

Abgabe: Mittwoch, 15. 11. bis 10:30

1. Drehmatrizen (8 Punkte)

Welche der folgenden Matrizen sind Drehmatrizen (mit Begründung)? Geben Sie, wo möglich, den Drehwinkel an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**2. Skalarprodukt und Drehungen** (4 Punkte)

Eine Drehung wirkt auf einen zweikomponentigen Vektor  $\mathbf{r}$  wie

$$\mathbf{r}' = D\mathbf{r},$$

wobei  $D$  die der Drehung zugeordnete  $2 \times 2$ -Matrix ist. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Relation:

- (a) Das Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  zwischen zwei beliebigen Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  bleibt erhalten, wenn man beide Vektoren um den Winkel  $\theta$  dreht.
- (b) Der Winkel  $\gamma$  zwischen zwei beliebigen Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  bleibt erhalten, wenn man beide Vektoren um den Winkel  $\theta$  dreht.

**3. Drehung im  $\mathbb{R}^3$**  (8 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie:  $D$  ist eine Drehmatrix.
- (b) Bestimmen Sie die Drehachse.  
Hinweis: Die Drehachse  $\mathbf{a}$  bleibt bei der Drehung ungeändert:  $\mathbf{a} = D\mathbf{a}$ . Aus dieser Bedingung können Sie  $\mathbf{a}$  bestimmen.
- (c) Geben Sie ein Verfahren an, um den Drehwinkel zu bestimmen. (Sie brauchen den Winkel nicht auszurechnen.)