

Lösungsvorschläge

1. Vektor- und Skalarprodukt (6 Punkte)

$$(a) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad C = \begin{pmatrix} \phi_1^2 & \phi_1\phi_2 & \phi_1\phi_3 \\ \phi_1\phi_2 & \phi_2^2 & \phi_2\phi_3 \\ \phi_1\phi_3 & \phi_2\phi_3 & \phi_3^2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad BC \mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi} \times [\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r})] = (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}) = 0, \text{ weil } \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ ist.}$$

$$(d) \quad CB \mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi} [\boldsymbol{\varphi} \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r})] = 0, \text{ weil } \boldsymbol{\varphi} \text{ orthogonal auf } \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} \text{ steht.}$$

$$(e) \quad B^2 \mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = C \mathbf{r} - \phi^2 \mathbf{r}, \text{ weil } \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \phi^2.$$

$$(f) \quad C^2 \mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi} [\boldsymbol{\varphi} \cdot (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}))] = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}) = \phi^2 C \mathbf{r}, \text{ weil } \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \phi^2.$$

2. Zweiteilchenproblem und Drehimpuls (8 Punkte)

$$(a) \quad \mathbf{F}_{21} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1(t) = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ -mc \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad \mathbf{R}(t) = \frac{m_1 \mathbf{r}_1(t) + m_2 \mathbf{r}_2(t)}{m_1 + m_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3bt/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3mb \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} -ct^2 \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -mct \\ mb/2 \\ mct \end{pmatrix}.$$

$$(d) \quad \mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} mbct^2/2 \\ 0 \\ mbct^2/2 \end{pmatrix} = \frac{mbct^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \quad \text{Die Richtung von } \mathbf{L}(t) \text{ ist konstant, also verläuft die Bewegung in einer Ebene.}$$

$$(f) \quad \text{Der Betrag von } \mathbf{L}(t) \text{ ist nicht konstant, also gilt der Flächensatz hier nicht.}$$

3. Allgemeine Drehmatrix (6 Punkte)

(a) Aus Aufg. 1a und 1b liest man ab: $B = -B^t$ und $C = C^t$. Daher gilt

$$D^t = \cos \phi \mathbf{1} - \frac{\sin \phi}{\phi} B + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} C. \quad (1)$$

(b)

$$\begin{aligned} DD^t &= \left(\cos \phi \mathbf{1} + \frac{\sin \phi}{\phi} B + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} C \right) \left(\cos \phi \mathbf{1} - \frac{\sin \phi}{\phi} B + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} C \right) \\ &= \cos^2 \phi \mathbf{1} + \cos \phi \frac{\sin \phi}{\phi} B - \cos \phi \frac{\sin \phi}{\phi} B - \frac{\sin^2 \phi}{\phi^2} B^2 \\ &\quad + 2 \cos \phi \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} C + \frac{\sin \phi}{\phi} \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (BC - CB) + \frac{(1 - \cos \phi)^2}{\phi^4} C^2 \\ &= \cos^2 \phi \mathbf{1} - \frac{\sin^2 \phi}{\phi^2} (C - \phi^2 \mathbf{1}) + 2 \cos \phi \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} C + \frac{(1 - \cos \phi)^2}{\phi^4} \phi^2 C \\ &= (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \mathbf{1} + \frac{-\sin^2 \phi + 2 \cos \phi (1 - \cos \phi) + (1 - \cos \phi)^2}{\phi^2} C \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

(c)

$$D \varphi = \cos \phi \varphi + \frac{\sin \phi}{\phi} \varphi \times \varphi + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \varphi (\varphi \cdot \varphi) = \cos \phi \varphi + (1 - \cos \phi) \varphi = \varphi.$$

(d) Sei $\mathbf{r}$ normiert und orthogonal auf φ , d.h. $\mathbf{r}^2 = 1$ und $\varphi \cdot \mathbf{r} = 0$. Dann ist

$$D \mathbf{r} = \cos \phi \mathbf{r} + \frac{\sin \phi}{\phi} \varphi \times \mathbf{r}$$

und daher

$$\mathbf{r} \cdot (D \mathbf{r}) = \cos \phi (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{r} \cdot (\varphi \times \mathbf{r}) = \cos \phi$$

Zusatzfrage: Die Determinante von D kann nur gleich ± 1 sein, weil

$$1 = \det \mathbf{1} = \det(DD^t) = (\det D)^2$$

gilt. Für $\phi = 0$ ist sie aber gleich $+1$, weil dann $D = \mathbf{1}$ gilt. Da alle Komponenten von D stetig von den Komponenten von φ abhängen (der Limes $\phi \rightarrow 0$ existiert unabhängig von der Richtung von φ), und $\det D$ eine stetige Funktion der Komponenten von D ist, muß $\det D$ stetig von φ abhängen. Da der Wert der Determinante also nicht „springen“ kann, muß er für *alle* Werte von φ gleich $+1$ sein.