
Abgabe: **Donnerstag**, 2. 11. bis 10:30 (wegen des Feiertags)

1. Ameisenspaziergang (5 Punkte)

Zwischen zwei Bäumen hängt ein schweres, biegeweiches Seil, das die Biegelinie $y(x) = \cosh x$ ausgebildet hat. An diesem Seil krabbelt eine Ameise von der Stelle $x = a$ bis zur Stelle $x = b$.

- (a) Welche Entfernung legt die Ameise zurück? (1 Punkt)
- (b) Wie lautet die Bahnkurve der Ameise als Funktion der Bogenlänge? (2 Punkte)
- (c) Zeigen Sie explizit, dass auch in diesem Beispiel die Ableitung der Bahnkurve nach der Bogenlänge zu jedem Zeitpunkt ein Einheitsvektor ist. (2 Punkte)

2. Wir planen eine Achterbahn (15 Punkte)

Für den Bau einer Achterbahn steht ein Grundstück von netto $x_{\text{tot}} = 20m$ Breite und $y_{\text{tot}} = 40m$ Länge zur Verfügung. Die Vorschriften erlauben eine Montage der Schienen in bis zu $z_{\text{max}} = 10m$ Höhe.

Zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T$ befinde sich der Wagen in der Mitte des Grundstücks im Ursprung des Koordinatensystems und bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 in x -Richtung. Der Betrag der Beschleunigung a_0 sei konstant. Während des ersten und letzten Viertels der Periodendauer T betrage die vertikale Komponente der Beschleunigung a_v nach oben, dazwischen erfolge eine ebensolche Beschleunigung nach unten. Die Richtung des horizontalen Anteils \mathbf{a}_h der Beschleunigung bilde mit der y -Achse in der ersten Hälfte der Periodendauer einen Winkel $\phi(t) = 4\pi t/T$. In der 2. Hälfte habe die y -Komponente der Beschleunigung das umgekehrte Vorzeichen.

- (a) Geben Sie den Vektor der Beschleunigung als Funktion der Zeit an. Verwenden Sie a_v , a_h und $\omega = 4\pi/T$ als Parameter. (1 Punkt)
- (b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor als Funktion der Zeit. Verwenden Sie v_0 , a_v , a_h und ω als Parameter. (3 Punkte)
- (c) Geben Sie die Bahnkurve als Funktion der Zeit an. Verwenden Sie zunächst v_0 , a_v , a_h und ω als Parameter. (3 Punkte)
- (d) Nutzen Sie die Randbedingungen, das Grundstück und die Vorschriften voll aus, um die Größen a_v , a_h und v_0 durch z_{max} , x_{tot} und T bzw. ω auszudrücken. (3 Punkte)
- (e) Skizzieren Sie die Achterbahn in der Draufsicht (Blickrichtung entgegen der z -Achse) und in der Seitenansicht (Blickrichtung entlang der x -Achse). (2 Punkte)
- (f) Berechnen Sie die Gesamtlänge der benötigten Schienen. Geben Sie den analytischen Ausdruck und den Zahlenwert an. (Hinweis: Es reicht, die Länge des ersten Viertels der Bahn zu berechnen und das Ergebnis zu vervierfachen.) (3 Punkte)