**Institut für Theoretische Teilchenphysik**

# Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **Blatt 9** 15. 12. 2000

---

Abgabe: Mittwoch, 13. 12. bis 10:30

**1.** Vektor- und Skalarprodukt (6 Punkte)

Gegeben sei ein fester Vektor $\boldsymbol{\varphi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Bestimmen Sie die Komponenten der Matrizen $B$ und $C$ so, daß für jeden Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

**(a)** $B\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$

**(b)** $C\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r})$

Zeigen Sie, ohne die Komponentendarstellung zu verwenden (d.h. nur mit Hilfe der Eigenschaften von Vektor- und Skalarprodukt), daß für jeden Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

**(c)** $BC\,\mathbf{r} = 0$,

**(d)** $CB\,\mathbf{r} = 0$,

**(e)** $B^2\,\mathbf{r} = (C - \phi^2\mathbf{1})\,\mathbf{r}$,

**(f)** $C^2\,\mathbf{r} = \phi^2 C\,\mathbf{r}$,

wobei $\phi = |\boldsymbol{\varphi}|$ ist.

**2.** Zweiteilchenproblem und Drehimpuls (8 Punkte)

Zwei Körper mit gleicher Masse $m_1 = m_2 = m$ bewegen sich ohne Einfluß äußerer Kräfte auf den Bahnkurven

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{c}{2}t^2 \\ bt \\ -\frac{c}{2}t^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2}t^2 \\ 2bt \\ \frac{c}{2}t^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

**(a)** Bestimmen Sie die Kraft $\mathbf{F}_{21}$, die der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt.

**(b)** Geben Sie die Bahnkurve $\mathbf{R}(t)$ und den Impuls $\mathbf{P}(t) = M\dot{\mathbf{R}}(t)$ des Schwerpunkts an.

**(c)** Geben Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ und den Impuls $\mathbf{p}(t) = \mu\dot{\mathbf{r}}(t)$ der Relativbewegung von Körper 2 bezüglich des Körpers 1 an.

**(d)** Bestimmen Sie den Drehimpulsvektor $\mathbf{L}(t)$ des Körpers 2 bezüglich des Körpers 1.

**(e)** Überprüfen Sie mit Hilfe von $\mathbf{L}(t)$, ob die Relativbewegung in einer Ebene verläuft.

**(f)** Überprüfen Sie mit Hilfe von $\mathbf{L}(t)$, ob der Flächensatz (2. Keplersches Gesetz) gilt.

**3.** Allgemeine Drehmatrix (6 Punkte)

Eine allgemeine Drehmatrix mit Drehachse $\boldsymbol{\varphi}$ und Drehwinkel $\phi = |\boldsymbol{\varphi}|$ läßt sich mit Hilfe der Definitionen aus Aufgabe 1 wie folgt schreiben:

$$D = \cos\phi\,\mathbf{1} + \frac{\sin\phi}{\phi}\,B + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2}C. \tag{2}$$

Die Drehung wirkt also auf den Vektor $\mathbf{r}$ wie

$$D\,\mathbf{r} = \cos\phi\,\mathbf{r} + \frac{\sin\phi}{\phi}\,\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r} + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2}\,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}). \tag{3}$$

**(a)** Geben Sie, analog zu Gl. (2), die Transponierte $D^t$ an. (1 Punkt)

**(b)** Zeigen Sie: $DD^t = \mathbf{1}$. (3 Punkte)

**(c)** Verifizieren Sie, daß die Drehachse $\boldsymbol{\varphi}$ ist. (1 Punkt)

**(d)** Verifizieren Sie, daß der Drehwinkel $\phi$ beträgt. (1 Punkt)

Zusatzfrage: Können Sie ein Argument finden, warum die Determinante von $D$ gleich $+1$ sein muß, ohne diese aus den Komponenten von $D$ ausrechnen zu müssen?