Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian

Blatt 2

27. 10. 2000

Abgabe: Mittwoch, 25. 10. bis 10:30

1. Integrationsmethoden (5 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen und ihre Ableitungen wurden in der Präsenzübung eingeführt. Verifizieren Sie auf verschiedene Arten, daß

$$\int dx \, \cosh^2 x = \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x) \tag{1}$$

(a) durch Differenzieren der rechten Seite,

(b) durch Integration der linken Seite nach Einsetzen der Definition von $\cosh x$,

(c) durch partielle Integration der linken Seite und Verwendung der Formel

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

2. Bahnkurve II (5 Punkte)

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Bahnkurve

$$x(t) = ct,$$
$$y(t) = r \sin \omega t$$

mit konstanten Parametern c, r und ω. Bestimmen Sie

(a) die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$,

(b) den Betrag der Geschwindigkeit $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$,

(c) die Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$,

(d) den Betrag der Beschleunigung $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$.

(e) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

3. Bahnkurve III (6 Punkte)

Wie die vorige Aufgabe, jedoch für die Bahnkurve

$$x(t) = r(t) \, \sin \omega t,$$
$$y(t) = r(t) \, \cos \omega t$$

mit

$$r(t) = ct,$$

wobei c und ω konstant sind.

4. Integral (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Integration, daß

$$\int dx\,\sqrt{ax^2+2bx+c} = \frac{ac-b^2}{2a^{3/2}}\,\mathrm{Arsinh}\,\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c}, \tag{2}$$

falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$.

Möglicher Lösungsweg:

(a) Finden Sie eine Substitution der Form $y = x - x_0$, so daß

$$ax^2 + 2bx + c = a(y^2 + y_0^2)$$

Hier sind die Konstanten x_0 und y_0 zu bestimmen.

(b) Das resultierende Integral läßt sich mit Hilfe der Substitution $y = y_0 \sinh\phi$ auf das Integral Gl. (1) zurückführen.

(c) Durch Einsetzen von $\cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}$ erhält man die gewünschte Lösung.