# Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **Blatt 11** 12. 1. 2001

Abgabe: Mittwoch, 10. 1. bis 10:30 ***Don't panic – erstmal frohe Weihnachten!***

**1.** Bewegung im Potential, qualitativ (8 Punkte)

Ein Massepunkt (Masse $m$) bewegt sich in einem Potential, welches durch ein Polynom vierten Grades dargestellt werden kann:

$$U(x) = ax^4 + bx^2 + c, \qquad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

**(a)** Nehmen Sie $b > 0$ an und skizzieren Sie die Form des Potentials und die Bahnkurve einer gebundenen Bewegung für (i) $a > 0$; (ii) $a < 0$. In welcher Weise weicht jeweils die Bahnkurve von der harmonischen Schwingung ab, die sich für den Fall $a = 0$ ergeben würde? (keine Rechnung!) (5 Punkte)

**(b)** Skizzieren Sie in analoger Weise Potential und Bahnkurve für $b < 0$ und $a > 0$. Welche zwei Fälle müssen Sie hier unterscheiden? Was passiert im Fall $a = 0$? (3 Punkte)

**2.** Wegintegrale (12 Punkte)

Berechnen Sie jeweils das Wegintegral

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

mit

**(a)** $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ **(b)** $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/\mathbf{r}^2$

für die folgenden beiden Wege $C$ in der $xy$-Ebene von $(1, 0, 0)$ nach $(0, 1, 0)$:

(i) einen Kreisbogen mit Radius 1 um den Koordinatenursprung;

(ii) einen Kreisbogen mit Radius 1 um den Punkt $(1, 1, 0)$.

Hinweis: Parametrisieren Sie die Kreisbögen mit Hilfe von Winkelfunktionen.

**3.** Für Interessierte (keine Punkte)

Auf dem vorigen Blatt haben Sie gezeigt, daß sich die Bahnkurve einer gebundenen Bewegung durch Winkelfunktionen ausdrücken läßt, wenn das Potential ein Polynom zweiten Grades ist. Auf ähnliche Weise kann man Polynome dritten und vierten Grades studieren, wobei man auf *elliptische Funktionen* zurückgreifen muß.

Betrachten Sie zunächst die Bewegungsgleichung $E = \text{const}$ für ein allgemeines Polynom vierten Grades:

$$U(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Im Folgenden sollten Sie die Rechnungen nur soweit durchführen, daß Sie sehen können, ob die jeweilige Aussage richtig ist:

**(a)** Nehmen Sie an, daß eine gebundene Bewegung möglich ist: Warum hat dann das Polynom $E - U(x)$ mindestens eine Nullstelle $x = x_0$?

**(b)** Substituieren Sie $x = x_0 - 1/y$ und zeigen Sie, daß Sie damit die Differentialgleichung auf die Form

$$\dot{y}^2 = b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0$$

bringen können, d.h. der Grad um 1 reduziert ist. Durch eine weitere Substitution $y \to z$ (welche?) erhalten Sie die Standardform

$$\dot{z}^2 = 4z^3 - g_2z - g_3.$$

Die Lösung dieser DGL heißt *Weierstrasssche $\wp$-Funktion* mit den *Invarianten* $g_2$ und $g_3$ (siehe z.B. BRONSTEIN).

**(c)** Substituieren Sie nun $z = 1/u^2 + r$ ($r \in \mathbb{R}$). Dies führt auf eine neue DGL für $u$. Mit passender Wahl von $r$ können Sie den Term $u^6$ eliminieren. Damit haben Sie ein Polynom vierten Grades, das nur noch gerade Potenzen enthält (vgl. Aufg. 1):

$$\dot{u}^2 = c_4u^4 + c_2u^2 + c_0.$$

**(d)** Durch eine weitere Substitution $u \to v$ erhalten Sie eine der Standardformen (für gebundene Bewegung)

$$\begin{aligned} v'^2 &= (1 - v^2)(1 - k^2v^2) && \text{oder} \\ v'^2 &= (1 - v^2)(k'^2 + k^2v^2) && \text{oder} \\ v'^2 &= (1 - v^2)(v^2 - k'^2), \end{aligned}$$

wobei $0 \leq k \leq 1$ und $k^2 + k'^2 = 1$. Die Lösungen dieser DGLs heißen *Jacobische Funktionen* sn, cn und dn (in dieser Reihenfolge). Ihre Bilder haben Sie in Aufg. 1 skizziert. Zeigen Sie, daß

$$\operatorname{cn}^2 x = 1 - \operatorname{sn}^2 x \qquad \text{und} \qquad \operatorname{dn}^2 x = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x$$

gilt, d.h. die Lösung der zweiten und dritten DGL sich durch die Lösung $\operatorname{sn} x$ der ersten ausdrücken läßt.

**(e)** Zeigen Sie: Für $k \to 0$ gehen die Jacobischen Funktionen in Winkelfunktionen über. Was passiert für $k \to 1$?