

Lösungsvorschläge

1. Archimedische Spirale (2 Punkte)

Die Geschwindigkeit ist

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} c \sin \omega t + c \omega t \cos \omega t \\ c \cos \omega t - c \omega t \sin \omega t \end{pmatrix}$$

und die Bogenlänge

$$L(t) = \int dt \sqrt{\mathbf{v}(t)^2} = c \int dt \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

Dies ist das Integral von Blatt 2, Aufgabe 4 mit $a = \omega^2$, $b = 0$ und $c = 1$. Damit ist $ac - b^2 = \omega^2$ und

$$L(t) = \frac{c}{2\omega} \operatorname{Arsinh} \omega t + \frac{ct}{2} \sqrt{1 + \omega^2 t^2}.$$

2. Abrollkurve (7 Punkte)

(a) Die Bahnkurve ist eine der gleichförmigen Bewegung überlagerte Rotation, also

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_M t + \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \sin \omega t \\ -a \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Hier ist das Vorzeichen durch die Drehrichtung bestimmt (im Uhrzeigersinn bei Bewegung nach rechts). ω ergibt sich aus der Bedingung, daß das Rad rollen soll: Bei einem vollen Umlauf (Umlaufzeit $T = 2\pi/\omega$) wird die Wegstrecke $vT = 2\pi R$ zurückgelegt. Daraus folgt $\omega = v/R$. Zusammengefaßt:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin \frac{v}{R} t + vt \\ -a \cos \frac{v}{R} t + R \end{pmatrix}.$$

(b) Die Geschwindigkeit ist für $a = R$

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v(1 - \cos \frac{v}{R} t) \\ v \sin \frac{v}{R} t \end{pmatrix}$$

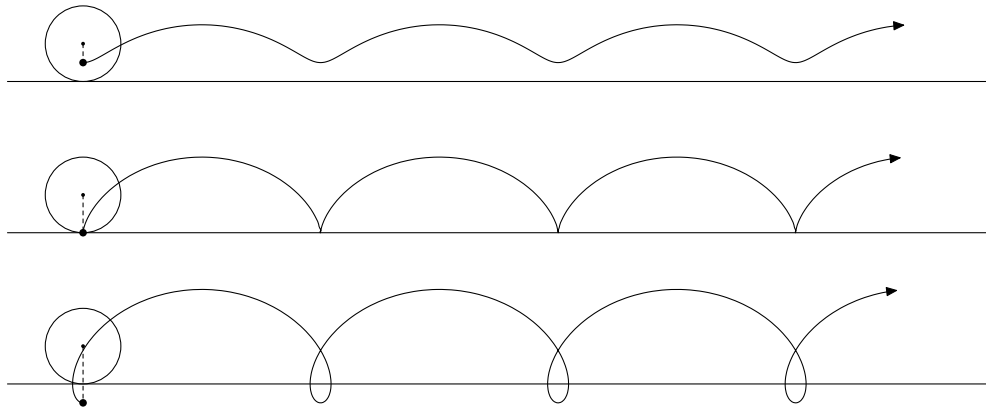
Für $t_n = 2n\pi R/v$ verschwinden beide Komponenten ($\sin = 0$ und $\cos = 1$). Die Steigung der Bahnkurve ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin \frac{v}{R}t}{1 - \cos \frac{v}{R}t}$$

und ist an diesen Punkten zunächst unbestimmt. Nach L'Hôpital gilt dann

$$\lim_{t \rightarrow t_n} \frac{\sin \frac{v}{R}t}{1 - \cos \frac{v}{R}t} = \lim_{t \rightarrow t_n} \frac{\frac{v}{R} \cos \frac{v}{R}t}{\frac{v}{R} \sin \frac{v}{R}t} = \infty.$$

(c) Skizzen für $a < R$, $a = R$ und $a > R$:



3. Schiefer Wurf (11 Punkte)

(a) Aus $\mathbf{a}(t) \equiv (0, -g)$ erhalten wir durch Integration nach der Zeit

$$\mathbf{v}(t) = (0, -gt) + \mathbf{v}_0.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $|\mathbf{v}| = v$ und $v_y/v_x = \tan \theta$, also

$$\mathbf{v}_0 = (v \cos \theta, v \sin \theta).$$

Eine weitere Integration nach der Zeit ergibt

$$\mathbf{r}(t) = (0, -gt^2/2) + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0,$$

und aus $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ schließt man

$$\mathbf{r}(t) = (vt \cos \theta, vt \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2). \quad (1)$$

(b) Die Kugel trifft am Boden auf, wenn $y(t) = 0$ ist und $t \neq 0$, also

$$0 = y(T) = vT \sin \theta - \frac{1}{2}gT^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2v \sin \theta}{g}.$$

Durch Einsetzen in (1) erhalten wir

$$X = x(T) = vT \cos \theta = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta.$$

- (c) Die maximale Höhe wird erreicht, wenn $\dot{y} = 0$ ist, d.h. $v \sin \theta = gt$ oder $t = v \sin \theta / g = T/2$. Also ist

$$Y = y(T/2) = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (2)$$

- (d) $\sin 2\theta$ ist maximal bei $2\theta = \pi/2 = 90^\circ$, also ist X maximal bei $\theta = \pi/4 = 45^\circ$.

- (e)

$$L(t) = \int dt \sqrt{\mathbf{v}(t)^2} = \int dt \sqrt{g^2 t^2 - 2gv \sin \theta t + v^2}$$

Dies ist das Integral von Blatt 2, Aufgabe 4 mit $a = g^2$, $b = -gv \sin \theta$ und $c = v^2$. Es gilt

$$ac - b^2 = g^2 v^2 \cos^2 \theta$$

und damit

$$L(t) = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{2g} \operatorname{Arsinh} \frac{gt - v \sin \theta}{v \cos \theta} + \frac{gt - v \sin \theta}{2g} \sqrt{g^2 t^2 - 2gv \sin \theta t + v^2}$$

Einsetzen ergibt

$$L(T) = -L(0) = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{2g} \operatorname{Arsinh} \tan \theta + \frac{v^2}{2g} \sin \theta$$

und damit

$$L = L(T) - L(0) = \frac{v^2}{g} (\cos^2 \theta \operatorname{Arsinh} \tan \theta + \sin \theta)$$

- (f) Für kleine Winkel gilt

$$L \approx \frac{v^2}{g}(\theta + \theta) \approx X,$$

dagegen für $\theta = \pi/2$:

$$L = \frac{v^2}{g}(0 + 1) = 2Y.$$

Für den Term mit dem Arsinh gilt nämlich in der Nähe von $\theta = \pi/2$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \operatorname{Arsinh} \tan \theta &= \cos^2 \theta \ln(\tan \theta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta}) = \cos^2 \theta \ln \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} \\ &\rightarrow -\cos^2 \theta \ln \cos \theta \end{aligned}$$

Setze $\phi = \pi/2 - \theta$ und verwende L'Hôpital für $\phi \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \dots &= -\sin^2 \phi \ln \sin \phi \\ &\rightarrow -\phi^2 \ln \phi = -\frac{\ln \phi}{1/\phi^2} \rightarrow -\frac{1/\phi}{-2/\phi^3} = 2\phi^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$