

Lösungsvorschläge

1. Drehmatrizen (8 Punkte)

Eine Drehmatrix D liegt vor, wenn $DD^t = \mathbf{1}$ und $\det D = +1$ ist. Dies kann man durch Nachrechnen überprüfen.

(a) Dies ist eine Drehmatrix. Aus

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

liest man $\theta = \pi/2$ ab.

(b) Keine Drehmatrix, da $\det D = -1$.

(c) Keine Drehmatrix: Die Zeilen (Spalten) sind nicht auf 1 normiert.

(d) Dies ist eine Drehmatrix mit Drehwinkel $\pi/6 = 30^\circ$.

(e) Dies ist eine Drehmatrix (Drehung um die z -Achse) mit Drehwinkel $\pi = 180^\circ$.

2. Skalarprodukt und Drehungen (4 Punkte)

(a)

$$D\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \theta a_1 - \sin \theta a_2 \\ \sin \theta a_1 + \cos \theta a_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos \theta b_1 - \sin \theta b_2 \\ \sin \theta b_1 + \cos \theta b_2 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned} (D\mathbf{a}) \cdot (D\mathbf{b}) &= (a_1 b_1 + a_2 b_2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)(-\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

(b)

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}}$$

Es gilt (s.o.) $(D\mathbf{a}) \cdot (D\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, also auch $(D\mathbf{a}) \cdot (D\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. D.h. die Länge von Vektoren bleibt ebenfalls erhalten, damit auch $\cos \gamma$.

3. Drehung im $\mathbb{R}^3$ (8 Punkte)

(a) Durch Nachrechnen zeigt man wieder: $DD^t = \mathbf{1}$ und $\det D = +1$. Dabei ist evtl. zu beachten, daß für eine 3×3 -Matrix A gilt: $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det A$.

(b) Es gilt

$$(D - \mathbf{1})\mathbf{a} = 0,$$

also

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-2 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem. Addition der ersten zwei Zeilen ergibt

$$-a_2 + a_3 = 0,$$

während die dritte Zeile auf

$$-a_1 + (1 - \sqrt{2})a_3 = 0$$

führt. Mit der Wahl $a_3 = 1$ erhält man

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

wobei die Normierung unbestimmt ist.

(c) Lösungsmöglichkeit: Man wähle einen Vektor $\mathbf{b}$, der orthogonal auf $\mathbf{a}$ steht und normiert ist, und berechne $\mathbf{b}' = D\mathbf{b}$. Dann ist der Drehwinkel θ durch $\cos \theta = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}$ gegeben.

Im vorliegenden Fall kann man z.B.

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen. Dann ist

$$\mathbf{b}' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

also $\cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' = (2\sqrt{2} - 1)/4$. Daraus ergibt sich $\theta = 1.09606 = 62.8^\circ$.