

Lösungsvorschläge

1. Anfangswertprobleme (8 Punkte)

(a) Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{x^2} && \rightarrow && \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \\ \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} &= \int \frac{dx}{x^2} && \rightarrow && -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Anfangsbedingung $y(1) = \frac{1}{2}$ führt auf $C = -1$:

$$\rightarrow y = \frac{x}{x+1}$$

(b) Setze $y = uv$:

$$x((uv)' - 1) = uv \quad \rightarrow \quad u(xv' - v) + xvu' = x$$

Nullsetzen der Klammer (die Integrationskonstante ist hier irrelevant):

$$x \frac{dv}{dx} = v \quad \rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad v(x) = x$$

Einsetzen der Lösung für $v(x)$:

$$\begin{aligned} \rightarrow x^2 u' &= x && \rightarrow && \int du = \int \frac{dx}{x} && \rightarrow && u(x) = \ln x + C \\ \rightarrow y &= x \ln x + Cx && \rightarrow && y &= x \ln x \end{aligned}$$

wegen $y(1) = 0$.

(c) Analog:

$$(uv)' - uv \cot x = \frac{1}{\sin x} \quad \rightarrow \quad u(v' - v \cot x) + vu' = \frac{1}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} v' = v \cot x &\rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int dx \cot x \rightarrow \ln v = \ln \sin x \rightarrow v(x) = \sin x \\ \sin x u' = \frac{1}{\sin x} &\rightarrow \int du = \int \frac{dx}{\sin^2 x} \rightarrow u(x) = -\cot x + C \end{aligned}$$

Einsetzen von $u(x)$ und $v(x)$:

$$\rightarrow y = C \sin x - \cos x \rightarrow y = \sin x - \cos x$$

wegen $y(\pi/4) = 0$.

2. Bewegung im Potential (7 Punkte)

(a)

$$U(x) = - \int dx F(x) = -\frac{a}{3}x^3$$

(b)

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{a}{3}x^3$$

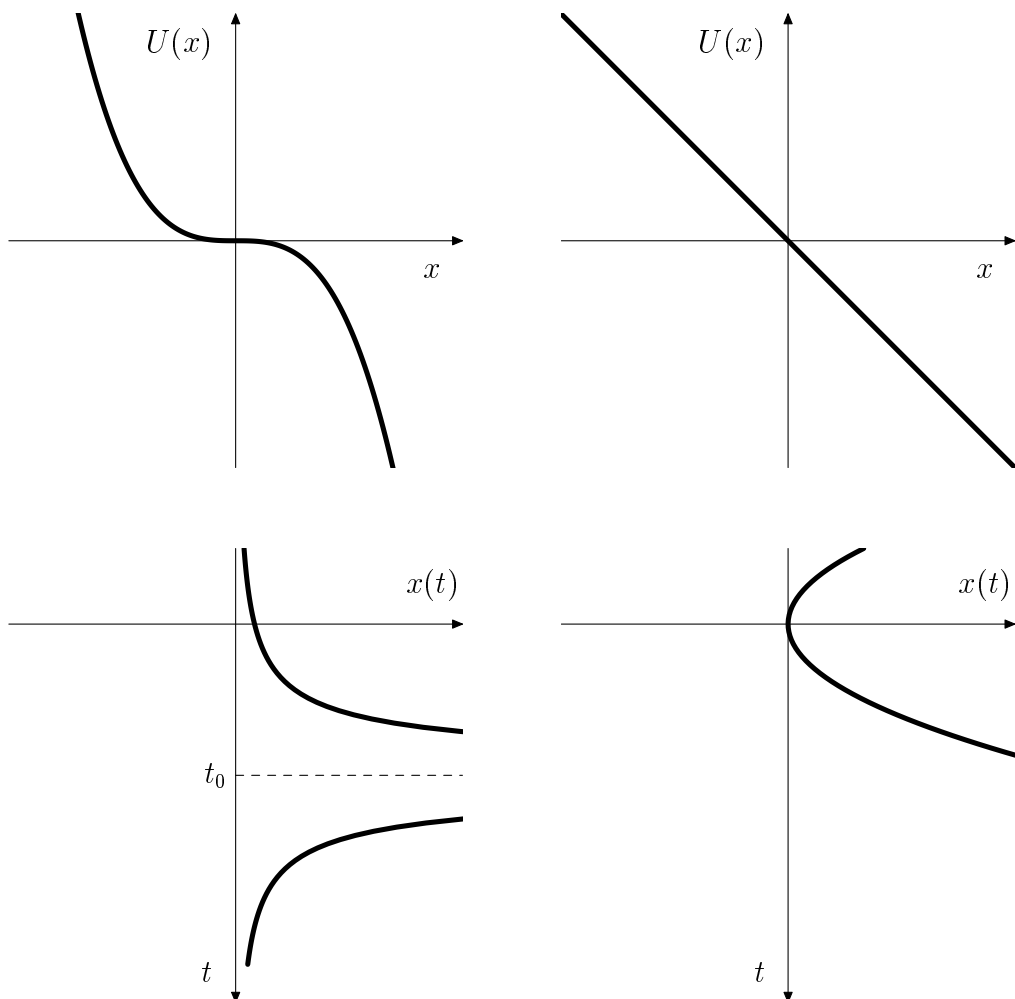
(c)

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} \left(E_0 + \frac{a}{3}x^3 \right) \quad \rightarrow \quad t(x) - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E_0 + \frac{a}{3}x^3}}$$

$E_0 = 0$:

$$\begin{aligned} t(x) &= \pm \sqrt{\frac{3m}{2a}} \int dx x^{-3/2} + t_0 = \mp 2\sqrt{\frac{3m}{2ax}} + t_0 \\ \rightarrow \quad x(t) &= \frac{6m}{a(t - t_0)^2} \end{aligned}$$

(d) Links: $U(x) \propto x^3$; rechts: $U(x) \propto x$ (konstante Kraft).



Für $U(x) \propto x^3$ verläuft das Potential bei $x = 0$ flach (die Kraft verschwindet), daher erreicht der Massepunkt die Stelle $x = 0$ nicht in endlicher Zeit. Stattdessen wird $x = \infty$ in endlicher Zeit erreicht (bei $t = t_0$), weil das Potential für $x \rightarrow \infty$ immer steiler wird.

Dagegen wird im Fall konstanter Kraft (Fallgesetz) der Umkehrpunkt $x = 0$ erreicht, während der Weg bis $x = \infty$ unendliche Zeit benötigt.

3. Gebundene Bewegung (5 Punkte)

(a) Die Bewegung ist gebunden, falls $a > 0$.

(b) Zunächst gilt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p dy}{r ds} = \frac{p}{r} y'.$$

Dies wird in den Ausdruck für die Gesamtenergie eingesetzt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + ax^2 + bx + c \\ \rightarrow \quad 0 &= \frac{mp^2}{2r^2} y'^2 + a(py - q)^2 + b(py - q) + c \\ &= \frac{mp^2}{2r^2} \left(y'^2 + \frac{2r^2}{m} ay^2 + \frac{2r^2}{mp} (-2aq + b)y + \frac{2r^2}{mp^2} (aq^2 - bq + c - E) \right) \end{aligned}$$

Mit der Wahl

$$r = \sqrt{\frac{m}{2a}}, \quad q = \frac{b}{2a}$$

reduziert sich das auf

$$0 = y'^2 + y^2 + \frac{1}{ap^2} \left(-\frac{b^2}{4a} + c - E \right),$$

was sich durch

$$p = \frac{1}{2a} \sqrt{4a(E - c) + b^2}$$

auf die Form

$$y'^2 = 1 - y^2$$

bringen läßt. (Dafür muß $a > 0$ und $E > c - b^2/4a$ erfüllt sein.)

(c) Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = s - s_0 \quad \rightarrow \quad \arcsin y = s - s_0 \quad \rightarrow \quad y(s) = \sin(s - s_0).$$