

Lösungsvorschläge

1. Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (6 Punkte)

(a)

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\cos \beta \sin \alpha & \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}$$

(b) (i) Z.B. zweite Zeile: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

(ii) Z.B. erste und zweite Zeile: $\cos \beta (\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) = 0$.

(c) Im allgemeinen erhält man bei anderer Reihenfolge der Drehungen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

was offensichtlich nicht das gleiche Resultat wie oben ist. (Ein Beispiel mit speziellen Winkeln würde auch genügen.)

2. Bezugssysteme (6 Punkte)

(a) $\mathbf{r}(t) = a\mathbf{e}_1 + (bt - c)\mathbf{e}_3$

(b) $\mathbf{r}(t) = -a\mathbf{e}_1 - bt\mathbf{e}_3$

(c) $\mathbf{r}(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + bt\mathbf{e}_3$

(d) $\mathbf{r}(t) = (a - vt)\mathbf{e}_1 + bt\mathbf{e}_3$

(e) $\mathbf{r}(t) = a(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$

(f) $\mathbf{r}(t) = (a - ct^2/2)\mathbf{e}_1 + (bt - ct^2/2)\mathbf{e}_3$

3. Inertialsysteme (8 Punkte)

(a) Die Transformation ist eine Verschiebung um $\mathbf{c}$ und eine gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad \text{in } \mathcal{B}$$

(b) Wir benötigen zunächst eine Drehung D_z um die z -Achse, so daß

$$D_z^{-1} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ 0 \\ a'_3 \end{pmatrix}$$

gilt. Sicher ist $a'_3 = a_3$. Da die Länge von $\mathbf{a}$ erhalten bleibt, gilt

$$a'_1 = \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Wir wählen das positive Vorzeichen. Schließlich folgt aus

$$-a_1 \sin \phi + a_2 \cos \phi = 0$$

(zweite Zeile der Matrix) $\tan \phi = a_2/a_1$, also¹

$$\cos \phi = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \text{und} \quad \sin \phi = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad (1)$$

Die nachfolgende Drehung D_y um die y -Achse ergibt sich analog:

$$D_y^{-1} \mathbf{a}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ 0 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a''_3 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$a''_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{und} \quad \tan \theta = \frac{a'_1}{a'_3} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_3},$$

also

$$\cos \theta = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad \text{und} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \quad (2)$$

Einsetzen und Matrixmultiplikation ergibt

$$D^{-1} = D_y^{-1} D_z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} & \frac{a_2 a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} & -\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\ -\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} & \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} & 0 \\ \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} & \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} & \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse D ist, wie bei jeder Drehmatrix, gleich der Transponierten $(D^{-1})^t$. Die Bahnkurve lautet

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \mathbf{e}_3 \quad \text{in } \mathcal{C}.$$

¹Hier hat sich eine Ungenauigkeit in das Aufgabenblatt eingeschlichen: Streng genommen gelten die Formeln für $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ nur, falls $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ positiv sind. In den Formeln (1) und (2) hebt sich das Vorzeichen aber jeweils wieder heraus.