Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **Blatt 10** 22. 12. 2000

Abgabe: Mittwoch, 20. 12. bis 10:30

1. Anfangswertprobleme (8 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung, welche die gegebene Anfangsbedingung erfüllt:

(a) $y' = y^2/x^2$ $\quad y(1) = \frac{1}{2}$ (2 Punkte)

(b) $x\,(y' - 1) = y$ $\quad y(1) = 0$ (3 Punkte)

(c) $y' - y\,\cot x = 1/\sin x$ $\quad y(\pi/4) = 0$ (3 Punkte)

Wo eine Trennung der Variablen nicht sofort möglich ist, können Sie $y(x) = u(x)\,v(x)$ mit zwei unbekannten Funktionen u und v ansetzen. Bestimmen Sie zunächst $v(x)$ so, daß nur die Terme proportional zu $u(x)$ verschwinden. Dies führt auf eine Differentialgleichung für $v(x)$, von der Sie lediglich eine spezielle Lösung benötigen. Wenn Sie nun diese Lösung $v(x)$ einsetzen, erhalten Sie eine Differentialgleichung für $u(x)$, die Sie ebenfalls lösen können.

2. Bewegung im Potential (7 Punkte)

Ein Massepunkt (Masse m) bewegt sich in einer Dimension unter Einfluß der Kraft

$$F(x) = ax^2 \qquad (a > 0).$$

(a) Geben Sie das zugehörige Potential $U(x)$ an. (Dabei sei $U(0) = 0$.) (1 Punkt)

(b) Wie lautet die Gesamtenergie E als Funktion von x und $\dot{x}$? (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie aus der Bedingung $E(x, \dot{x}) \equiv E_0$ die Funktion $t(x)$ als unbestimmtes Integral, d.h. die Umkehrfunktion der Bahnkurve. Berechnen Sie dieses Integral für den Spezialfall $E_0 = 0$ und lösen Sie das Resultat nach x auf. (3 Punkte)

(d) Skizzieren Sie die resultierende Bahnkurve $x(t)$ und erklären Sie qualitativ ihren Verlauf: Wo liegen die Unterschiede zum dem analogen Problem mit konstanter Kraft ($F(x) = \text{const}$ statt $F(x) \propto x^2$)? (2 Punkte)

3. Gebundene Bewegung (5 Punkte)

Ein Massepunkt (Masse m) bewegt sich in einer Dimension im Potential

$$U(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

wobei die Gesamtenergie E beträgt.

(a) Unter welcher Bedingung ist die Bewegung $x(t)$ gebunden? (1 Punkt)

(b) Führen Sie neue Variablen y und s ein, so daß

$$x = py - q \qquad \text{und} \qquad t = rs$$

mit reellen Konstanten p, q, r. Wie müssen p, q, r gewählt werden, damit die Bahnkurve $y(s)$ in den neuen Variablen die Differentialgleichung

$$y'^2 = 1 - y^2$$

erfüllt? ($y' = dy/ds$) (3 Punkte)

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an. (1 Punkt)

Sie haben damit gezeigt, daß sich die gebundene Bewegung immer durch Winkelfunktionen ausdrücken läßt, wenn das Potential ein Polynom zweiter Ordnung ist.