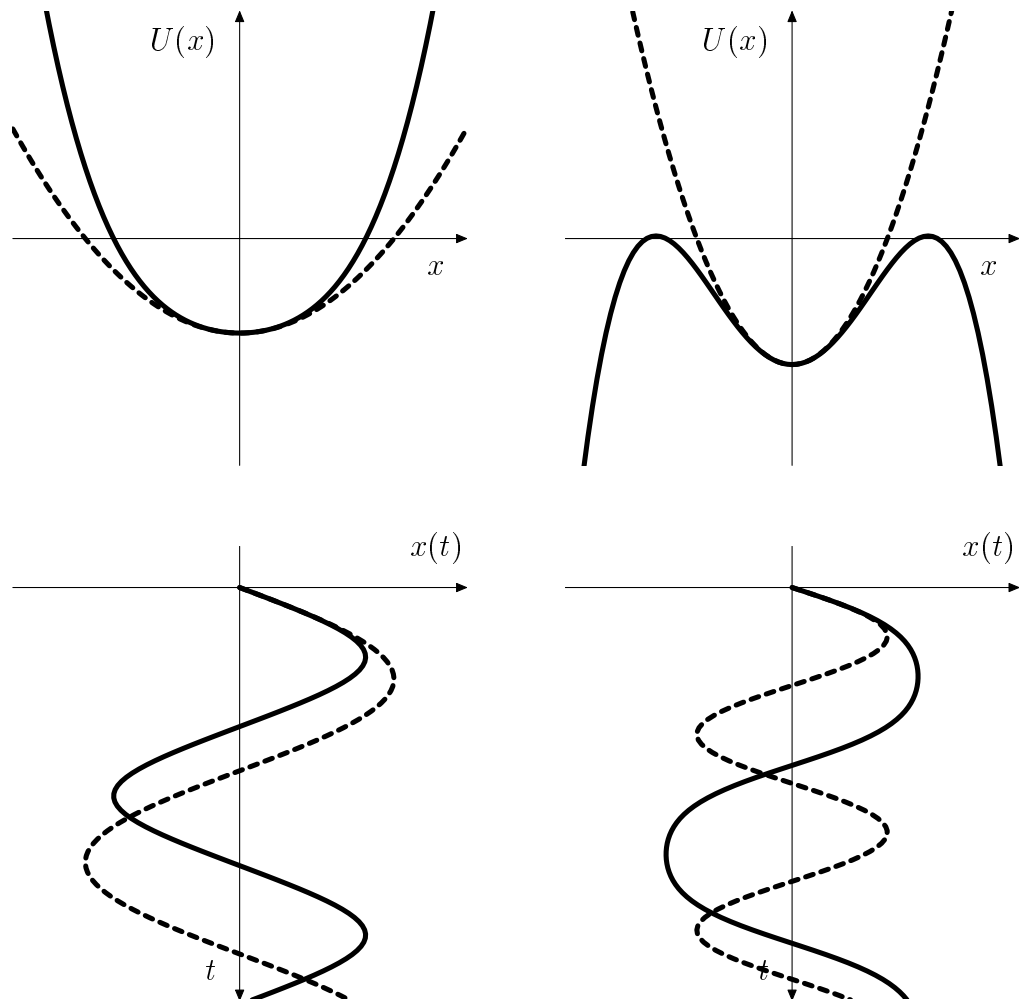


Lösungsvorschläge

1. Bewegung im Potential (8 Punkte)

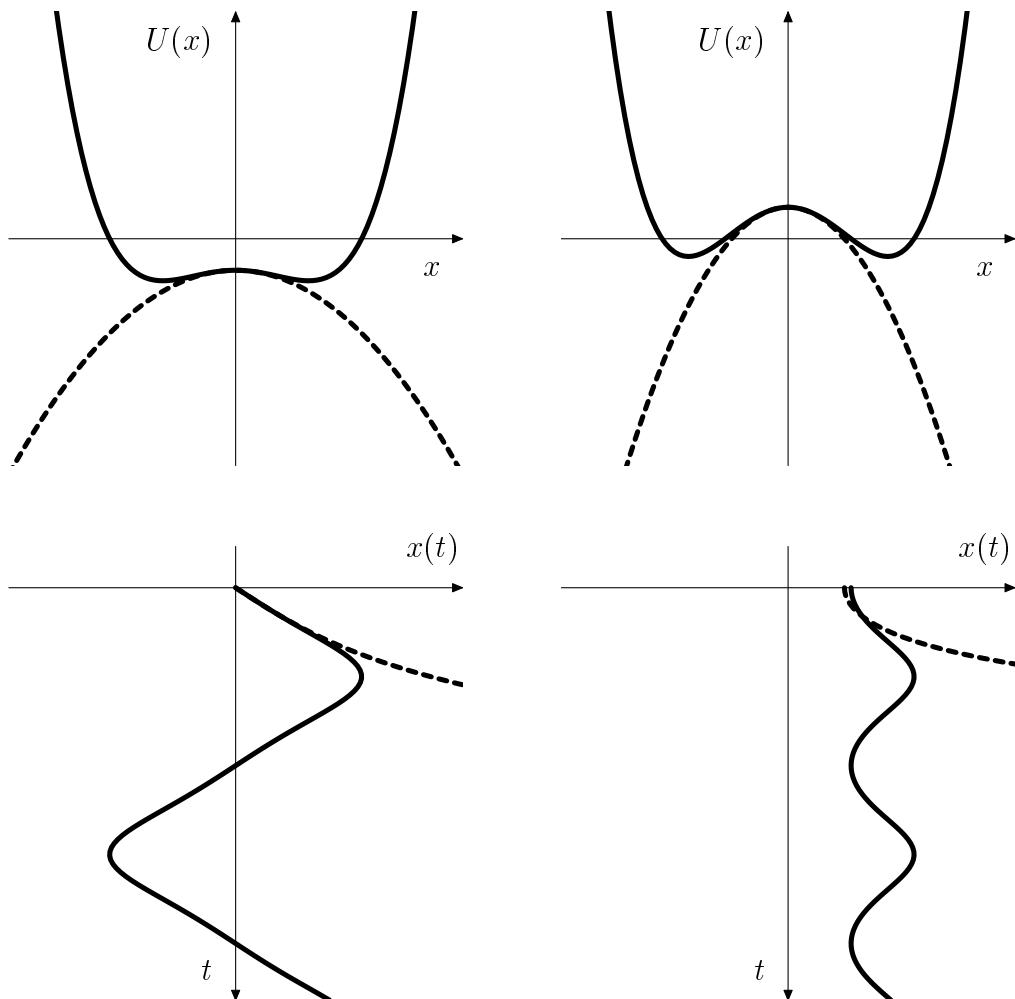
(a) $b > 0$



Gezeigt sind jeweils Bahnkurven mit $E = 0$. Für $a > 0$ (links) ist die Auslenkung etwas kleiner als bei der harmonischen Schwingung (gestrichelt). Die Periode ist entsprechend kürzer. Außerdem sind die Spitzen bei maximaler Auslenkung schärfer, da die Steigung des Potentials am Umkehrpunkt größer ist als im harmonischen Fall.

Dagegen ist für $a < 0$ (rechts) die Auslenkung größer, die Periode länger, und die Spitzen sind abgeflacht.

(b) $b < 0$



Für $a = 0$ ist die Bewegung nicht gebunden (gestrichelt).

2. Wegintegrale (12 Punkte)

(a)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = (-y, x, 0)$$

(i) Kreisbogen um den Koordinatenursprung:

$$\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, 0) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

also

$$d\mathbf{r} = (-\sin t, \cos t, 0) dt$$

und daher

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

(ii) Kreisbogen um den Punkt $(1, 1, 0)$:

$$\mathbf{r} = (1 - \sin t, 1 - \cos t, 0) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

also

$$d\mathbf{r} = (-\cos t, \sin t, 0) dt$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -1 + \cos t \\ 1 - \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t - 1) dt \\ &= \sin t - \cos t + t \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x, y, z)$$

(i)

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - \sin t)^2 + (1 - \cos t)^2} \begin{pmatrix} 1 - \sin t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t - \cos t}{3 - 2 \sin t - 2 \cos t} \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{du}{u} \quad \text{mit } u = 3 - 2 \sin t - 2 \cos t \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{3 - 2 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2}}{3 - 2 \sin 0 - 2 \cos 0} = 0 \end{aligned}$$

Tatsächlich ist dieses Integral wegunabhängig, denn

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \nabla \ln r \quad \text{mit } r = |\mathbf{r}|.$$

3. Für Interessierte (keine Punkte)

- (a) Die Bewegungsgleichung für eine Bahnkurve mit Energie E lautet

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - U(x) = -a_4x^4 - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x + (E - a_0)$$

Wenn die Bewegung gebunden ist, gibt es einen Umkehrpunkt mit $\dot{x} = 0$, d.h. die rechte Seite hat eine Nullstelle. Man kann also schreiben

$$\dot{x}^2 = (x - x_0)(a'_3x^3 + a'_2x^2 + a'_1x + a'_0)$$

mit einem reellen Wert x_0 und neuen Koeffizienten a'_i .

- (b) Aus $x = x_0 - 1/y$ folgt $\dot{x} = \dot{y}/y^2$, also kann man ausklammern und alles auf einen Nenner bringen

$$\begin{aligned}\frac{\dot{y}^2}{y^4} &= \left(-\frac{1}{y}\right) \left[a'_3 \left(x_0 - \frac{1}{y}\right)^3 + a'_2 \left(x_0 - \frac{1}{y}\right)^2 + a'_1 \left(x_0 - \frac{1}{y}\right) + a'_0 \right] \\ &= \frac{1}{y^4} (b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0)\end{aligned}$$

mit wieder anderen Koeffizienten b_i . Den Nenner y^4 kann man auf beiden Seiten kürzen. Wie in Aufgabe 3 auf Blatt 10 kann man nun eine lineare Substitution

$$y = pz - q$$

vornehmen. p wird so gewählt, daß der Koeffizient von z^3 gleich 4 wird, und q wird so gewählt, daß der Koeffizient von z^2 verschwindet. Das bedeutet

$$p = \frac{4}{b_3} \quad \text{und} \quad q = \frac{b_2}{3b_3},$$

wie man durch Einsetzen feststellt. Damit ist

$$\dot{z}^2 = 4z^3 - g_2z - g_3,$$

wobei sich g_2 und g_3 aus den Koeffizienten b_i berechnen.

Nebenbei haben wir damit gezeigt, daß alle Potentiale dritter und vierter Ordnung auf die gleiche Klasse von Funktionen als Lösungen der Bewegungsgleichungen führen, nämlich solche, die durch die $\wp$ -Funktion ausgedrückt werden können. Die Theorie dieser "elliptischen" Funktionen bildet einen Schwerpunkt der Funktionentheorie.

- (c) Mit der Substitution $z = 1/u^2 + r$, also $\dot{z} = -2\dot{u}/u^3$, erhalten wir zunächst eine DGL mit einem Polynom vom Grad 6 auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned}4\frac{\dot{u}^2}{u^6} &= 4\left(\frac{1}{u^2} + r\right)^3 - g_2\left(\frac{1}{u^2} + r\right) - g_3 \\ &= \frac{4}{u^6} (c_6u^6 + c_4u^4 + c_2u^2 + c_0).\end{aligned}$$

Wenn wir aber den Koeffizienten von u^6 ausrechnen

$$4c_6 = 4r^3 - g_2 r - g_3,$$

stellen wir fest, daß die rechte Seite immer eine Nullstelle hat, d.h. es gibt einen Wert von r , so daß c_6 verschwindet.

Der allgemeine Fall eines Polynoms dritten oder vierten Grades läßt sich also auf ein Polynom vierten Grades mit geraden Potenzen zurückführen, den Fall, den wir in Aufgabe 1 qualitativ behandelt haben.

- (d) Zuletzt skalieren wir die Variable u und die Zeit t nochmals um: $u = \alpha v$ und $t = \beta s$, wobei wir α und β so wählen können, daß die beiden Nullstellen des Polynoms mit maximalem Betrag (falls welche existieren) bei ± 1 liegen. Das heißt, die Gleichung hat eine der Formen

$$\begin{aligned} v'^2 &= (1 - v^2)(1 - k^2 v^2) && \text{oder} \\ v'^2 &= (1 - v^2)(k'^2 + k^2 v^2) && \text{oder} \\ v'^2 &= (1 - v^2)(v^2 - k'^2), \end{aligned}$$

wobei $0 \leq k \leq 1$ und $k^2 + k'^2 = 1$. Wenn man eine spezielle Lösung der ersten Gleichung mit $\operatorname{sn} s$ bezeichnet [die allgemeine Lösung ist $v(s) = \operatorname{sn}(s - s_0)$] und $\operatorname{cn}(s) = v(s)$ durch

$$v^2(s) = 1 - \operatorname{sn}^2 s$$

definiert, dann erhält man durch Differentiation

$$v(s) v'(s) = -\operatorname{sn} s \operatorname{sn}' s$$

also

$$\begin{aligned} v'^2(s) &= \frac{\operatorname{sn}^2 s}{v^2(s)} \operatorname{sn}'^2 s \\ &= \frac{\operatorname{sn}^2 s}{v^2(s)} (1 - \operatorname{sn}^2 s)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 s) \\ &= \frac{1 - v^2(s)}{v^2(s)} v^2(s) (1 - k^2 [1 - v^2(s)]) \\ &= (1 - v^2(s))(1 - k^2 + k^2 v^2(s)) \end{aligned}$$

und analog für $\operatorname{dn} s$. Diese drei Funktionen beschreiben also die verschiedenen Fälle der gebundenen Bewegung im Potential aus Aufgabe 1.

- (e) Für $k = 0$ (also $k' = 1$) fallen die ersten beiden Differentialgleichungen mit der für harmonische Bewegung zusammen:

$$\begin{aligned} v'^2 &= (1 - v^2) \\ v'^2 &= (1 - v^2) \\ v'^2 &= -(1 - v^2)^2 \end{aligned}$$

Die dritte DGL hat die einzige Lösung $v \equiv 1$. Damit gehen sn und cn in Winkel-funktionen über; man wählt den Anfangswert so, daß

$$\operatorname{sn} x = \sin x, \quad \operatorname{cn} x = \cos x, \quad \operatorname{dn} x = 1 \quad \text{für } k = 0.$$

Für $k = 1$ (also $k' = 0$) sehen die Gleichungen so aus:

$$\begin{aligned} v'^2 &= (1 - v^2)^2 \\ v'^2 &= v^2(1 - v^2) \\ v'^2 &= v^2(1 - v^2) \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich ebenfalls ohne Schwierigkeiten lösen, und man erhält

$$v(s) = \pm \tanh s$$

im ersten Fall und

$$v(s) = \pm \frac{1}{\cosh s}$$

in den beiden anderen Fällen, d.h.

$$\operatorname{sn} x = \tanh x, \quad \operatorname{cn} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{dn} x = \frac{1}{\cosh x} \quad \text{für } k = 1.$$

Dies entspricht physikalisch dem Fall, daß ein lokales Maximum des Potentials (in Aufgabe 1) gerade eben für $t \rightarrow \infty$ erreicht wird.