Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **Blatt 7** 1. 12. 2000

Lösungsvorschläge

1. Approximation (3 Punkte)

Die Taylorreihe ist

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \cdots \\
\sin\frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^3}{1296} + \frac{\pi^5}{933120} \mp \cdots \\
&= 0.52359878 - 0.02392460 + 0.00032795 \mp \cdots
\end{aligned}$$

Exakt: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Die numerische Abweichung ist also

$$0.02359878,\ -0.00032582,\ 0.00000213, \ldots$$

2. Taylorreihen (4 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin x}{1+x} & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{\cos x}{1+x} - \frac{\sin x}{(1+x)^2} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{\sin x}{1+x} - 2\frac{\cos x}{(1+x)^2} + 2\frac{\sin x}{(1+x)^3} & f''(0) &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f(x) &= 0\cdot 1 + 1\cdot x - 2\cdot\frac{x^2}{2} \pm \cdots \\
&= x - x^2 \pm \cdots
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\frac{1-x^2}{1+x^2} & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{-2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{-4x}{1-x^4} & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= \frac{-4}{1-x^4} - \frac{16x^4}{(1-x^4)^2} = -4\frac{1+3x^4}{(1-x^4)^2} & f''(0) &= -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f(x) &= 0\cdot 1 + 0\cdot x - 4\cdot\frac{x^2}{2} \pm \cdots \\
&= -2x^2 \pm \cdots
\end{aligned}$$

3. Gauß-Funktion (4 Punkte)

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} dy\, e^{-y^2/2}$$

Standardverfahren:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-x^2/2} & F'(0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
F''(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x e^{-x^2/2} & F''(0) &= 0 \\
F'''(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (-1+x^2) e^{-x^2/2} & F'''(0) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
F^{(iv)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (3x-x^3) e^{-x^2/2} & F^{(iv)}(0) &= 0 \\
F^{(v)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (3-6x^2+x^4) e^{-x^2/2} & F^{(v)}(0) &= 3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
\Rightarrow \quad F(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} \mp \cdots \right)
\end{aligned}$$

Eleganter: Aus

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{folgt mit } x \to -x^2/2\text{:} \qquad e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

und daraus durch Integration von $-x$ bis x

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)n!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} \mp \cdots \right).$$

4. Erdbeschleunigung (3 Punkte)

Mit $g(r) = a/r^2$ gilt

$$g(r_0) = a/r_0^2 \qquad \text{und} \qquad g'(r_0) = -2a/r_0^3,$$

also

$$g(r) = \frac{a}{r_0^2} \left(1 - 2\frac{r-r_0}{r_0} \pm \cdots \right).$$

Einsetzen:

$$\delta g(r) \approx \frac{\frac{a}{r_0^2} - \frac{a}{r_0^2}(1 - 2\frac{r-r_0}{r_0})}{\frac{a}{r_0^2}} = 2\frac{r-r_0}{r_0} = 2\frac{20\ \text{km}}{6000\ \text{km}} = 0.66\ \%.$$

5. Taylorreihen (6 Punkte)

(a) Ein Polynom ist gleich seiner Taylorreihe, also gilt

$$f(x) = (x + 1 - 3)(x + 1) = -3(x + 1) + (x + 1)^2,$$

wobei alle höheren Potenzen von $(x + 1)$ verschwinden.

(b) Aus der Vorlesung:

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

Durch Ersetzen $x \to x^2$ erhält man

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

(c) Alle Ableitungen haben die Form

$$f^{(n)}(x) = \mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big)\, e^{-1/x^2}$$

mit irgendeinem Polynom $\mathcal{P}$. (Dies sieht man durch Ausprobieren, es läßt sich aber mit vollständiger Induktion auch beweisen.) Wegen

$$\lim_{x \to 0} x^p e^{-1/x^2} = 0 \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{R}$$

verschwindet jeder einzelne Term im Polynom im Grenzfall $x \to 0$, damit ist $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n, und die Taylorreihe von $f(x)$ ist exakt Null.