Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **Blatt 4** 10. 11. 2000

Abgabe: Mittwoch, 8. 11. bis 10:30

1. Archimedische Spirale (2 Punkte)

Berechnen Sie für die Bahnkurve

$$\begin{aligned} x(t) &= ct\,\sin\omega t, \\ y(t) &= ct\,\cos\omega t \end{aligned}$$

(vgl. Blatt 2, Aufgabe 3) die Bogenlänge $L(t)$ als Funktion der Zeit t, gemessen ab $t = 0$.

Hinweis: Das Integral ist ein Spezialfall von Blatt 2, Aufgabe 4.

2. Abrollkurve (7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ eines Punktes P, der im Abstand a von der Drehachse mit einem auf der Straße ($y = 0$) rollenden Rad mit Radius R fest verbunden ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Drehachse bei $x = 0$ und der Punkt P genau darunter. Die Geschwindigkeit des Radmittelpunkts sei konstant gleich $\mathbf{v}_M = (v, 0)$.

(b) Zeigen Sie: Falls $a = R$ ist, gibt es Zeitpunkte t_n, bei denen die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ des Punktes P verschwindet, die Steigung dy/dx der Bahnkurve aber unendlich ist.
Hinweis: $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$. Falls $\lim_{t\to t_n} \frac{f(t)}{g(t)}$ einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ergibt, so ist $\lim_{t\to t_n} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to t_n} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ (Regel von L'Hôpital).

(c) Skizzieren Sie die Bahnkurve

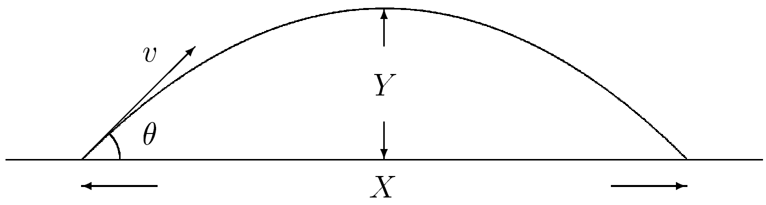
(i) für $a < R$;

(ii) für $a = R$;

(iii) für $a > R$.

3. Schiefer Wurf (11 Punkte)

Eine Kanone schießt mit einem Anstellwinkel θ:



(a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ der Kugel. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Kugel am Ort $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$, der Betrag der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}(0)| = v$ und der Anstellwinkel θ. Die Beschleunigung sei konstant $\mathbf{a} = (0, -g)$.

Hinweis: $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ ist vorgegeben; durch Integration erhalten Sie zunächst $\mathbf{v}(t)$ und dann $\mathbf{r}(t)$. Die jeweiligen Integrationskonstanten sind durch die Vorgabe von $\mathbf{v}(0)$ und $\mathbf{r}(0)$ festgelegt.

(b) Berechnen Sie den Zeitpunkt T und den Abstand X, bei dem die Kugel wieder am Boden auftrifft.

(c) Berechnen Sie die Höhe Y am Scheitelpunkt der Bahn.

(d) Bei welchem Winkel θ wird der Abstand X maximal, falls v und g fest vorgegeben sind?

Hinweis: $2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$

(e) Zeigen Sie: Die bis zum Zeitpunkt T zurückgelegte Bogenlänge L auf der Bahn ist gegeben durch

$$L = \frac{v^2}{g} \left[\cos^2\theta \, \operatorname{Arsinh}(\tan\theta) + \sin\theta \right].$$

Hinweis: Das Integral ist ebenfalls eine Anwendung von Blatt 2, Aufgabe 4.

(f) Verifizieren Sie anhand des Ausdrucks für L, daß für kleine Winkel $\theta \approx 0$ die Bogenlänge L annähernd gleich X ist, während für den Winkel $\theta = \pi/2$ gerade der Weg $L = 2Y$ zurückgelegt wird.

Hinweis: Für $\theta \approx 0$ können Sie näherungsweise $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \theta$ und $\operatorname{Arsinh}\theta = \theta$ setzen. Im Grenzfall $\theta \to \pi/2$ gilt

$$\lim_{\theta \to \pi/2} \cos^2\theta \, \operatorname{Arsinh}(\tan\theta) = 0$$

(warum?).