ist. Die konkrete Ausführung des Integrals hängt von der gewählten Koordinatendarstellung ab (z. B. kartesische, zylindrische oder kugelförmige Koordinaten).

8.1.2 Beispiel: Schwerpunkt eines Vollzylinders

Wir betrachten einen homogenen Vollzylinder mit Radius R und Höhe h . Der Zylinder sei entlang der z -Achse ausgerichtet, die Grundfläche liege bei $z = 0$, die Deckfläche bei $z = h$. Die Massendichte sei konstant $\rho = \text{const.}$ Zunächst wollen wir die Gesamtmasse berechnen. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt $dV = r dr d\varphi dz$. Damit ist die Gesamtmasse

$$M = \int_V \rho dV = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi dz = \rho h (2\pi) \frac{R^2}{2} = \rho \pi R^2 h. \quad (8.9)$$

Damit können wir jetzt die Schwerpunktkoordinaten bestimmt mit Gleichung (8.7) berechnen. Wir bestimmen die Komponenten einzeln.

(i) *x- und y-Komponente.* Wegen der Rotationssymmetrie um die z -Achse muss der Schwerpunkt auf der z -Achse liegen. Formal sieht man dies auch an den Integralen: mit $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ gilt

$$x_S = \frac{1}{M} \int_V x \rho dV = \frac{\rho}{M} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \cos \varphi) r dr d\varphi dz \quad (8.10)$$

$$= \frac{\rho}{M} \left(\int_0^h dz \right) \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) = 0, \quad (8.11)$$

da $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$. Analog folgt $y_S = 0$.

(ii) z -Komponente. Hier ist z bereits eine Koordinate, also

$$z_S = \frac{1}{M} \int_V z \rho dV = \frac{\rho}{M} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R z r dr d\varphi dz \quad (8.12)$$

$$= \frac{\rho}{M} \left(\int_0^h z dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^R r dr \right) = \frac{\rho}{M} \left(\frac{h^2}{2} \right) (2\pi) \left(\frac{R^2}{2} \right) = \frac{\rho \pi R^2 h^2 / 2}{\rho \pi R^2 h} = \frac{h}{2}. \quad (8.13)$$

Der Schwerpunkt des homogenen Vollzylinders liegt also bei

$$\boxed{\vec{R}_S = (0, 0, h/2)}. \quad (8.14)$$

Er liegt also im geometrischen Zentrum des Zylinders (auf der Symmetrieachse und in halber Höhe).

Wir wollen jetzt noch den Schwerpunkt eines Zylinders mit zwei verschiedenen Dichten bestimmen. Wir betrachten erneut einen Vollzylinder mit Radius R und Gesamthöhe h , dessen Achse mit der z -Achse zusammenfällt. Die untere Hälfte ($0 \leq z < h/2$) habe die konstante Massendichte ρ_1 , die obere Hälfte ($h/2 \leq z \leq h$) die konstante Massendichte ρ_2 . Die Gesamtmasse ergibt sich als Summe der Massen beider Zylinderhälften:

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (8.15)$$

$$= \rho_1 \int_0^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi dz + \rho_2 \int_{h/2}^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi dz \quad (8.16)$$

$$= \pi R^2 \left(\rho_1 \frac{h}{2} + \rho_2 \frac{h}{2} \right) = \frac{\pi R^2 h}{2} (\rho_1 + \rho_2). \quad (8.17)$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie um die z -Achse gilt weiterhin $x_S = y_S = 0$. Es bleibt also nur die Bestimmung der z -Koordinate des Schwerpunkts: Wir zerlegen das Integral entsprechend der beiden Dichtebereiche:

$$z_S = \frac{1}{M} \left[\rho_1 \int_0^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R z r dr d\varphi dz + \rho_2 \int_{h/2}^h \int_0^{2\pi} \int_0^R z r dr d\varphi dz \right]. \quad (8.18)$$

Die Integrale über r und φ sind identisch wie zuvor und liefern jeweils πR^2 . Damit folgt

$$z_S = \frac{\pi R^2}{M} \left[\rho_1 \int_0^{h/2} z dz + \rho_2 \int_{h/2}^h z dz \right] \quad (8.19)$$

$$= \frac{\pi R^2}{M} \left[\rho_1 \frac{(h/2)^2}{2} + \rho_2 \left(\frac{h^2}{2} - \frac{(h/2)^2}{2} \right) \right] \quad (8.20)$$

$$= \frac{\pi R^2 h^2}{8M} (\rho_1 + 3\rho_2). \quad (8.21)$$

Setzt man die Gesamtmasse $M = \frac{\pi R^2 h}{2} (\rho_1 + \rho_2)$ ein, erhält man

$$\boxed{z_S = \frac{h}{4} \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (8.22)$$

8.2 Erhaltungssätze im System von Massenpunkten

In den bisherigen Kapiteln sind uns drei zentrale Erhaltungssätze begegnet: die Erhaltung des Impulses, des Drehimpulses und der Energie. Diese Erhaltungssätze sind keine voneinander unabhängigen Aussagen, sondern beruhen auf gemeinsamen strukturellen Eigenschaften der Bewegungsgleichungen.

8.2.1 Impuls und Drehimpuls

Der Schwerpunktsatz (8.6) entspricht dem Impulssatz des N -Teilchensystems. Mit der Definition des Gesamtimpuls eines Systems und dem zweiten Newtonschen Axiom folgt

$$M \ddot{\vec{R}}(t) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}, \quad \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \quad (8.23)$$

wobei \vec{F}_{ext} die Summe der äußeren Kräfte bezeichnet. Wirkt keine äußere Kraft auf das System, so ist der Gesamtimpuls erhalten, vgl (7.8). Diese Aussage ist unabhängig von der Zahl der Teilchen und von der Art der inneren Wechselwirkungen.

Den Gesamtdrehimpuls eines Systems von N Massenpunkten haben wir schon im Kapitel zuvor diskutiert, wir werden diesen nun in Verbindung mit dem Schwerpunktsatz bringen. Zur Diskussion der Drehimpulserhaltung haben wir uns auf Zentralkräfte bezogen, da hier die inneren Kräfte nicht beitragen. Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses wird durch das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte bestimmt:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{ges}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ges}}^{\text{ext}} := \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}, \quad \vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (8.24)$$

Wirkt bezüglich des gewählten Bezugspunktes kein äußeres Drehmoment, $\vec{\tau}_{\text{ges}}^{\text{ext}} = \vec{0}$ folgt unmittelbar $\vec{L}_{\text{ges}} = \text{const.}$. Der Gesamtdrehimpuls eines Systems ist also genau dann erhalten, wenn das äußere Drehmoment bezüglich des betrachteten Bezugspunktes verschwindet. Die Drehimpulserhaltung ist daher stets eine Aussage, die sowohl dynamische als auch geometrische Information enthält.

Um die physikalische Bedeutung des Gesamtdrehimpulses weiter zu präzisieren, zerlegen wir die Orts- und Impulsvektoren in Schwerpunkt- und Relativanteile. Dazu definieren wir

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i, \quad \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{R}} + m_i \dot{\vec{r}}'_i, \quad \vec{R}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t), \quad (8.25)$$

wobei \vec{R} der Schwerpunkt des Systems ist und \vec{r}'_i die Relativkoordinaten der Massenpunkte bezüglich des Schwerpunkts bezeichnen.

Setzt man diese Zerlegung in den Gesamtdrehimpuls ein, so erhält man

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (m_i \dot{\vec{R}} + m_i \dot{\vec{r}}'_i) \quad (8.26)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{r}'_i \times \dot{\vec{R}} \right). \quad (8.27)$$

Die letzten beiden Terme verschwinden aufgrund der Schwerpunktdefinition:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = M\vec{R} - M\vec{R} = 0 \quad (8.28)$$

Damit ergibt sich die Zerlegung

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{\text{Schwerpunktanteil}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i}_{\text{Relativanteil}}. \quad (8.29)$$

Der Gesamtdrehimpuls setzt sich also aus zwei unabhängigen Beiträgen zusammen:

- dem Drehimpuls des Schwerpunkts bezüglich des Bezugspunktes,
- dem inneren Drehimpuls der Teilchenbewegung relativ zum Schwerpunkt.

Die Drehimpulserhaltung bedeutet daher nicht notwendigerweise, dass die innere Rotation eines Systems konstant ist oder dass sich der Schwerpunkt nicht bewegt. Entscheidend ist, dass sich die *Summe beider Beiträge* nicht ändert, sofern kein äußeres Drehmoment wirkt.

Der dritte wichtige Erhaltungssatz ist der der Energie. Die mechanische Energie eines Systems ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie. Ist die Arbeit der äußeren Kräfte zeitlich konstant oder verschwindet sie, so bleibt die Gesamtenergie erhalten. Die Energieerhaltung unterscheidet sich konzeptionell von Impuls- und Drehimpulserhaltung, da sie keine Vektorgröße betrifft und nicht an einen Bezugspunkt gebunden ist, sondern an die Zeitabhängigkeit der wirkenden Kräfte.

Allen drei Erhaltungssätzen ist gemeinsam, dass sie aus den Bewegungsgleichungen folgen und unabhängig von den Details der inneren Dynamik gelten. Sie erlauben es, komplexe Vielteilchensysteme mit vergleichsweise wenig Information zu beschreiben. Für gebundene Systeme von Teilchen lässt sich ein Zusammenhang zwischen der mittleren kinetischen Energie und den wirkenden Kräften herleiten, der als Virialsatz bezeichnet wird. Er spielt eine wichtige Rolle in der Astrophysik, der Molekülphysik und der statistischen Mechanik.

8.2.2 Beispiel: Raketenbewegung

Die Bewegung einer Rakete stellt ein besonders instruktives Beispiel für die Anwendung der Impulserhaltung auf Systeme mit veränderlicher Masse dar. Zugleich verdeutlicht sie die Rolle des Schwerpunkts für die Dynamik zusammengesetzter Systeme. Wir betrachten als physikalisches System stets die *Rakete zusammen mit allen bereits ausgestoßenen Abgasen*. Vernachlässigt man äußere Kräfte (z. B. Schwerkraft und Luftwiderstand), so handelt es sich um ein abgeschlossenes System, für das die Impulserhaltung gilt:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{ges}}}{dt} = \vec{0}.$$

Der Schwerpunkt dieses Gesamtsystems bewegt sich daher geradlinig und gleichförmig. Die Rakete allein ist hingegen *kein* abgeschlossenes System, da sie fortlaufend Masse in Form von Abgasen verliert.

Wir betrachten ein kleines Zeitintervall Δt , in dem die Rakete der momentanen Masse m ihre Geschwindigkeit von v auf $v + \Delta v$ ändert und dabei Masse verliert $m(t + \Delta t) = m(t) + \Delta m$ (mit $\Delta m < 0$), d.h. eine Masse $-\Delta m$ wird ausgestossen. Die Abgase verlassen die Rakete mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v_g nach hinten, sodass ihre Geschwindigkeit im Inertialsystem $v - v_g$ beträgt. Aus der Impulserhaltung für Rakete und Abgase folgt:

$$mv = (m + \Delta m)(v + \Delta v) + (-\Delta m)(v - v_g). \quad (8.30)$$

Nach Ausmultiplizieren und Vernachlässigen von Termen zweiter Ordnung ergibt sich

$$m \Delta v = -v_g \Delta m.$$

Im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ erhalten wir die Raketengleichung

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -v_g \frac{dm}{dt}. \quad (8.31)$$

Zur Lösung der Differentialgleichung multiplizieren wir beide Seiten mit dt und verwenden die Definitionen der Differentiale

$$dv = \frac{dv}{dt} dt, \quad dm = \frac{dm}{dt} dt.$$

Damit erhält man die äquivalente Form

$$m dv = -v_g dm,$$

in der Zeit nicht mehr explizit auftritt. Diese Gleichung kann nun direkt integriert werden. Durch Trennung der Variablen ergibt sich

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = -v_g \int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m}. \quad (8.32)$$

Dies liefert die klassische Raketengleichung von Ziolkowski:

$$v(t) - v_0 = v_g \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right). \quad (8.33)$$

wobei m_0 die Anfangsmasse der Rakete ist. Die Beschleunigung der Rakete entsteht nicht durch eine äußere Kraft, sondern durch den Impulsaustausch mit den ausgestoßenen Abgasen. Die dabei wirkenden Kräfte sind innere Kräfte des Systems aus Rakete und Abgasen. Dennoch kann sich die Rakete relativ zu einem äußeren Bezugssystem beschleunigen, da Masse das System verlässt. Dieses Beispiel zeigt, dass die Impulserhaltung auch für Systeme mit zeitabhängiger Masse gilt, sofern das Gesamtsystem korrekt gewählt wird.

Aber was ist mit dem Schwerpunkt? Da für das abgeschlossene Gesamtsystem der Impulssatz gilt, folgt unmittelbar auch der Schwerpunktsatz. Der Schwerpunkt von Rakete und Abgasen bewegt sich daher geradlinig und gleichförmig und erfährt keine Beschleunigung. Während sich die Rakete beschleunigt und die Abgase nach hinten ausströmen, ändert sich lediglich die Massenverteilung innerhalb des Systems, nicht jedoch die gleichförmige Bewegung des Gesamtschwerpunkts.

Vom diskreten Schwerpunkt zum Volumenintegral (Kontinuumslimes)

1. Diskrete Definition. Für ein System aus N Massenpunkten mit Massen m_i an Positionen \vec{r}_i ist der Schwerpunkt definiert als

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (8.34)$$

2. Ein ausgedehnter Körper als viele kleine Massenelemente. Ein ausgedehnter Körper kann als Grenzfall eines Systems sehr vieler, sehr kleiner Massenelemente aufgefasst werden. Dazu zerlegen wir das Volumen V des Körpers in viele kleine Teilvolumina ΔV_i . In jedem Teilvolumen wählen wir einen repräsentativen Punkt mit Ortsvektor \vec{r}_i .

3. Masse eines kleinen Teilvolumens. Ist die Massendichte $\rho(\vec{r})$ gegeben, dann hat das Teilvolumen ΔV_i näherungsweise die Masse

$$\Delta m_i \approx \rho(\vec{r}_i) \Delta V_i. \quad (8.35)$$

Diese Näherung wird im Grenzfall sehr kleiner Teilvolumina exakt.

4. Schwerpunkt als gewichtete Summe über Teilvolumina. Setzen wir (8.35) in die diskrete Schwerpunktformel ein, so erhalten wir für eine immer feinere Zerlegung des Körpers:

$$\vec{R} \approx \frac{1}{\sum_i \Delta m_i} \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i = \frac{1}{\sum_i \rho(\vec{r}_i) \Delta V_i} \sum_i \rho(\vec{r}_i) \vec{r}_i \Delta V_i. \quad (8.36)$$

5. Kontinuumslimes: Summe \rightarrow Integral. Im Grenzfall, dass die Zerlegung beliebig fein wird ($\max_i \Delta V_i \rightarrow 0$), werden die Summen in (8.36) zu Riemann-Integralen. Wir erhalten

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (8.37)$$

und

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV. \quad (8.38)$$

6. Alternative Schreibweise mit dm . Schreibt man das infinitesimale Massenelement als

$$dm = \rho(\vec{r}) dV,$$

so kann (8.38) auch als

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm \quad (8.39)$$

geschrieben werden.

Damit ist gezeigt: Die Schwerpunktformel für kontinuierliche Massenverteilungen ist die direkte kontinuierliche Entsprechung der diskreten Definition (8.34).

Kapitel 9

Wie lassen sich Kräfte zwischen zwei Körpern beschreiben?

- **Physikalisches Thema:** Zwei-Körper-Problem, Reduktion auf Relativkoordinaten
- **Inhalte:** Zwei-Körper-Problem, Relativkoordinaten, Reduktion auf Zentralkraft
- **Mathematik:** Transformationen, Vektoren Differentialgleichungen

9.1 Zwei Teilchen System

9.1.1 Bewegungsgleichungen

Viele physikalische Systeme lassen sich in guter Näherung als Zweikörperproblem beschreiben, etwa die Bewegung von Planeten um die Sonne, Doppelsternsysteme oder die Wechselwirkung zweier geladener Teilchen. Ziel ist es, die Bewegung zweier Teilchen auf ein einfacheres effektives Problem zu reduzieren. Wir betrachten zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 an den Positionen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 . Zur Vereinfachung führen wir Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ein:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (9.1)$$

Dabei beschreibt \vec{R} die Bewegung des Gesamtsystems, während \vec{r} die Relativbewegung der beiden Teilchen angibt. Die Ortsvektoren der beiden Teilchen sind dann gegeben durch

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad M = m_1 + m_2. \quad (9.2)$$

Die Bewegungsgleichungen der beiden Teilchen lauten

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{12}, \quad (9.3)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_{21}, \quad (9.4)$$

wobei nach dem dritten Newtonschen Axiom $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ im generellen gilt. Addiert man die Bewegungsgleichungen beider Teilchen, so erhält man den schon diskutierten Schwerpunktsatz

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} = \vec{F}^{\text{ges}}, \quad (9.5)$$

d.h. die Summe der inneren Kräfte verschwindet. Wenn keine äußere Gesamtkraft auf die Teilchen wirkt (abgeschlossenes System) bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig. Subtrahiert man die beiden Bewegungsgleichungen, ergibt sich

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} + \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}.$$

Nach Umformung erhält man eine Bewegungsgleichung für den Relativvektor

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{\text{rel}}, \quad \vec{F}^{\text{rel}} = \frac{m_2}{M} \vec{F}_1^{\text{ext}} - \frac{m_1}{M} \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_{12} \quad (9.6)$$

wobei \vec{F}^{rel} dem relativen Kraftvektor entspricht, und

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (9.7)$$

die reduzierte Masse ist. Wirken äußere Kräfte, so bleiben sowohl die ursprünglichen Koordinaten \vec{r}_1, \vec{r}_2 als auch die Schwerpunkt- und Relativkoordinaten \vec{R}, \vec{r} im Allgemeinen miteinander gekoppelt. Eine vollständige Entkopplung der Bewegung tritt erst ein, wenn keine äußeren Kräfte wirken oder beide Teilchen dieselbe äußere Beschleunigung erfahren. In einem abgeschlossenen System lässt sich also die Bewegung durch Einführung von Schwerpunkt- und Relativkoordinaten in zwei unabhängige Anteile zerlegen: die gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts und die Relativbewegung der beiden Teilchen. Damit reduziert sich das Zweikörperproblem auf die Bewegung eines einzelnen effektiven Teilchens der Masse μ im Kraftfeld \vec{F}^{rel} . Die Relativbewegung erfolgt somit so, als bewege sich die reduzierte Masse μ im durch die Wechselwirkung bestimmten Kraftfeld zwischen den beiden Teilchen. Das Zweikörperproblem wird daher effektiv zu einem Einteilchenproblem, und die Dynamik des Systems ist vollständig durch die Relativbewegung bestimmt.

9.1.2 Zwei Teilchen im Zentralkraftfeld

Nach der Reduktion des Zweikörperproblems auf die Relativbewegung eines effektiven Teilchens betrachten wir nun einen besonders wichtigen Spezialfall: die Bewegung in einem Zentralkraftfeld. Dieser Fall beschreibt unter anderem die gravitative Bewegung von Planeten oder die Coulomb-Wechselwirkung geladener Teilchen.

Eine Kraft heißt Zentralkraft, wenn sie stets entlang der Verbindungslinie zwischen zwei Teilchen wirkt und ihr Betrag nur vom Abstand der Teilchen abhängt. Für den Relativvektor \vec{r} bedeutet dies

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad r = |\vec{r}|. \quad (9.8)$$

Die Kraft ist also rein radial und invariant unter Drehungen um den Kraftzentrumspunkt. In vielen physikalischen Anwendungen ist diese Kraft zudem konservativ, sodass sie aus einem Potential $V(r)$ abgeleitet werden kann:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(r). \quad (9.9)$$

Da das Potential nur vom Abstand r abhängt, spricht man von einem Zentralpotential. Die Relativbewegung reduziert sich somit auf die Bewegung eines effektiven Teilchens der reduzierten Masse μ in diesem Potential.

Wir wollen kurz die Erhaltungssätze im Zentralkraftfeld diskutieren. Die spezielle Form der Zentralkraft hat wichtige Konsequenzen für die Dynamik. Aufgrund der Konservativität der Kraft ist die Gesamtenergie im Zentralpotential

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V(r) \\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + V(r) \\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}}^2 + 2 \frac{m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}}^2 - 2 \frac{m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 \right) + V(r) \\
&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \left(m_1 \frac{m_2}{M} - m_2 \frac{m_1}{M} \right) \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{1}{2} \left(m_1 \frac{m_2^2}{M^2} + m_2 \frac{m_1^2}{M^2} \right) \dot{\vec{r}}^2 + V(r) \\
&= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \underbrace{\left(\frac{m_1 m_2}{M} - \frac{m_1 m_2}{M} \right)}_{=0} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} \right) \dot{\vec{r}}^2 + V(r) \\
&= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(r)
\end{aligned} \tag{9.10}$$

erhalten. Die kinetische Energie hat also einen Relativ- und einen Schwerpunktanteil. Auch der Drehimpuls kann in relativ und Schwerpunktsanteil zerlegt werden.

$$\vec{L} = M \left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \right) + \mu \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) \tag{9.11}$$

Da die Kraft stets parallel zum Ortsvektor wirkt, verschwindet das Drehmoment

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{L} = M \left(\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} \right) + M \left(\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} \right) + \mu \left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} \right) + \mu \left(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \right) = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \tag{9.12}$$

und der Drehimpuls ist erhalten (abgeschlossenes System).

Die Bewegung erfolgt daher in einer festen Ebene senkrecht zum Drehimpulsvektor. Die Drehimpulserhaltung hat eine unmittelbare geometrische Konsequenz: Da der Drehimpulsvektor \vec{L} konstant bleibt, bewegen sich Ortsvektor \vec{r} und Geschwindigkeitsvektor stets in einer Ebene senkrecht zu \vec{L} . Die gesamte Bewegung findet somit in einer festen Ebene statt. Es ist daher zweckmäßig, die Relativbewegung in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) zu beschreiben. Dadurch reduziert sich das Problem auf zwei zeitabhängige Größen: den Abstand $r(t)$ vom Kraftzentrum und den Winkel $\varphi(t)$ innerhalb der Bahnebene. Wir schreiben den Ortsvektor in der Bahnebene als

$$\vec{r} = r \vec{e}_r, \tag{9.13}$$

wobei \vec{e}_r der radiale Einheitsvektor ist. Die Geschwindigkeit lässt sich dann in einen radialen und einen tangentialen Anteil zerlegen,

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi. \tag{9.14}$$

9.1.3 Zweikörperproblem im Potential $V(r) = -\kappa/r$

Wir betrachten zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 , die nur über ein Zentralpotential der Form

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad \kappa > 0, \quad r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad (9.15)$$

wechselwirken. Dieser Potentialtyp spielt eine zentrale Rolle, da er eine vollständige analytische Lösung der Bahnform erlaubt. Mit Schwerpunkt- und Relativkoordinate reduziert sich das Zweikörperproblem (ohne äußere Kräfte) auf die Bewegung eines effektiven Teilchens der reduzierten Masse μ im Potential $V(r)$. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\nabla V(r) = -\frac{\kappa}{r^2}. \quad (9.16)$$

Wie im Unterkapitel zuvor diskutiert, da V nur von r abhängt, ist die Kraft zentral, und somit ist der Drehimpuls erhalten. Die Bewegung findet daher in einer festen Ebene senkrecht zu \vec{L} statt. Wir verwenden in dieser Ebene Polarkoordinaten (r, φ) . Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lauten (Standardformeln):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad (9.17)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi. \quad (9.18)$$

Da die Kraft rein radial ist, verschwindet die \vec{e}_φ -Komponente der Bewegungsgleichung $\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$:

$$\mu (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (9.19)$$

Damit ist

$$L := |\vec{L}| = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (9.20)$$

Ausgangspunkt für die Lösung der Bewegungsgleichung in einem konservativen Zentralfeld ist die Gültigkeit von Energie- und Drehimpulserhaltung, die sich in der Gleichung

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\kappa}{r}. \quad (9.21)$$

manifestiert. Hierbei ist $L = |\vec{L}|$ konstant und $r^2 \dot{\varphi} = L/\mu$. Wir wollen nun die Bahnkurve $r(\varphi)$ bestimmen. Wir definieren hierzu

$$u(\varphi) := \frac{1}{r(\varphi)} \quad \Leftrightarrow \quad r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)}. \quad (9.22)$$

Zunächst werden wir \dot{r} ausdrücken durch die neue Parametrisierung.

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{u'}{u^2}, \quad (' = \frac{d}{d\varphi}). \quad (9.23)$$

wir nutzen hier einen Strich ' für die Ableitung nach φ und einen Punkt für die zeitliche Ableitung. Weiter gilt

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \left(-\frac{u'}{u^2} \right) \left(\frac{L}{\mu} u^2 \right) = -\frac{L}{\mu} u'. \quad (9.24)$$

Wir leiten weiter nach der Zeit ab:

$$\ddot{r} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{dt}(u') = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi}(u') = -\frac{L}{\mu} \dot{\varphi} \frac{du'}{d\varphi} = -\frac{L}{\mu} \dot{\varphi} u''.$$

Mit dem Ausdruck für den Drehimpuls in Polarkoordinaten $L = \mu r^2 \dot{\varphi} = \mu/u^2 \dot{\varphi}$ folgt

$$\ddot{r} = -\frac{L}{\mu} u'' \left(\frac{L}{\mu} u^2 \right) = -\frac{L^2}{\mu^2} u^2 u''. \quad (9.25)$$

Außerdem benötigen wir

$$r \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{u} \left(\frac{L}{\mu} u^2 \right)^2 = \frac{L^2}{\mu^2} u^3. \quad (9.26)$$

Die radiale Komponente der Bewegungsgleichung $\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ ist

$$\mu(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = -\frac{\kappa}{r^2}. \quad (9.27)$$

Setzen wir (9.25) und (9.26) in (9.27) ein, so ergibt sich

$$\mu \left(-\frac{L^2}{\mu^2} u^2 u'' - \frac{L^2}{\mu^2} u^3 \right) = -\kappa u^2.$$

Wir faktorisieren $-\frac{L^2}{\mu} u^2$ und erhalten

$$u'' + u = \frac{\mu\kappa}{L^2},$$

dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit konstanter äußerer Kraft. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$u(\varphi) = \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi + \frac{\mu\kappa}{L^2} \quad (9.28)$$

Die beiden Parameter α, β werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die Bahnkurve ergibt sich einfach als das Inverse $r = 1/u$. Wir werden im nächsten Kapitel die geometrische Form der Bahnen im weiteren Detail diskutieren.

Kapitel 10

Warum kreisen Planeten auf Ellipsenbahnen?

- **Physikalisches Thema:** Keplersche Gesetze, Zentralkraftbahnen, Klassifizierung
- **Inhalte:** Keplersche Gesetze, Ellipsenbahnen, Energie- & Drehimpulserhaltung
- **Mathematik:** Integralrechnung, Klassifizierung der Bahnen (elliptisch/parabolisch/hyperbolisch)

10.1 Planetenbewegung

10.1.1 Bewegung im Gravitationspotential

Die Bewegung von Himmelskörpern gehört zu den ältesten Problemen der Physik. Bereits lange vor der Entwicklung der modernen Mechanik war bekannt, dass sich Planeten auf regelmäßigen Bahnen um die Sonne bewegen und dass Monde Planeten umkreisen. Die Beschreibung dieser Bewegungen war ein zentraler Ausgangspunkt für die Entwicklung der klassischen Mechanik. Aus heutiger Sicht verstehen wir diese Bewegungen als Folge der universellen Gravitationskraft zwischen Massen. Die Dynamik eines Planetensystems ist daher ein Zweikörperproblem im Gravitationsfeld, genau der Situation, die wir im vorangegangenen Kapitel allgemein untersucht haben. Damit können wir die zuvor entwickelte Theorie nun auf ein konkretes und physikalisch besonders wichtiges Beispiel anwenden: die Bewegung zweier Körper im Gravitationspotential.

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ziehen sich zwei Massen m_1 und m_2 mit der Kraft

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad \gamma = 6.6743 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}, \quad (10.1)$$

an, wobei \vec{e}_r der Relativeinheitsvektor zwischen beiden Körpern ist und γ die Gravitationskonstante. Diese Kraft ist eine Zentralkraft und konservativ. Das zugehörige Potential lautet

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (10.2)$$

Wir erkennen, dass es sich genau um den bereits behandelten Spezialfall eines Zweikörperproblems im Potential $V(r) = -\kappa/r$ handelt mit

$$\kappa = \gamma m_1 m_2. \quad (10.3)$$

Die gesamte Dynamik reduziert sich somit auf die Relativbewegung eines Teilchens der reduzierten Masse μ im Gravitationspotential. Am Ende der letzten Vorlesung hatten wir für die Relativbewegung zweier Massen im Gravitationspotential die Lösung

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} = \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi + \frac{\mu\gamma m_1 m_2}{L^2}, \quad (10.4)$$

gefunden, wobei die Konstanten α und β durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Der winkelabhängige Ausdruck lässt sich als einzelne Kosinusfunktion schreiben, dazu nutzen wir eines der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen:

$$A \cos(\varphi - \varphi_0) = A \sin \varphi_0 \sin \varphi + A \cos \varphi_0 \cos \varphi \equiv \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi. \quad (10.5)$$

Die beiden neuen Koeffizienten A und φ_0 lassen sich bestimmen durch quadratisieren

$$\alpha^2 + \beta^2 = A^2(\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0) = A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (10.6)$$

und dividieren

$$\tan \varphi_0 = \frac{\alpha}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \arctan \frac{\alpha}{\beta}, \quad (10.7)$$

wobei φ_0 so zu wählen ist, dass $\sin \varphi_0 = \alpha/A$ und $\cos \varphi_0 = \beta/A$ gilt (also die richtige Quadrantenwahl). Damit wird (10.4)

$$u(\varphi) = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu\gamma m_1 m_2}{L^2}. \quad (10.8)$$

Zur physikalischen Interpretation betrachten wir nun die Bewegung eines Planeten um die Sonne (genauer: die Relativbewegung von Sonne und Planet, wobei aufgrund der großen Massenunterschiede die Sonne näherungsweise ruht). Der Abstand r beschreibt somit den Abstand des Planeten von der Sonne. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir den Winkel nun so wählen, dass der sonnennächste Punkt der Bahn – also der Punkt minimalen Abstandes – bei $\varphi = 0$ liegt. Der Punkt minimalen Abstandes bedeutet $u(\varphi)$ wird maximal:

$$\left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = -A \sin(\varphi - \varphi_0) \Big|_{\varphi=0} = A \sin(\varphi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0, \quad (10.9)$$

damit verschwindet der Phasenwinkel φ_0 , und es folgt die Bahnform

$$u(\varphi) = A \cos \varphi + \frac{\mu\gamma m_1 m_2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad (10.10)$$

mit den Definitionen

$$p := \frac{L^2}{\mu\gamma m_1 m_2}, \quad \epsilon := Ap, \quad (10.11)$$

Der minimale Abstand tritt bei $\varphi = 0$ auf, während der maximale Abstand bei $\varphi = \pi$ erreicht wird. Die Bahn ist somit ein *Kegelschnitt*, dessen Gestalt durch den Parameter ϵ bestimmt wird, dieser wird auch Exzentrizität genannt.

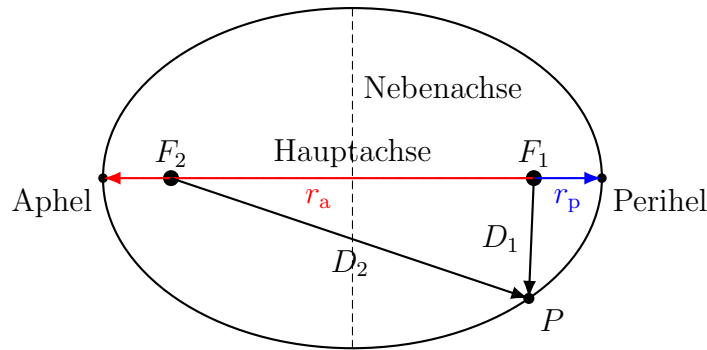


Abbildung 10.1: Charakterisierung einer Ellipse. F_1 und F_2 sind die sogenannten Brennpunkte der Ellipse. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt in der Mitte zwischen den beiden Brennpunkten. Die Summe der Abstände $D_{1,2}$ eines Bahnpunktes zu den Brennpunkten ist konstant. Wenn sich ein Planet auf einer elliptischen Bahn um die Sonne bewegt, sitzt die Sonne im Brennpunkt F_1 . Der minimale Abstand r_p (Perihel) und der maximale Abstand r_a (Aphel) des Planeten von der Sonne werden entlang der Hauptachse erreicht.

10.1.2 Elliptische Bahnen

Für $0 \leq \epsilon < 1$ beschreibt die Bahnkurve (10.10) eine Ellipse. Bevor wir die Bewegung weiter diskutieren, erinnern wir kurz an die geometrische Definition einer Ellipse, siehe Abbildung 10.1. Eine Ellipse kann anschaulich als ein gegenüber dem Kreis in einer Richtung gestreckte Kurve verstanden werden. Sie besitzt eine lange und eine kurze Achse, diese werden jeweils Haupt- und Nebenachse genannt. Eine Ellipse ist so definiert, dass die Menge aller Bahnpunkte, für die die Summe der Abstände zu zwei festen Punkten – den sogenannten Brennpunkten – konstant ist. Bezeichnet man die Brennpunkte mit F_1 und F_2 , so gilt also für jeden Punkt der Ellipse

$$D_1 + D_2 = 2a, \quad D_{1,2} = |PF_{1,2}|, \quad (10.12)$$

wobei a die große Halbachse der Ellipse darstellt. Eine Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung und Hauptachsen entlang der Koordinatenachsen lässt sich in kartesischen Koordinaten durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (10.13)$$

beschreiben. Dabei bezeichnet a die Halbachse entlang der x -Richtung (große Halbachse) und b die Halbachse entlang der y -Richtung (kleine Halbachse). Die Brennpunkte liegen in diesem gewählten Koordinatensystem auf der Hauptachse bei

$$x_{F_{1,2}} = \pm c, \quad c^2 = a^2 - b^2. \quad (10.14)$$

Im Spezialfall $a = b$ geht Gleichung (10.13) in

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (10.15)$$

über, also in die Gleichung eines Kreises mit Radius a . Eine Kreisbahn ist somit eine spezielle Ellipse, bei der beide Halbachsen gleich groß sind und beide Brennpunkte im Mittelpunkt zusammenfallen.

Für Anwendungen in der Himmelsmechanik wird der Ursprung der Koordinaten nicht im Mittelpunkt der Ellipse gewählt, sondern im Brennpunkt, in dem sich die Zentralkraftquelle – etwa die Sonne – befindet. In Polarkoordinaten (r, φ) ergibt sich dann die Darstellung

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad (10.16)$$

wobei $\epsilon = c/a$ die Exzentrizität und p der Bahnenparameter ist. Diese Form stimmt mit der zuvor aus der Bewegungsgleichung erhaltenen Bahnform überein. Bei der Lösung des Zweikörperproblems wurde der Ursprung nicht ausdrücklich festgelegt; durch die Einführung des Relativvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ entsteht jedoch automatisch ein Zentralproblem mit Kraftzentrum bei $\vec{r} = 0$. Die geometrische Interpretation der Lösung zeigt dann, dass dieses Kraftzentrum in einem Brennpunkt der Ellipse liegt.

Die Ellipse beschreibt somit die typische Bahnform gebundener Bewegungen im Gravitationsfeld: Der Abstand des Planeten zur Sonne ändert sich entlang der Bahn, wobei der Körper periodisch in Sonnennähe zurückkehrt. Der kleinste Abstand zur Sonne wird im sonnennächsten Punkt der Bahn erreicht (Perihel r_p), der größte Abstand im sonnenfernsten Punkt (Aphel r_a). Aus der Bahnform $r(\varphi)$ ergeben sich diese Extremabstände direkt. Da wir $\varphi = 0$ als sonnennächsten Punkt (Perihel) gewählt haben, gilt $\cos 0 = 1$ und damit

$$r_{\min} = r_p = r(0) = \frac{p}{1 + \epsilon}. \quad (10.17)$$

Der sonnenfernste Punkt (Aphel) liegt bei $\varphi = \pi$, so dass $\cos \pi = -1$ und

$$r_{\max} = r_a = r(\pi) = \frac{p}{1 - \epsilon}. \quad (10.18)$$

Diese Beziehungen können auch umgekehrt verwendet werden, um p und ϵ aus den Extremabständen zu bestimmen. Addiert und subtrahiert man die Kehrwerte, so erhält man also

$$p = \frac{2 r_p r_a}{r_p + r_a}, \quad \epsilon = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \quad (10.19)$$

Damit ist die Bahngeometrie vollständig durch die beiden Extremabstände festgelegt. Zudem ist der Parameter p bereits durch den Drehimpuls bestimmt,

$$p = \frac{L^2}{\mu \gamma m_1 m_2}. \quad (10.20)$$

Die Exzentrizität ϵ ergibt sich aus der Gesamtenergie der Bewegung. Dazu betrachten wir einen Extrempunkt der Bahn (Perihel oder Aphel), an dem die Radialgeschwindigkeit verschwindet, also $\dot{r} = 0$ gilt. Die Energie lautet allgemein (Drehimpulserhaltung $L = \mu r^2 \dot{\varphi}$)

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} \left(\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu r^2} \right) - \frac{\gamma m_1 m_2}{r}. \quad (10.21)$$

Im Extrempunkt folgt damit

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2\mu r_{p,a}^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{p,a}} = \frac{L^2 (1 \pm \epsilon)^2}{2\mu p^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{p} (1 \pm \epsilon) \\ &= \frac{\mu (\gamma m_1 m_2)^2}{L^2} \left[\frac{1}{2} (1 \pm \epsilon)^2 - (1 \pm \epsilon) \right] = \frac{\mu (\gamma m_1 m_2)^2}{2L^2} (\epsilon^2 - 1). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Daraus folgt schließlich

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu(\gamma m_1 m_2)^2} \quad (10.23)$$

Damit wird deutlich: Während der Drehimpuls die Größe der Bahn bestimmt, legt die Gesamtenergie die Exzentrizität und damit die konkrete Bahnform fest.

Zu Beginn dieses Kapitels hatten wir bereits gesehen, dass die Bahnkurve $r(\varphi)$ für $0 \leq \epsilon < 1$ eine Ellipse beschreibt. Setzt man diese Bedingung nun in die Energie am Extrempunkt (10.22) ein, so folgt unmittelbar, dass in diesem Fall die Gesamtenergie negativ ist, also $E < 0$ gilt. Negative Gesamtenergie bedeutet, dass die Bewegung gebunden bleibt: Der Körper kann das Gravitationsfeld nicht verlassen und kehrt periodisch in Sonnennähe zurück. Elliptische Bahnen entsprechen daher gebundenen Zuständen. Im Grenzfall $\epsilon = 1$ verschwindet die Bindungsenergie ($E = 0$), während für $\epsilon > 1$ positive Gesamtenergie vorliegt; die Bahn ist dann offen und der Körper entkommt dem Gravitationsfeld.

Dass die Gesamtenergie negativ werden kann, liegt an der Form des Gravitationspotentials. Üblicherweise wird die potentielle Energie so gewählt, dass sie im Unendlichen verschwindet,

$$V(r) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty.$$

Da das Gravitationspotential

$$V(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

für alle endlichen Abstände negativ ist, kann die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ebenfalls negativ werden. Negative Gesamtenergie bedeutet daher, dass zusätzliche Energie zugeführt werden müsste, um den Körper bis ins Unendliche zu entfernen. Genau dies entspricht einer gebundenen Bewegung. Die vollständige Energie des Zweikörpersystems enthält zusätzlich die kinetische Energie der Schwerpunktbeziehung,

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + E_{\text{rel}}.$$

Diese Bewegung entspricht jedoch lediglich einer gleichförmigen Translation des gesamten Systems und beeinflusst die Relativbewegung der beiden Körper nicht. Ob ein System gebunden ist oder nicht, wird daher allein durch die Energie der Relativbewegung bestimmt. Im Schwerpunktssystem verschwindet der erste Term, so dass $E_{\text{tot}} = E_{\text{rel}}$ gilt.

10.1.3 Bewegung für positive Energien und Fluchtgeschwindigkeit

Bisher haben wir gesehen, dass für negative Gesamtenergie elliptische, also gebundene Bahnen entstehen. Der Körper bleibt dabei dauerhaft im Gravitationsfeld gebunden. Wir betrachten nun den Fall positiver Gesamtenergie. In diesem Fall kann der Abstand der beiden Körper unbegrenzt wachsen; die Bahn ist nicht mehr geschlossen, sondern entspricht einer Hyperbel. Der Körper nähert sich dem Zentralobjekt nur einmal und entfernt sich anschließend wieder ins Unendliche.

Die minimale Geschwindigkeit, die ein Körper benötigt, um das Gravitationsfeld gerade noch verlassen zu können, erhält man im Grenzfall verschwindender Gesamtenergie, $E = 0$. In großem Abstand verschwindet sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie, sodass der Körper das Feld mit verschwindender Geschwindigkeit verlässt.

Betrachten wir den einfachsten Fall eines radialen Starts bei $r = r_0$, d. h. der Drehimpuls ist null $L = 0$. Dann vereinfacht sich die Gesamtenergie zu

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r}.$$

Setzt man $E = 0$ bei $r = r_0$, erhält man die minimale Startgeschwindigkeit

$$\dot{r}_0 = v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2\gamma m_1 m_2}{\mu r_0}}. \quad (10.24)$$

die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit. Ist die Anfangsgeschwindigkeit größer als diese, so besitzt der Körper positive Gesamtenergie und entkommt dem Gravitationsfeld mit endlicher Geschwindigkeit. Ist m_2 die Zentralmasse (z. B. Sonne) und m_1 ein Körper mit $m_1 \ll m_2$, so gilt $\mu \simeq m_1$ und $M \simeq m_2$. Damit wird (10.24) zu der bekannten Form

$$v_{\text{esc}} \simeq \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} \equiv v_2. \quad (10.25)$$

Die Fluchtgeschwindigkeit wird häufig auch als zweite kosmische Geschwindigkeit bezeichnet. Sie gibt die minimale Geschwindigkeit an, die ein Körper an der Oberfläche eines Himmelskörpers besitzen muss, um dessen Gravitationsfeld ohne weiteren Antrieb dauerhaft zu verlassen. Zum Vergleich bezeichnet man die minimale Geschwindigkeit, die für eine stabile Kreisbahn nahe der Oberfläche erforderlich ist, als erste kosmische Geschwindigkeit. Sie ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen Gravitationskraft und Zentripetalbeschleunigung zu

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2,$$

Die erste und zweite kosmische Geschwindigkeit unterscheiden sich also durch den Faktor $\sqrt{2}$.

10.1.4 Die Keplerschen Gesetze

Die bisherige Diskussion hat gezeigt, dass sich die Bewegung zweier Massen im Gravitationsfeld auf die Bewegung eines effektiven Teilchens im Potential $V(r) = -\gamma m_1 m_2 / r$ zurückführen lässt. Aus der Lösung der Bewegungsgleichung folgt unmittelbar die Form der möglichen Bahnen. Historisch wurden die folgenden Gesetzmäßigkeiten jedoch zunächst rein beobachtend gefunden und später durch Newtons Mechanik erklärt. Diese als keplersche Gesetze bekannten Regeln fassen die wesentlichen Eigenschaften der Planetenbewegung zusammen.

Erstes Keplersches Gesetz (Bahngesetz). Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Dieses Ergebnis folgt direkt aus der zuvor hergeleiteten Bahnform

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi},$$

die für $\epsilon < 1$ eine Ellipse beschreibt, wobei das Kraftzentrum im Brennpunkt liegt.

Zweites keplersches Gesetz (Flächensatz). Der Fahrstrahl vom Planeten zur Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Dieses Gesetz folgt unmittelbar aus der Drehimpulserhaltung. In einem kleinen Zeitintervall dt überstreicht der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ mit seiner Änderung $\vec{r}(t+dt)$ die Fläche

$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)| = \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times (\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t) dt) \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) \right| dt. \quad (10.26)$$

Dabei wurde verwendet, dass der Betrag eines Kreuzproduktes dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms entspricht. Damit folgt für die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right| = \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| = \text{const.} \quad (10.27)$$

Die Flächengeschwindigkeit ist also konstant. Der Planet bewegt sich daher in Sonnennähe schneller und in größerer Entfernung entsprechend langsamer.

Drittes keplersches Gesetz (Periodengesetz). Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten sind proportional zu den dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen, $T^2 \propto a^3$. Dieses Resultat folgt direkt aus dem zuvor hergeleiteten Flächensatz. Während einer vollständigen Umlaufzeit T wird die gesamte von der Bahn eingeschlossene Fläche einmal überstrichen. Für eine Ellipse beträgt diese Fläche

$$S = \pi ab, \quad (10.28)$$

wobei a und b die große bzw. kleine Halbachse bezeichnen. Da die Flächengeschwindigkeit konstant ist, gilt

$$S = \int_0^T \frac{dS}{dt} dt = \frac{|\vec{L}|}{2\mu} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\mu \pi ab}{|\vec{L}|}. \quad (10.29)$$

Zur weiteren Auswertung verwenden wir die bereits gefundene Beziehung zwischen den Ellipsenachsen und dem Bahnenparameter,

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{\mu\gamma m_1 m_2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a \frac{L^2}{\mu\gamma m_1 m_2}. \quad (10.30)$$

Einsetzen in (10.29) liefert schließlich

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3, \quad (10.31)$$

wobei im letzten Schritt $\mu = m_1 m_2 / M$ verwendet wurde. Das dritte Keplersche Gesetz zeigt, dass die Umlaufzeit nicht nur von der Größe der Bahn, sondern auch von der Gesamtmasse des Systems abhängt. Streng genommen beeinflussen also beide Massen die Umlaufzeit. In vielen astronomischen Anwendungen ist jedoch eine der beiden Massen – etwa die Sonne – sehr viel größer als die andere, sodass näherungsweise nur die Zentralmasse entscheidend ist. Gerade diese Beziehung erlaubt es, aus beobachtbaren Umlaufzeiten und Bahngrößen die Massen von Himmelskörpern zu bestimmen.

Kapitel 11

Warum können Teilchen von einem Potential gestreut werden?

- **Physikalisches Thema:** Zentralkraftstreuung, Rutherford-Streuung
- **Inhalte:** Zentralkraftstreuung, Rutherford-Streuung
- **Mathematik:** Polarkoordinaten, Linienintegrale

11.1 Streuung im Zentralpotential

In den vorherigen Abschnitten haben wir die Bewegung im Zentralpotential für verschiedene Energien untersucht. Während negative Gesamtenergie zu gebundenen elliptischen Bahnen führt, entsprechen positive Energien offenen Bahnen. Solche offenen Bahnen beschreiben physikalisch Streuprozesse: Ein Teilchen nähert sich aus großer Entfernung einem Kraftzentrum, wird durch das Potential abgelenkt und entfernt sich anschließend wieder.

11.1.1 Allgemeine Beschreibung eines Streuprozesses

Wir betrachten nun die Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential für positive Gesamtenergie. In diesem Fall ist die Bahn nicht mehr geschlossen; das Teilchen kommt aus großer Entfernung, wird durch das Potential abgelenkt und entfernt sich anschließend wieder. Man spricht von einem Streuprozess. Weit entfernt vom Streuzentrum ist das Potential vernachlässigbar klein, so dass die Bewegung dort näherungsweise geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt. Die Bahn nähert sich daher sowohl vor als auch nach der Wechselwirkung einer Geraden, den sogenannten Asymptoten der Bewegung.

Für positive Energien gilt $\epsilon > 1$ und die Bahn ist eine Hyperbel,

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi},$$

wobei der Ursprung stets im Kraftzentrum liegt. Dieses befindet sich unabhängig vom Wert der Exzentrizität in einem Brennpunkt der Bahnkurve. Wie bereits bei elliptischen Bahnen kann der Winkel so gewählt werden, dass der Punkt kleinsten Abstands vom Kraftzentrum bei $\varphi = 0$ liegt. Dieser Punkt entspricht dem Perihel im gebundenen Fall bzw. allgemein dem Punkt der nächsten Annäherung auch bei offenen Bahnen. Aus der Bahnform folgt unmittelbar, dass der

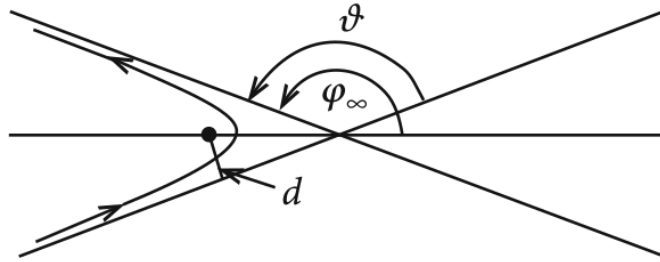


Abbildung 11.1: Streugeometrie im Zentralpotential: Bahn (hyperbolisch) mit einlaufender und auslaufender Asymptote. Der Stoßparameter d ist der senkrechte Abstand des Streuzentrums von der einlaufenden Asymptote. Der Streuwinkel ϑ ist der Winkel zwischen den beiden Asymptoten; φ_∞ bezeichnet den asymptotischen Winkel der Bahn. Sketch taken from [1]

Abstand minimal wird, wenn der Nenner maximal ist. Dies ist für $\cos \varphi = 1$, also bei $\varphi = 0$, der Fall. Die Wahl des Winkelursprungs ist somit rein geometrisch motiviert und bleibt sowohl für elliptische als auch für hyperbolische Bahnen sinnvoll.

Die Ablenkung durch das Potential wird durch den Streuwinkel ϑ beschrieben. Er ist definiert als der Winkel zwischen der Einflugrichtung und der Ausflugrichtung des Teilchens im Unendlichen. Die Asymptoten erhält man aus dem Grenzfall $r \rightarrow \infty$. Dann muss der Nenner verschwinden,

$$1 + \epsilon \cos \varphi_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\epsilon}. \quad (11.1)$$

Die Bahn nähert sich also für große Abstände Geraden in den Richtungen $\varphi = \pm\varphi_\infty$. Die Winkel $\pm\varphi_\infty$ beziehen sich auf die *Radialrichtung* (den Fahrstrahl vom Streuzentrum zum Teilchen). Geometrisch ergibt sich damit für den Streuwinkel der in der Abbildung 11.1 dargestellte Zusammenhang

$$\pi - \vartheta = 2(\pi - \varphi_\infty) \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 2\varphi_\infty - \pi. \quad (11.2)$$

Damit ist der Streuwinkel vollständig durch die Exzentrizität (und damit letztlich durch Energie und Drehimpuls) bestimmt.

Eine weitere wichtige Größe ist der Stoßparameter d . Er gibt den senkrechten Abstand der einlaufenden Geradenbewegung vom Streuzentrum an und bestimmt zusammen mit der Anfangsgeschwindigkeit die Stärke der Ablenkung. Wir wollen den Stoßparameter jetzt in Verbindung setzen zu den Erhaltungsgrößen des Systems. Für $r \rightarrow \infty$ verschwindet die potentielle Energie, sodass die Gesamtenergie E mit der kinetischen Energie im Unendlichen übereinstimmt:

$$E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2, \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}. \quad (11.3)$$

Im Unendlichen verläuft die Bahn näherungsweise geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v}_∞ . Wie uns bekannt ist, ist der Drehimpulsbetrag allgemein definiert als $L = \mu |\vec{r} \times \vec{v}|$. Der

Betrag des Kreuzproduktes ist $|\vec{r} \times \vec{v}| = rv \sin \alpha$, wobei α der Winkel zwischen \vec{r} und der Bewegungsrichtung ist. Für große Abstände wird dieser Winkel klein, d.h. \vec{r} und \vec{v} sind nahezu parallel (geradlinig Bewegung). Betrachtet man den Punkt der Asymptote, der dem Streuzentrum am nächsten liegt, so steht der Ortsvektor \vec{r} dort senkrecht auf der Bewegungsrichtung die sich ergeben würde wenn wir kein Potential hätten (also der Asymptoten entlang). In diesem Punkt gilt daher $\alpha = 90^\circ$ und $|\vec{r}| = d$. Wichtig ist, daß der Stoßparameter d die einlaufende Gerade beschreibt, nicht die tatsächliche Bahn. Für eine geradlinige Bewegung entlang der Geraden gilt: $d = r \sin \alpha = \text{const.}$, d.h. der Hebelarm bezüglich des Ursprungs ist konstant. Entlang der tatsächlichen Bahn ändern sich hingegen r , v und α , sodass nur die Drehimpulserhaltung gilt. Da der Drehimpuls erhalten ist, kann er insbesondere im Unendlichen bestimmt werden, wo die Bewegung einfach ist. Dort folgt

$$L = \mu |\vec{r} \times \vec{v}| = \mu r \sin \alpha v \xrightarrow{r \rightarrow \infty} L = \mu d v_\infty \quad (11.4)$$

Damit ist der Stoßparameter direkt mit der Drehimpulserhaltung verknüpft. Dieser Abstand ist somit der Hebelarm der Bewegung im Unendlichen. Verwendet man zusätzlich die Energieerhaltung, so gilt im Unendlichen woraus schließlich folgt

$$E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{\sqrt{2\mu E}}. \quad (11.5)$$

Damit ist ein Streuprozess im Zentralpotential vollständig durch die beiden Erhaltungsgrößen Energie und Drehimpuls charakterisiert. Die Energie legt die Geschwindigkeit des Teilchens im Unendlichen fest, während der Drehimpuls über den Stoßparameter den minimalen Abstand der Bahn vom Streuzentrum bestimmt. Die konkrete Ablenkung des Teilchens hängt jedoch von der Form des zugrunde liegenden Potentials ab. Unterschiedliche Potentiale führen zu unterschiedlichen Beziehungen zwischen Stoßparameter und Streuwinkel. Im folgenden Abschnitt betrachten wir einen besonders wichtigen Spezialfall, bei dem das Wechselwirkungspotential durch die Coulomb-Wechselwirkung gegeben ist. Dieser Fall spielt eine zentrale Rolle in der historischen Entwicklung der Atomphysik und liefert ein klassisches Beispiel für die Anwendung der zuvor entwickelten allgemeinen Streutheorie.

11.2 Rutherford-Streuung

11.2.1 Streuwinkel und Stossparameter

Ein historisch besonders wichtiges Beispiel für einen Streuprozess ist die Streuung geladener Teilchen am Coulombfeld eines Atomkerns. In den klassischen Experimenten von Rutherford wurden α -Teilchen auf dünne Metallfolien geschossen. Die beobachtete starke Ablenkung einzelner Teilchen zeigte, dass die positive Ladung und fast die gesamte Masse des Atoms in einem sehr kleinen Kern konzentriert sein müssen.

Zwischen dem einfallenden Teilchen mit Ladung $Z_1 e$ und dem Atomkern mit Ladung $Z_2 e$ wirkt das Coulombpotential

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (11.6)$$

Dabei bezeichnet ε_0 die elektrische Feldkonstante (Vakuumpermittivität), welche die Stärke der elektrischen Wechselwirkung im Vakuum festlegt. Da beide Ladungen positiv sind, wirkt eine abstoßende Kraft, sodass nur offene Bahnen auftreten und ein Streuprozess stattfindet.

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, bewegen sich Teilchen im $1/r$ -Potential auf Kegelschnitten. Für positive Gesamtenergie entstehen hyperbolische Bahnen mit Exzentrizität

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu\kappa^2}, \quad \kappa = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (11.7)$$

Der Streuwinkel ergibt sich aus der Geometrie der Hyperbel zu

$$\vartheta = 2\varphi_\infty - \pi, \quad \cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}. \quad (11.8)$$

Zur weiteren Auswertung betrachten wir den halben Streuwinkel $\vartheta/2$ und erhalten unter Verwendung der Identität $\tan(x - \pi/2) = -\cot x$ ($\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$):

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = -\cot \varphi_\infty = -\frac{\cos \varphi_\infty}{\sin \varphi_\infty} = \frac{1/\varepsilon}{\sqrt{1 - 1/\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{\kappa}{L} \sqrt{\frac{\mu}{2E}}, \quad (11.9)$$

wobei $\sin \varphi_\infty > 0$ gewählt wurde. Mit der zuvor hergeleiteten Beziehung zwischen Drehimpuls und Stoßparameter, $L = \mu d v_\infty$, die aus der asymptotischen geradlinigen Bewegung im Unendlichen folgt, kann der Drehimpuls durch die experimentell vorgegebenen Größen Stoßparameter und Anfangsenergie ausgedrückt werden. Unter Verwendung von

$$E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2 \quad (11.10)$$

ergibt sich schließlich

$$L = \sqrt{2\mu E} d. \quad (11.11)$$

Einsetzen in die zuvor erhaltene Beziehung für den Streuwinkel liefert die Rutherford-Streuformel

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{\kappa}{2Ed}. \quad (11.12)$$

Damit ist der Streuwinkel vollständig durch Stoßparameter und Anfangsenergie bestimmt: kleine Stoßparameter führen zu starker Ablenkung, große Stoßparameter zu nur geringer Richtungsänderung. Wir werden im folgenden den Stoßparameter mit $d = b$ verwenden da wir Ableitungen betrachten.

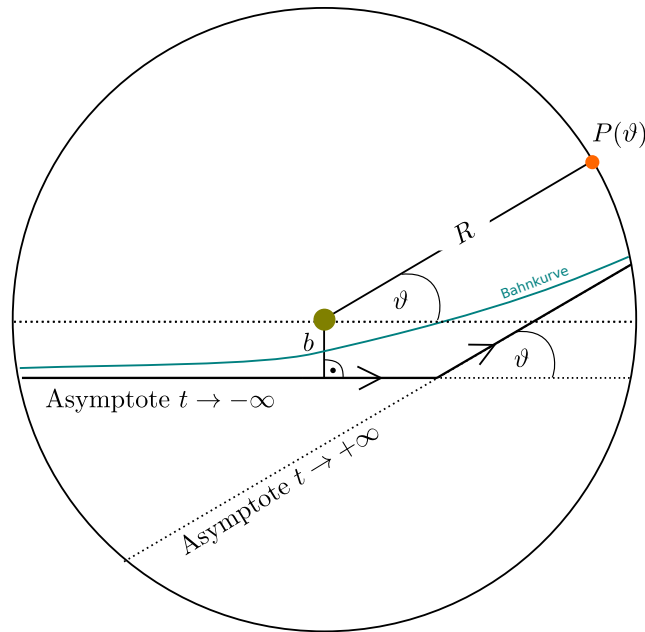


Abbildung 11.2: Streuprozess in zwei Dimensionen. Die Bahn nähert sich für große Abstände geradlinigen Asymptoten an; ihr Winkel bestimmt den Streuwinkel ϑ . Der Punkt $P(\vartheta)$ auf dem Detektorkreis repräsentiert die entsprechende Ausflugsrichtung.

11.2.2 Einfaches Beispiel: Streuung in zwei Dimensionen

Um die Geometrie eines Streuprozesses besser zu verstehen, betrachten wir zunächst ein vereinfachtes zweidimensionales Modell, in dem sich alle Teilchen in einer Ebene bewegen. Dieses Modell macht den Übergang zwischen Stoßparameter und beobachteter Streurichtung besonders anschaulich. Der einlaufende Teilchenstrahl sei entlang der x -Achse gerichtet, das Streuzentrum befinde sich im Ursprung. Ohne Wechselwirkung würden sich die Teilchen auf Geraden bewegen. Diese Geraden besitzen einen minimalen Abstand vom Ursprung, den wir schon als Stoßparameter b kennen gelernt haben.

Der Stoßparameter beschreibt somit die einlaufende Bewegung: Teilchen mit unterschiedlichen Werten von b passieren das Streuzentrum in unterschiedlichen Abständen ober- oder unterhalb des Ursprungs. Wirkt nun ein Potential, so wird die Bahn im Bereich des Streuzentrums gekrümmt. Für große Abstände wird die Kraft jedoch vernachlässigbar, sodass sich die Bahn wieder einer Geraden annähert, d.h. den Asymptoten. Der Streuwinkel ϑ ist der Winkel zwischen diesen beiden asymptotischen Geraden. Die beobachtbare Größe wird schlussendlich somit nicht die tatsächliche Bahn, sondern die asymptotische Ausflugsrichtung des Teilchens.

Zur Beschreibung möglicher Ausflugsrichtungen betrachtet man einen Kreis mit Radius R um das Streuzentrum. Jede Bewegungsrichtung schneidet diesen Kreis in genau einem Punkt. Der Kreis dient somit lediglich als geometrisches Hilfsmittel zur Beschreibung von Richtungen. Die auslaufende Asymptote der Bewegung verläuft im Allgemeinen nicht durch das Streuzentrum. Für die Beschreibung der Ausflugsrichtung ist jedoch nur ihre Orientierung entscheidend. Man kann die Gerade daher parallel durch das Streuzentrum verschieben. Die verschobene Gerade

schneidet einen Kreis um das Streuzentrum im Punkt

$$P(\vartheta) = (R \cos \vartheta, R \sin \vartheta), \quad (11.13)$$

der die Ausflugrichtung eindeutig festlegt. Diese Gleichung ist die bekannte Parametrisierung eines Kreises in kartesischen Koordinaten. Der Punkt $P(\vartheta)$ wird also nicht von der realen Bahn getroffen, sondern von der auslaufenden Asymptote, die zur Bestimmung der Richtung parallel durch den Ursprung gelegt wird. Der Kreis misst somit lediglich die Richtung der Bewegung.

In einem realen Streuexperiment werden Detektoren in großem Abstand vom Streuzentrum positioniert und messen die Anzahl der Teilchen, die aus einer bestimmten Richtung eintreffen. Entscheidend ist daher nicht die genaue Position der Bahn, sondern lediglich die asymptotische Ausflugrichtung der Teilchen. Stossparameter sind in der Größenordnung von 10^{-10}m , d.h. Abweichungen durch die Verschiebung der Asymptoten in den Ursprung sind experimentell nicht auflösbar. D.h. die in Abbildung 11.2 dargestellte Distanz von Asymptote und Punkt $P(\vartheta)$ ist überzeichnet dargestellt, im realen Experiment läuft die Asymptote effektiv durch den Punkt $P(\vartheta)$.

Teilchen mit Stoßparametern zwischen b und $b + db$ stammen aus einem schmalen Streifen der Breite db im einlaufenden Strahl. In zwei Dimensionen werden diese Teilchen nach der Streuung in einem Winkelintervall zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ beobachtet, was einem kleinen Kreisbogen auf dem Detektorkreis entspricht. Man vergleicht daher die Breite des einlaufenden Streifens mit dem Winkelintervall, in das die Teilchen gestreut werden, und erhält für den zweidimensionalen differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{2D}}{d\vartheta} = \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| = \frac{\kappa}{2E} \left| \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{\tan \frac{\vartheta}{2}} \right| = \frac{\kappa}{2E} \left| \frac{d \cos \frac{\vartheta}{2}}{d\vartheta \sin \frac{\vartheta}{2}} \right| = \frac{\kappa}{4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (11.14)$$

Damit wird deutlich, dass in zwei Dimensionen ein Winkelintervall direkt einem Längenelement auf dem Detektorkreis entspricht. Im dreidimensionalen Fall tritt an die Stelle dieses Bogenelements ein Flächenelement auf einer Kugeloberfläche, woraus schließlich der Begriff des Raumwinkels entsteht.

11.2.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt

Im zuvor diskutierten zweidimensionalen Modell konnten wir die Streuung beschreiben, indem wir gezählt haben, wie viele Teilchen in ein bestimmtes Winkelintervall $d\vartheta$ gestreut werden. In realen Experimenten bewegen sich die Teilchen jedoch im dreidimensionalen Raum. Nach der Streuung verteilen sie sich daher nicht entlang eines Kreises von Richtungen, sondern über alle Raumrichtungen. Experimentell misst man daher nicht Teilchenzahlen pro Winkelintervall, sondern zählt, wie viele Teilchen in einen bestimmten Raumwinkelbereich $d\Omega$ gestreut werden. Zur Beschreibung solcher Messungen nutzt man den dreidimensionalen *Wirkungsquerschnitt*. Man betrachte einen einfallenden Teilchenstrom, der auf ein Streuzentrum trifft. Wichtig ist es viele Teilchen mit einem festen Stossparameter b gibt, alle Bahnen mit Stoßparameter b bilden einen Kreis um die Strahlachse. Alle Teilchen mit Stoßparametern zwischen b und $b + db$ werden in einen Winkelbereich zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ gestreut. Vor der Streuung bewegen sich die Teilchen nahezu geradlinig auf das Streuzentrum zu. Es ist daher natürlich, die Anzahl

der einlaufenden Teilchen über eine Fläche senkrecht zur Strahlrichtung zu beschreiben. Die zugehörige Fläche im einlaufenden Strahl entspricht einem Ring mit Radius b und Breite db ,

$$dA = 2\pi(b + db)^2 - 2\pi b^2 \approx 2\pi b db, \quad (11.15)$$

wobei wir hier angenommen haben das db sehr klein ist und wir db^2 vernachlässigen können. Nach der Streuung bewegen sich die Teilchen jedoch nicht mehr parallel, sondern fliegen in unterschiedliche Richtungen auseinander. Daher ist es nicht mehr sinnvoll, eine Fläche zu betrachten; stattdessen beschreibt man, in welche Richtungen die Teilchen gestreut werden. Zur Beschreibung der möglichen Richtungen betrachtet man eine Kugel mit Radius R um das Streuzentrum. Alle Teilchen mit gleichem Streuwinkel ϑ treffen die Kugel entlang eines Kreises mit Radius $R \sin \vartheta$. Teilchen mit Streuwinkeln zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ treffen die Kugel in einem schmalen Streifen der Breite $R d\vartheta$. Geometrisch können wir dies als Mantelfläche eines Kugelschnittes sehen. Die zwei Schnittebenen bei ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegen entlang der Achse bei $z = R \cos \vartheta$ und $z = R \cos(\vartheta + d\vartheta)$. Damit ergibt sich die Höhe der Kugelschicht zu

$$h = R \cos \vartheta - R \cos(\vartheta + d\vartheta). \quad (11.16)$$

Zur Näherung verwendeten wir die Taylorentwicklung einer Funktion $f(x)$ um die Stelle x :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (11.17)$$

Mit $f(\vartheta) = \cos \vartheta$ folgt

$$\cos(\vartheta + d\vartheta) \approx \cos \vartheta - \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.18)$$

Damit ergibt sich für die Höhe der Kugelschicht

$$h = R \cos \vartheta - R \cos(\vartheta + d\vartheta) \approx R \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.19)$$

Die zugehörige Fläche ist somit

$$dS = 2\pi R h = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.20)$$

Der Raumwinkel ist das dreidimensionale Gegenstück zum in der Ebene definierten Winkel. Er beschreibt den Anteil des Raumes, der beispielsweise im Inneren eines Kegels liegt. Anschaulich wird er bestimmt, indem man eine Kugel mit Radius R um den Scheitelpunkt des Kegels betrachtet. Der Raumwinkel ist dann definiert als der Flächeninhalt des entsprechenden Ausschnitts der Kugeloberfläche, dividiert durch das Quadrat des Kugelradius, d.h. wir für unsern Ring auf der Kugel erhalten wir das Raumwinkelement

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.21)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt vergleicht die Fläche, aus der die Teilchen ursprünglich kamen, mit dem Raumwinkelbereich, in den sie gestreut werden:

$$\frac{d\sigma_{3D}}{d\Omega} = \frac{dA}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right|. \quad (11.22)$$

Der Betrag ist notwendig, da der Stoßparameter mit wachsendem Streuwinkel abnimmt, der Wirkungsquerschnitt jedoch stets positiv sein muss. Damit reduziert sich die Bestimmung des

Wirkungsquerschnitts auf die Kenntnis der Beziehung zwischen Stoßparameter und Streuwinkel. Experimentell misst man die Anzahl der Teilchen, die pro Zeit in einen Raumwinkelbereich $d\Omega$ gestreut werden. Kennt man zusätzlich die einlaufende Teilchenstromdichte j , so ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt aus

$$\frac{d\sigma_{3D}}{d\Omega} = \frac{1}{j} \frac{dN}{d\Omega}. \quad (11.23)$$

Der Wirkungsquerschnitt beschreibt somit die effektive Fläche, aus der Teilchen in einen bestimmten Raumwinkel gestreut werden.

Für das Coulombpotential in der Rutherford Streuung haben wir zuvor gefunden

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{\kappa}{2Eb} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\kappa}{2E} \cot \frac{\vartheta}{2}. \quad (11.24)$$

Ableiten liefert

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{\kappa}{2E} \frac{d}{d\vartheta} \left(\cot \frac{\vartheta}{2} \right) = -\frac{\kappa}{4E} \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)}. \quad (11.25)$$

Einsetzen in die allgemeine Formel ergibt schließlich (mit $\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$)

$$\frac{d\sigma_{3D}}{d\Omega} = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{\kappa}{2E} \cot \frac{\vartheta}{2} \right) \left(\frac{\kappa}{4E} \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} \right) = \frac{\kappa^2}{8E^2} \frac{\cot(\vartheta/2)}{\sin \vartheta \sin^2(\vartheta/2)} \quad (11.26)$$

$$= \frac{\kappa^2}{8E^2} \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)} \frac{1}{(2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)) \sin^2(\vartheta/2)} \quad (11.27)$$

$$= \left(\frac{\kappa}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}. \quad (11.28)$$

Dies ist die Rutherford-Streuformel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Sie zeigt insbesondere, dass kleine Streuwinkel sehr wahrscheinlich sind, während große Ablenkungen deutlich seltener auftreten.

Die Rutherford-Formel zeigt mehrere charakteristische Eigenschaften des Streuprozesses. Zunächst erkennt man, dass kleine Streuwinkel besonders häufig auftreten. Für kleine Winkel gilt näherungsweise $\sin(\vartheta/2) \approx \vartheta/2$, sodass der Wirkungsquerschnitt stark anwächst:

$$\frac{d\sigma_{3D}}{d\Omega} \propto \frac{1}{\vartheta^4}. \quad (11.29)$$

Physikalisch bedeutet dies, dass die meisten Teilchen das Streuzentrum nur in großem Abstand passieren und daher nur schwach abgelenkt werden. Große Streuwinkel treten dagegen nur dann auf, wenn das Teilchen sehr nahe am Kern vorbeifliegt. Solche Ereignisse entsprechen kleinen Stoßparametern und sind daher wesentlich seltener.

Schließlich wächst der Wirkungsquerschnitt mit dem Quadrat der beteiligten Ladungen. Kerne mit größerer Ladung führen daher zu stärkerer Ablenkung der Teilchen. Gerade die Beobachtung einzelner stark abgelenkter Teilchen im Rutherford-Experiment zeigte, dass die positive Ladung des Atoms in einem sehr kleinen Raumbereich konzentriert sein muss, da nur so große Ablenkung erklärt werden können.

References

- [1] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik: 1 Klassische Mechanik und mathematische Vorbereitungen*. Springer, 2018.